ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 42 за 2017 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Брушлинский К.В., Жданова Н.С., Стёпин Е.В.

Ускорение плазмы в коаксиальных профилированных каналах с продольным магнитным полем

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брушлинский К.В., Жданова Н.С., Стёпин Е.В. Ускорение плазмы в коаксиальных профилированных каналах с продольным магнитным полем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 42. 19 с. doi:10.20948/prepr-2017-42
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-42

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

К.В. Брушлинский, Н.С. Жданова, Е.В. Стёпин

Ускорение плазмы в коаксиальных профилированных каналах с продольным магнитным полем

Москва — 2017

Брушлинский К.В., Жданова Н.С., Стёпин Е.В.

Ускорение плазмы в коаксиальных профилированных каналах с продольным магнитным полем

В статье представлены математическая модель и результаты численных исследований осесимметричных течений плазмы в каналах типа сопла, образованных двумя коаксиальными электродами. Рассмотрены трансзвуковые течения с ускорением, представляющие интерес в разработках плазменных ускорителей. Математический аппарат моделей – численное решение двумерных МГД-задач, стационарные решения которых получены в процессе установления. Некоторые характеристики течения в узких трубках между близкими траекториями рассмотрены в квазиодномерном приближении. Основное внимание уделено влиянию продольного магнитного поля и криволинейной геометрии электродов на свойства ускорительных течений.

Ключевые слова: плазменные ускорители, МГД-течения, численное решение задач, продольное магнитное поле, геометрия электродов

Konstantin Vladimirovich Brushlinskii, Natalia Sergeevna Zhdanova, Evgenii Viktorovich Styopin

Plasma acceleration in curved coaxial channels with longitudinal magnetic field

Mathematical model and results of numerical simulation of axisymmetric plasma flows in nozzle-type channels formed by two coaxial electrodes are presented. Transonic acceleration flows, which attract interest in plasma accelerators development, are considered. Mathematics of the models is based on numerical solution of two-dimensional MHD-problems. Steady-state flows are obtained in its relaxation processes. Some of the flow characteristics in narrow tubes between close trajectories are considered in quasi-one-dimensional approximation. The main attention is focused on the influence of longitudinal magnetic field and curved channel geometry on acceleration flows properties.

Key words: plasma accelerators, MHD-flows, numerical simulation, electrode geometry

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10278).

Введение

Математическое моделирование и относящиеся к нему расчёты постоянно присутствуют в исследованиях течений плазмы в коаксиальных каналах плазменных ускорителей. Успешная разработка ускорителей по идеям, под руководством и при участии А.И. Морозова (см. [1, 2]) продемонстрирована примером создания квазистационарного сильноточного плазменного ускорителя (КСПУ) с рекордными значениями скорости и энергии потоков на выходе (см. [2–4]). Течения в каналах-соплах, образованных двумя коаксиальными электродами (рис. 1), – основной объект исследований процессов в ускорителях этого типа. Плазма ускоряется в осевом направлении амперовой силой $\mathbf{F}_{\|} = (1/c)\,\mathbf{j}\times\mathbf{H}_{\perp}$ взаимодействия радиального электрического тока $\mathbf{j}$ с собственным азимутальным, то есть поперечным по отношению к потоку, магнитным полем $\mathbf{H}_{\perp}$, порождаемым током в центральном электроде.

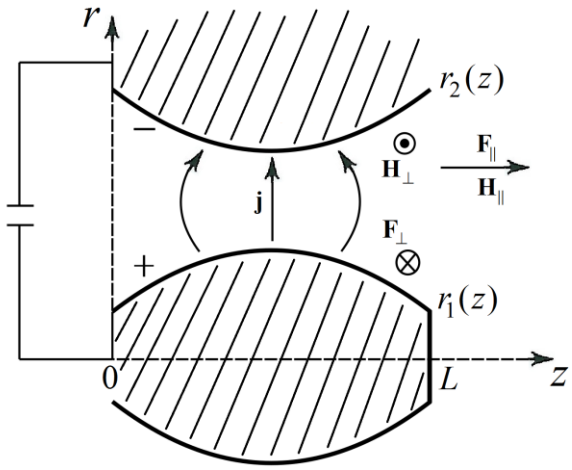

Рис. 1. Схема коаксиального плазменного ускорителя.
Сечение плоскостью $\varphi = \mathrm{const}$

Течения в каналах подробно исследованы теоретически (см. [5]) и реализованы в экспериментах (см. [4]). Существенную роль в разработке КСПУ сыграли численные исследования и расчёты, проведённые в основном в двумерных моделях, основанных на уравнениях магнитной газодинамики (МГД) (см., например, [6, 7] с подробной библиографией). Модели представляющих интерес стационарных течений получены установлением в процессе решения нестационарных задач.

Менее изучены течения в присутствии продольного (осевого) магнитного поля $\mathbf{H}_{\|}$, которое в дополнение к основному (поперечному азимутальному) может быть создано, например, с помощью соленоида, окружающего

установку. Некоторые результаты, касающиеся стационарных течений в узких трубках, образованных близкими друг к другу траекториями, получены в квазиодномерном (гидравлическом) приближении и представлены в обзоре [5]: указан полный набор первых интегралов, описывающих течения, и обращено внимание на существенные различия между течениями со сверхальфвеновскими и доальфвеновскими (по отношению к альфвеновской скорости, соответствующей продольному магнитному полю) скоростями. Особенности «пограничного» между ними течения с альфвеновской скоростью и постоянной («критической») плотностью исследованы в [8]. В [7] приведены полученная авторами классификация всех возможных стационарных течений и результаты численных исследований основных свойств течений каждого типа. Однако эти результаты ограничены простейшим случаем трубок с постоянным средним радиусом траекторий.

Более полные и содержательные исследования в терминах квазиодномерных задач должны учитывать криволинейную геометрию трубок с произвольно зависящим от продольной координаты z средним радиусом траекторий. Таким исследованиям и их месту в анализе двумерных осесимметричных течений и посвящена настоящая работа, в которой представлены численные модели течений в узких трубках криволинейной конфигурации, а также в каналах типа сопла двумерной геометрии и проведены расчёты трансзвуковых течений с ускорением, представляющих собой интерес в разработке и исследовании плазменных ускорителей.

В результате расчётов установлены закономерности, касающиеся влияния криволинейной геометрии канала и продольного магнитного поля на свойства трансзвуковых ускорительных течений плазмы. Результаты расчётов в квазиодномерном приближении сопоставлены с таковыми в трубках, образованных близкими траекториями стационарных течений плазмы, полученными в численном решении двумерных МГД-задач. В расчётах самих двумерных течений обращено внимание на зависимость результатов от кривизны каждого из электродов в отдельности.

Предшественниками проведённых исследований следует считать элементы квазиодномерной теории (см. [9]) и подробные расчёты (см. [10, 11]) МГД-течений в криволинейных узких трубках в поперечном магнитном поле, то есть в отсутствии продольного. Расчёты двумерных МГД-течений с продольным полем для одного варианта простейшей геометрии типа сопла изложены в работах [12, 13]. Двумерным моделям течений, дополнительно учитывающим эффект Холла и конечную проводимость плазмы, посвящены работы [14–16].

1. Постановка задачи. Метод решения

Плазма в каналах обсуждаемых ускорителей рассматривается как сплошная среда, то есть в основе моделирования её течений лежат задачи с уравнениями МГД. На данном этапе исследований диссипативные процессы (вязкость, теплопроводность, конечная проводимость) не учитываются. Течения допускают осевую симметрию, то есть $\partial/\partial\varphi \equiv 0$ в цилиндрических координатах (r, φ, z), поэтому двумерные задачи ставятся в сечении канала плоскостью $\varphi = \text{const}$, схематически изображённом на рис. 1.

Постановка задачи в основном воспроизводит изложенную в [12]. На входе в канал (левая граница $z = 0$) предполагаются заданными плотность ρ_0, температура T_0 (а следовательно, и давление p_0) втекающей слева плазмы, нулевая скорость вращения $\upsilon_\varphi = 0$ и напряжённости азимутального $H_\varphi = r_0 H_0 / r$ и продольного $H_z = H_{z0}$ магнитных полей, где $H_0 = 2J/cr_0$ – характерное значение напряжённости магнитного поля на входе, J – величина полного электрического тока, втекающего через левый торец центрального электрода, r_0 – характерное значение радиуса на входе. Направления скорости и продольного магнитного поля в установившемся течении должны совпадать, поэтому на входе $\upsilon_r / \upsilon_z = H_r / H_z$. Величина скорости υ_z на входе и какие-либо граничные условия на выходе вообще не заданы, что соответствует исследованию представляющих основной интерес трансзвуковых ускорительных течений.

Ограничивающие канал электроды $r = r_1(z)$ и $r = r_2(z)$ предполагаются сплошными и эквипотенциальными, что определяет граничные условия на них:

$$\upsilon_n = 0, \; H_n = 0, \tag{1.1}$$

где n – нормаль к поверхности электродов.

Основные вопросы относятся к стационарным течениям. Они устанавливаются со временем в решении нестационарных задач, поэтому начальные условия могут быть достаточно произвольными, лишь бы они обеспечивали начальный разгон плазмы.

Задача ставится и решается в безразмерных переменных, то есть единицы измерения всех независимых и зависимых переменных составлены из размерных констант, участвующих в её постановке. Наконец, чтобы избавиться от криволинейных границ расчётной области, введены пространственные координаты (z, y), преобразующие расчётную область в квадрат $0 < z, y < 1$:

$$z = z, \qquad r = (1 - y) r_1(z) + y r_2(z) \tag{1.2}$$

В этих координатах двумерная система безразмерных МГД-уравнений имеет вид (см. [12]):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\rho rR + \frac{\partial}{\partial z}\rho urR + \frac{\partial}{\partial y}\rho \upsilon_y r = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\rho urR + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho u^2 + P - H_z^2\right)rR + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho u\upsilon_y - r_z P - H_z H_y\right)r = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\rho \upsilon rR + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho u\upsilon - H_z H_r\right)rR + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \upsilon\upsilon_y + P - H_r H_y\right)r = \left(\rho w^2 + P - H_\varphi^2\right)R \\ \frac{\partial}{\partial t}\rho wrR + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho wu - H_\varphi H_z\right)rR + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho w\upsilon_y - H_\varphi H_y\right)r = \left(-\rho \upsilon w + H_\varphi H_r\right)R \\ \frac{\partial}{\partial t}\rho \varepsilon rR + \frac{\partial}{\partial z}\rho \varepsilon urR + \frac{\partial}{\partial y}\rho \varepsilon \upsilon_y r + p\left(\frac{\partial urR}{\partial z} + \frac{\partial \upsilon_y r}{\partial y}\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}H_\varphi R + \frac{\partial}{\partial z}\left(H_\varphi u - H_z w\right)R + \frac{\partial}{\partial y}\left(H_\varphi \upsilon_y - H_y w\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}H_z rR + \frac{\partial}{\partial y}Er = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}H_y r - \frac{\partial}{\partial z}Er = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon = \frac{\beta}{2}\rho T, \qquad P = p + \frac{H_z^2 + H_r^2 + H_\varphi^2}{2},$$

где $u \equiv \upsilon_z,\ \upsilon \equiv \upsilon_r,\ w \equiv \upsilon_\varphi,\ \upsilon_y \equiv \upsilon - ur_z,\ H_y \equiv H_r - H_z r_z,\ E \equiv E_\varphi \equiv H_z\upsilon_y - H_y u,$
$R(z) = r_2(z) - r_1(z) = \partial r/\partial y,\ r_z = \partial r/\partial z = (1-y)r_1'(z) + yr_2'(z).$

Традиционно участвующий в МГД-моделировании безразмерный параметр $\beta = 8\pi p_0 / H_0^2$ есть отношение характерных значений газодинамического и магнитного давлений.

Граничные условия на входе в канал $(z = 0)$ имеют вид:

$$\rho = 1,\ T = 1,\ p = \frac{\beta}{2},\ w = 0,\ \upsilon_y = 0,\ H_\varphi = \frac{r_0}{r},\ H_y = 0,\ H_z = H_{z0} \tag{1.4}$$

и на электродах $(y = 0,\ y = 1)$:

$$\upsilon_y = 0,\ H_y = 0 \tag{1.5}$$

Численное решение поставленной задачи осуществляется с помощью двумерной разновидности метода коррекции потоков (FCT) с коррекцией по Залесаку, не требующей расщепления по направлениям (см. [17, 18]).

2. Квазиодномерное приближение

Полезную информацию о рассматриваемых течениях можно получить в квазиодномерном (гидравлическом) приближении. Оно применяется в исследовании течений в узких трубках, в которых основной интерес представляет зависимость искомых величин от продольной пространственной координаты и отсутствует зависимость от поперечной в результате их усреднения по сечению трубки. В случае рассматриваемых здесь плазменных ускорителей речь идёт о коаксиальных щелях кольцевого сечения, в которых расстояние между электродами существенно меньше продольного размера канала, или о трубках в области двумерного течения, образованных двумя близкими траекториями (рис. 2).

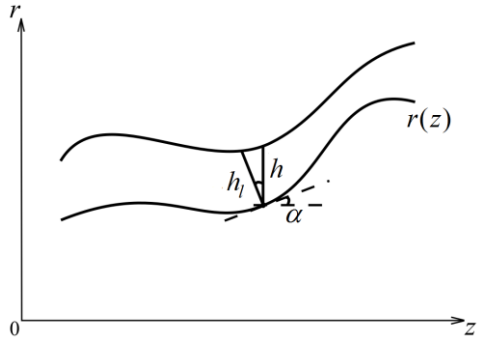

Рис. 2. Схема коаксиальной узкой трубки

Безразмерные МГД-уравнения (1.3) имеют в этом приближении одномерную природу (см., например, [19]):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\rho S + \dfrac{\partial}{\partial z}\rho u S = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\rho w S r + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\rho w u - H_\varphi H_z\right) S r = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\boldsymbol{\upsilon}^2}{2}\right) + u\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\boldsymbol{\upsilon}^2}{2}\right) + \dfrac{u}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \dfrac{H_\varphi u - H_z w}{\rho r}\dfrac{\partial}{\partial z} H_\varphi r = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{p}{\rho^\gamma}\right) + u\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{H_\varphi S}{r}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\left(H_\varphi u - H_z w\right) S}{r} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t} H_z S = 0,\ \dfrac{\partial}{\partial z} H_z S = 0,\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{H_r S}{r}\right) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{\upsilon}^2 \equiv u^2 + \upsilon^2 + w^2$.

Двумерная природа течений представлена здесь двумя заданными функциями в коэффициентах уравнений: $r = r(z)$ – типичная (нижняя на рис. 2) траектория и $S(z) = r(z)h(z)$ – величина, пропорциональная площади сечения трубки плоскостью $z = \text{const}$, где $h(z)$ – расстояние по вертикали

между границами трубки. Производная по z в уравнениях (2.1) соответствует изменению величин вдоль трубки, отнесённому к изменению z.

Уравнениям (2.1) можно придать формально более естественный вид в координатах (t,l) вместо (t,z), где l – направление вдоль трубки. Введём следующие соотношения:

$$h_l = h\cos\alpha,\ S_l = S\cos\alpha,\ \upsilon_l = \frac{u}{\cos\alpha},\ H_l = \frac{H_z}{\cos\alpha},\ \frac{\partial}{\partial l} = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial z},$$

где h_l, S_l – поперечный размер трубки и площадь её сечения, ортогональные l, а υ_l и H_l – компоненты скорости и напряжённости поля в направлении l, $\mathrm{tg}\alpha = r'(z)$, α – угол между направлениями z и l. Тогда, если заменить $h,\ S,\ u,\ H_z,\ \partial/\partial z$ на $h_l,\ S_l,\ \upsilon_l,\ H_l,\ \partial/\partial l$, то уравнения (2.1) не изменятся (см. [19]). Однако, численное решение удобнее реализовать в приведённом выше виде.

Квазиодномерное приближение эффективно используется в исследованиях стационарных течений. Уравнения (2.1) при $\partial/\partial t \equiv 0$ легко интегрируются, и течения описываются системой алгебраических уравнений[1]:

$$\begin{gathered}\rho S u = C_1,\ H_z S = C_2,\ \frac{p}{\rho^\gamma} = C_3,\ \left(C_1 w - C_2 H_\varphi\right) r = C_4,\\ \left(\frac{C_1 H_\varphi}{\rho} - C_2 w\right)\frac{1}{r} = C_5,\ \frac{\boldsymbol{\upsilon}^2}{2} + \mathrm{W} + \frac{C_5}{C_1} H_\varphi r = C_6,\end{gathered} \tag{2.2}$$

где $\mathrm{W} = \gamma p/(\gamma-1)\rho$ – энтальпия.

Большинство расчётов относятся к трансзвуковым сверхальфвеновским течениям с ускорением. В этом случае все константы, кроме C_1, определены граничными условиями (1.4) на входе в канал и, если нормировать $S(z)$ на её значение $S(0)$, имеют следующие безразмерные значения:

$$\begin{gathered}C_2 = H_{z0},\ C_3 = \frac{\beta}{2},\ C_4 = -C_2 r_0,\ C_5 = C_1\frac{r_0}{r(0)^2},\\ C_6 = \frac{C_1^2}{2}\left(1 + r'(0)^2\right) + \frac{\gamma\beta}{2(\gamma-1)} + \left(\frac{r_0}{r(0)}\right)^2\end{gathered} \tag{2.3}$$

[1] В несколько иной форме они приведены в [5].

Константа $C_1 = u(0)$ определяется требованием ускорения течения в канале с переходом через быструю магнитозвуковую скорость, что достигается либо подбором в серии решений уравнений (2.2), либо в процессе численного решения нестационарной задачи с уравнениями (2.1).

Для решения системы (2.2) удобно, исключив из неё все неизвестные, кроме ρ, свести её к одному уравнению:

$$\begin{gathered}
\Phi\left(\rho, z, C_1\right) \equiv F_0\left(\rho, z, C_1\right) + F_1\left(\rho, z, C_1\right) - \frac{C_1^2\left(1 + r'(z)^2\right)}{2S^2(z)} = 0, \text{ где} \\
F_0 = \rho^2\left(\frac{C_1^2}{2}\left(1 + r'(0)^2\right) + \frac{\gamma\beta}{2(\gamma - 1)}\left(1 - \rho^{\gamma - 1}\right) + \left(\frac{r_0}{r(0)}\right)^2\left(1 - \rho\left(\frac{r(z)}{r(0)}\right)^2\right)\right) \\
F_1 = \frac{\rho^2 k^2}{\left(1 - k^2\rho\right)^2}\left(\frac{r_0}{r(z)} - \rho r(z)\frac{r_0}{r(0)^2}\right)\left(-\frac{r_0}{2r(z)} + \rho r(z)\frac{r_0}{r(0)^2}\left(\frac{3}{2} - \rho k^2\right)\right) \\
k = \frac{C_2}{C_1}
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) обобщает аналогичное уравнение для задачи с продольным магнитным полем в узкой трубке с постоянным средним радиусом траекторий (см. [7]). Его решением $\rho\left(z, C_1\right)$, удовлетворяющим граничному условию $\rho\left(0, C_1\right) = 1$, является искомая функция $\rho(z)$, а остальные параметры легко выражаются через неё с помощью (2.2). Произвольная пока константа C_1 определяет тип сверхальфвеновского (при некотором ограничении на величину продольного поля H_{z0}) течения, которое может быть до- или сверхзвуковым по отношению к скорости быстрого магнитного звука вдоль траектории C_{fl}. Трансзвуковому течению соответствует такое значение C_1, при котором совпадают экстремумы функции Φ по переменным ρ и z. Это связано с тем, что непрерывный переход искомого решения $\rho\left(z, C_1\right)$ на соответствующую ускорению ветвь кривой (2.4) происходит в особой точке типа седла (см. иллюстрации поверхностей $\Phi = \Phi\left(\rho, z, C_1\right)$ в [10]). Здесь в совокупности выполняются следующие условия:

$$\Phi\left(\rho^*, z^*, C_1\right) = 0, \ \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\left(\rho^*, z^*, C_1\right) = 0, \ \frac{\partial\Phi}{\partial z}\left(\rho^*, z^*, C_1\right) = 0 \tag{2.5}$$

Три уравнения (2.5) определяют значения скорости на входе $C_1 = u(0)$, координату точки $z = z^*$, в которой $\upsilon_l = C_{fl}$, и плотность $\rho(z^*)$ в этой точке. В случае горизонтальной траектории $r(z) = \text{const}$ критическая точка z^* совпадает с точкой минимального сечения в центре сопла $z = 0.5$, и неизвестные C_1 и $\rho(0.5)$ находятся решением первых двух уравнений (2.5), а третье сводится к очевидному $S'(z) = 0$ (см. [7]). В общем случае место перехода через скорость звука C_{fl} в криволинейных трубках нетривиально и определяется рядом параметров задачи. Например, в случае отсутствия продольного магнитного поля место перехода зависит от соотношения между газовой и магнитной скоростями звука (см. [2, 5, 9]).

3. Результаты расчётов

Результатами расчётов, проведённых в изложенных выше постановках задач, является описание двумерных установившихся течений плазмы в коаксиальных каналах и их более подробный анализ в узких трубках, расположенных в разных частях установки. Они являются продолжением и развитием работ [12, 13] с расчётами в каналах относительно гладкой геометрии, навеянной созданным к тому времени КСПУ.

В рассмотренных ниже каналах кривизна центрального и внешнего электродов выражена сильнее. Основной интерес направлен на исследование влияния их кривизны, а также продольного магнитного поля на сверхальфвеновские течения с ускорением, трансзвуковые относительно быстрого магнитного звука.

Решение двумерных задач о течении зависит, помимо геометрии канала, от двух безразмерных параметров β и H_{z0}, отнесённых к магнитным единицам измерения. В обсуждаемых ниже расчётах они равны $\beta = 0.05$, что соответствует достаточно сильному поперечному магнитному полю и электрическому току, и $H_{z0} = 0.3$ – значению, близкому к верхней границе допустимого для трансзвуковых сверхальфвеновских течений с ускорением интервала значений продольного магнитного поля (в каналах рассмотренной геометрии эта граница ниже, чем в работах [12, 13]).

3.1. Канал с выпуклым центральным электродом

Результаты расчётов представлены двумя основными сериями, отличающимися друг от друга геометрией электродов, образующих канал типа сопла. В первой из них внешний электрод цилиндрический, центральный – выпуклый внутрь (рис. 3):

$$0 < z < 1,\ r_1(z) = 0.55 - (z - 0.5)^2,\ r_2(z) = 0.8$$

Установившееся течение характеризуется, в первую очередь, распределением плотности и электрического тока, которые представлены на рис. 3а,б сплошными линиями уровня $\rho(z,r) = \text{const}$ и $rH_\varphi(z,r) = \text{const}$. Штриховые линии имеют тот же смысл, но в расчётах течений без продольного поля ($H_{z0} = 0$). Здесь легко видеть, что продольное поле отжимает плазму к внешнему электроду и отклоняет линии электрического тока в сторону входа (влево на рис. 3б). Этот результат в более сильной форме повторяет полученный в канале с меньшей кривизной электрода (см. [12, 13]).

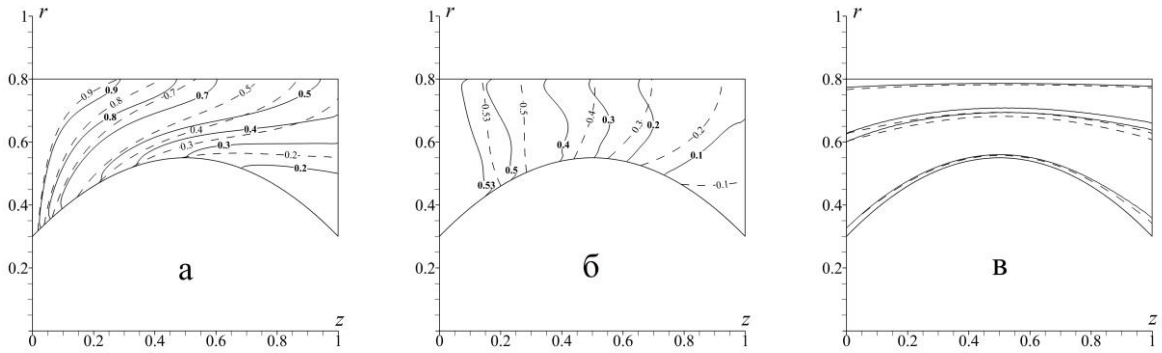

Рис. 3. Распределения плотности (а) и электрического тока (б) и узкие трубки течения (в) в канале с профилированным центральным электродом с продольным магнитным полем (сплошные линии) и без него (штриховые)

На рис. 3в представлены три узкие трубки потока – две приэлектродные и одна в средней части потока. Трубки ограничены траекториями, которые одновременно являются линиями продольного магнитного потока ($\upsilon/u = H_r/H_z$), то есть линиями уровня функций[2]:

$$\xi(z,r) = \int_{r_1}^{r} \rho u r dr \quad \text{или} \quad \psi(z,r) = \int_{r_1}^{r} H_z r dr$$

Эти функции определяются численным интегрированием после установления в расчётах стационарного решения задачи. На чертеже хорошо видно, что средняя трубка даже без продольного поля немного отклоняется от координатных линий $y = \text{const}$, то есть несимметрична относительно минимального сечения канала $z = 0.5$. Этот результат обязан кривизне

[2] Что следует из уравнений $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ и $\nabla \cdot \rho \mathbf{\upsilon} = 0$ в двумерных стационарных течениях.

центрального электрода и течению плазмы в канале слева направо. Продольное магнитное поле усиливает отклонение траекторий в сторону внешнего электрода. В приэлектродных трубках внешние границы совпадают с электродами, непроницаемыми для плазмы и магнитного поля (1.1), (1.5), поэтому не могут отклоняться от них, а внутренние границы, то есть траектории, испытывают те же отклонения, поэтому криволинейная геометрия хотя бы одного электрода влияет на площадь сечения трубки в течениях с поперечным полем, а продольное поле усиливает это влияние.

Выделив полученные узкие трубки, мы имеем возможность проследить более подробно за характеристиками течения в каждой из них. Это удобно сделать в квазиодномерном приближении с помощью первых интегралов (2.2), (2.3) и следующего из них алгебраического уравнения (2.4). Заметим, кстати, что полученные таким образом решения хорошо совпадают с решениями, взятыми непосредственно из расчётов двумерной МГД-задачи. Это говорит в пользу адекватности обеих моделей – двумерной и квазиодномерной.

На рис. 4 представлены графики плотности ρ, напряжённости азимутального магнитного поля H_φ и продольной (вдоль трубки) скорости υ_l в трёх указанных на рис. 3в трубках. Графики, относящиеся к течению с продольным полем (сплошные линии), опять даны в сравнении с полученными в течении без него (штриховые линии).

Рис. 4а относится к верхней (на рис. 3в) трубке, примыкающей к прямому цилиндрическому электроду. Здесь результаты качественно совпадают с полученными ранее в трубке аналогичной геометрии (см. [7]): присутствие продольного магнитного поля повышает плотность плазмы, уменьшает величину тока, выносимого из канала $H_\varphi(1)$, и ослабляет ускорение в осевом направлении. Последнее связано с тем, что часть кинетической энергии тратится на вращательное движение в канале.

Те же графики на рис. 4б,в показывают изменения в распределении тех же величин, связанные с приближением к центральному электроду и соответствующей этому усиливающейся кривизной трубок. Чем меньше средний радиус трубки, тем ниже в ней плотность плазмы, скорость выше, а поперечное магнитное поле и электрический ток сильнее, поскольку поле задано на входе обратно пропорционально радиусу (1.4). Роль продольного поля в целом здесь слабее – сплошные линии ближе к штриховым.

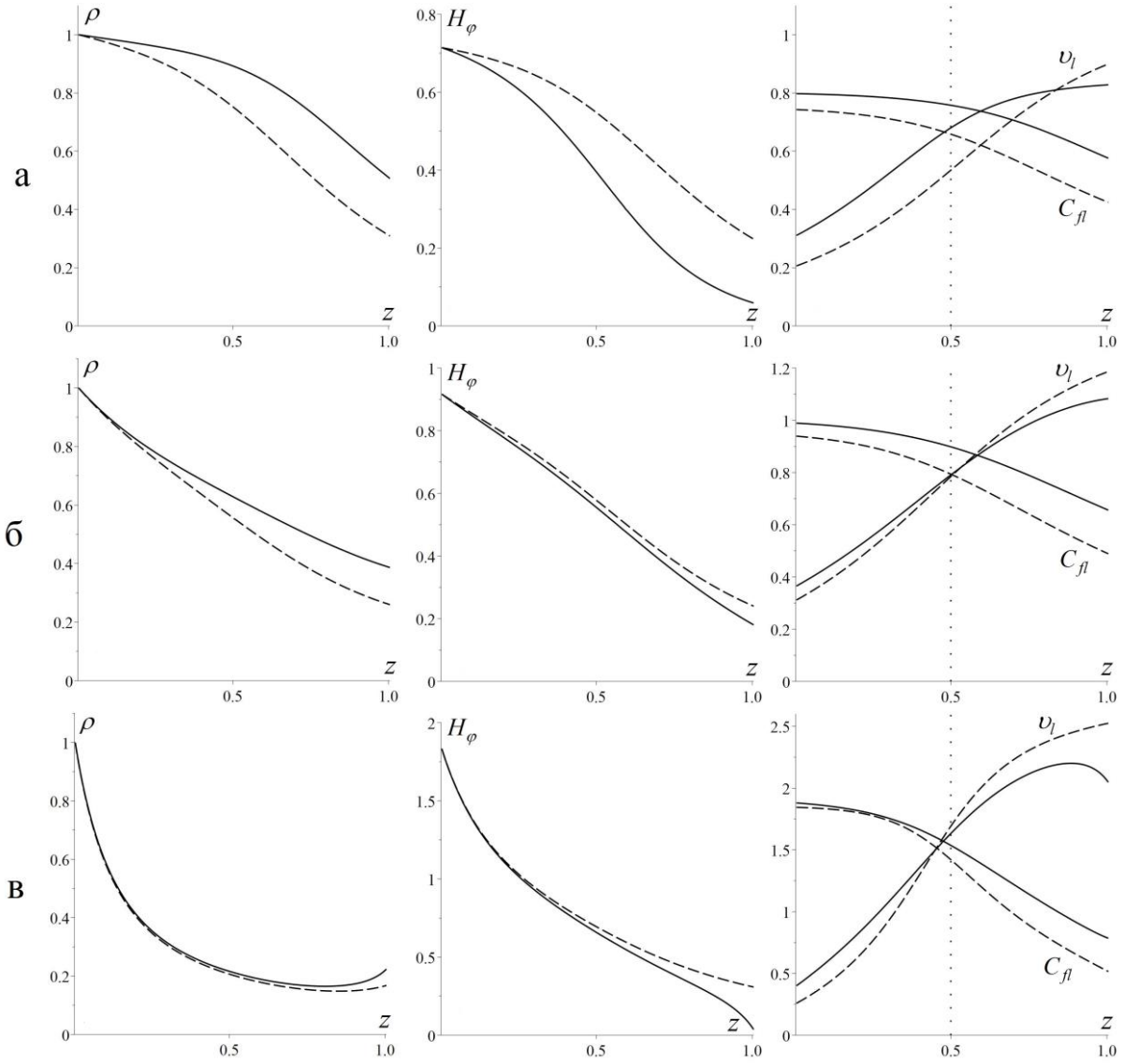

Рис. 4. Распределения плотности, поперечного магнитного поля и скоростей плазмы и быстрого магнитного звука в узких трубках течения у внешнего цилиндрического электрода (а), в середине потока (б), у центрального профилированного электрода (в) в присутствии продольного поля (сплошные линии) и без него (штриховые)

Кривизна трубки и продольное поле заметно влияют на переход скорости плазмы через быструю магнитозвуковую скорость C_{fl}. В верхней трубке, примыкающей к прямому электроду, этот переход происходит в минимальном сечении канала с продольным полем и без него (см. [7]), однако эти сечения находятся правее (ниже по течению) середины канала в результате деформации трубки. В криволинейных трубках рассматриваемой геометрии точка перехода $\upsilon_l = C_{fl}$ смещается влево по мере приближения к оси и роста кривизны. Продольное поле несколько замедляет это смещение, что показано на рис. 4,

где наряду со скоростью υ_l представлены графики скорости звука C_{fl} в течениях с продольным полем и без него. В частности, в трубке у центрального электрода обе точки перехода находятся левее минимального сечения канала.

Наконец, продольное магнитное поле вызывает вращение плазмы вокруг оси z. Скорость вращения $w \equiv \upsilon_\varphi$ возрастает от нуля с ростом z, а вдоль оси r – максимальна у центрального электрода, где азимутальное поле максимально.

3.2. Канал с выпуклым внешним электродом

Вторая серия расчётов отличается от первой геометрией: кривизна траекторий и образуемых ими узких трубок здесь противоположного знака. Выпуклым внутрь, но в сторону оси z теперь является внешний электрод, а внутренний – прямой цилиндрический:

$$0 < z < 1,\ r_1(z) = 0.3,\ r_2(z) = 0.55 + (z - 0.5)^2$$

На рис. 5 представлены форма канала, распределения плотности плазмы и электрического тока, а также типичные трубки течения в стационарном режиме с продольным полем и без него. Их следует сравнить между собой, а также с аналогичной информацией в канале предыдущей геометрии на рис. 3.

Неравномерное распределение плотности по радиусу, замеченное в [13] и на рис. 3а, связано с магнитным давлением, возрастающим в сторону центрального электрода, и несколько усилено продольным магнитным полем. В рассматриваемой геометрии плазма опять прижата к внешнему электроду во входной и центральной частях канала вплоть до того, что её плотность становится здесь немонотонной вдоль траекторий: плотность возрастает до максимального значения, которое выше заданного на входе. Основной причиной этому является кривизна электрода, а продольное поле дополнительно усиливает этот эффект (рис. 5а). Распределение электрического тока в канале на рис. 5б отличается заметным отклонением против часовой стрелки от радиального направления даже в случае течений в поперечном магнитном поле. В присутствии продольного магнитного поля это отклонение усиливается, а ток во входной и центральной частях канала становится более интенсивным: значения функции rH_φ быстрее убывают в осевом направлении.

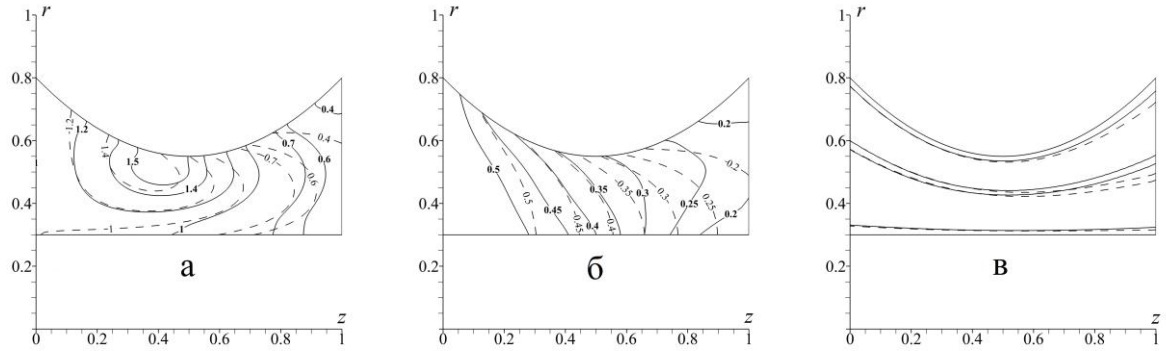

Рис. 5. Распределения плотности (а) и электрического тока (б) и узкие трубки течения (в) в канале с профилированным внешним электродом с продольным магнитным полем (сплошные линии) и без него (штриховые)

Траектории и образованные ими узкие трубки течений в отсутствии продольного поля испытывают в рассматриваемой геометрии тенденции к «распрямлению» в выходной части канала (рис. 5в). Они отклоняются вниз от симметричных относительно минимального сечения $z = 0.5$ линий $y = \text{const}$, полученных линейной интерполяцией между электродами (1.2). Продольное поле влияет на течение противоположным образом, отклоняя траектории, как и в предыдущем случае, в сторону внешнего электрода, то есть стремится отчасти восстановить упомянутую симметрию.

Графики на рис. 6 демонстрируют, как и выше, изменение представленных на них величин вдоль выделенных на рис. 5в узких трубок и их сравнение в течениях с продольным полем и без него. Здесь хорошо видна немонотонность плотности вдоль траектории в верхней и средней трубках. В присутствии продольного поля заметно возрастает плотность и скорость во входной части канала. В трубке вдоль горизонтального электрода продольное поле влияет сравнительно слабо. Место перехода скорости υ_l через магнитозвуковую C_{fl} сильно зависит от кривизны трубки и подвержено здесь противоположной закономерности: в «горизонтальной» нижней трубке оно совпадает с её минимальным сечением, которое слегка смещено вправо от середины канала, а по мере возрастания кривизны заметно смещается влево (в сторону входа), причём сильнее в присутствии продольного поля, чем без него (рис. 6).

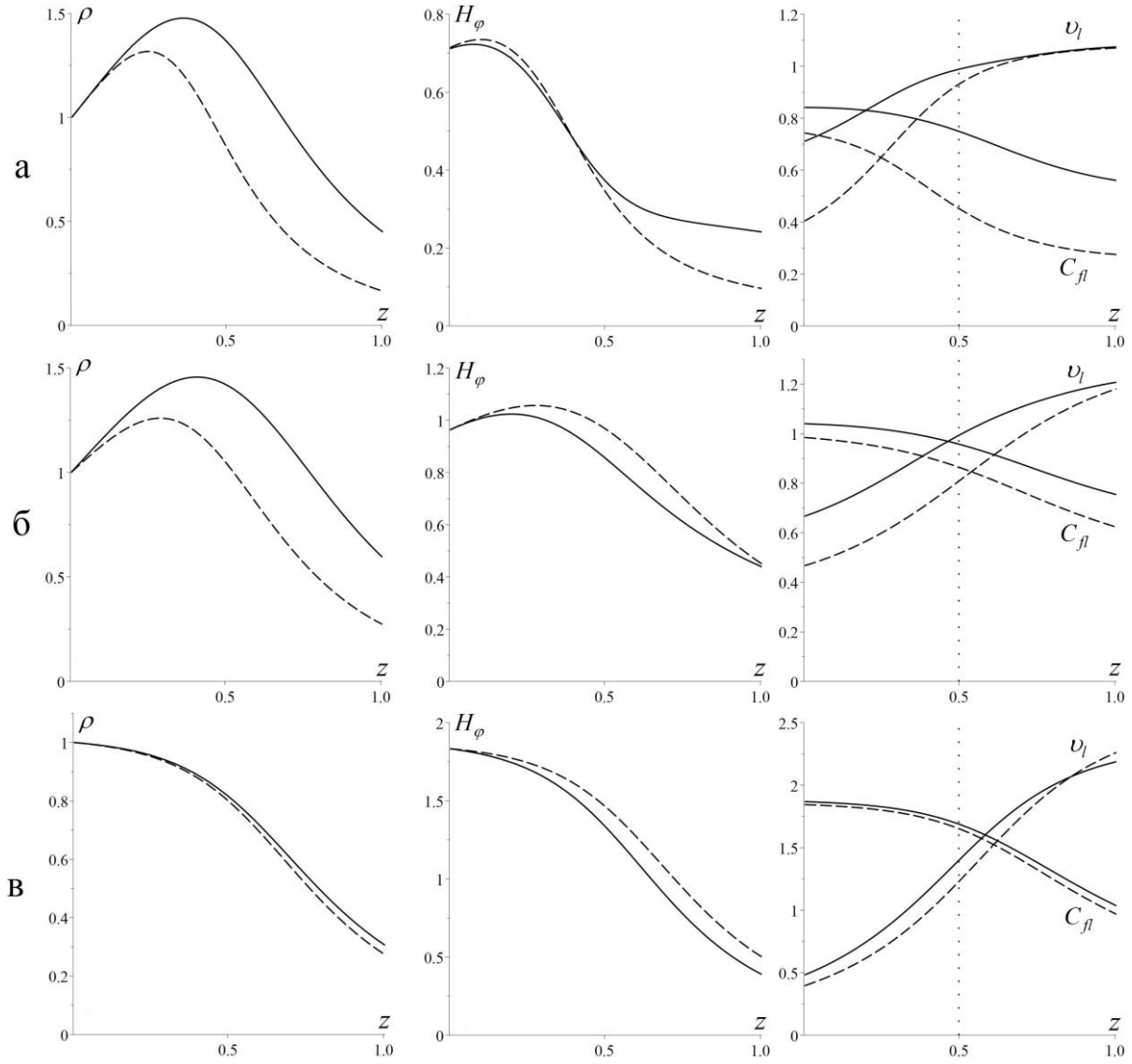

Рис. 6. Распределения плотности, поперечного магнитного поля и скоростей плазмы и быстрого магнитного звука в узких трубках течения у внешнего профилированного электрода (а), в середине потока (б), у центрального цилиндрического электрода (в) в присутствии продольного поля (сплошные линии) и без него (штриховые)

Заключение

Построена двумерная численная модель и проведены расчёты установившихся МГД-течений в каналах между двумя коаксиальными электродами. Исследования сосредоточены на трансзвуковых течениях в плазменных ускорителях, поэтому каналы имеют форму сопла с минимальным поперечным сечением в средней части, и электроды выпуклы внутрь. Чтобы почувствовать влияние кривизны разных знаков, проведены две серии расчётов, в которых выпуклым является каждый из электродов в отдельности, а другой для простоты имеет форму прямого цилиндра. В расчётах получены

распределения плотности и скорости плазмы в канале, а также электрического тока и формируемого им азимутального магнитного поля, которые обеспечивают режим ускорения. Дополнительно исследована зависимость течения от продольного магнитного поля, созданного в канале внешними проводниками с током. Более подробно эти величины представлены в узких трубках вдоль траекторий течения. Их расчёты проведены в квазиодномерном приближении, где уделено внимание кривизне трубок.

Распределения указанных величин в канале и узких трубках, зависящие от кривизны каждого из электродов и от влияния продольного магнитного поля, составляют основной результат изложенной работы.

Список литературы

1. *Морозов А.И.* Физические основы космических электрореактивных двигателей. М.: Атомиздат, 1978. 328 с.
2. *Морозов А.И.* Введение в плазмодинамику. 2е изд. М.: Физматлит, 2008. 616 с.
3. *Морозов А.И.* Принципы коаксиальных стационарных плазменных ускорителей (КСПУ) // Физ. плазмы. 1990. Т. 16. Вып. 2. С. 131-146.
4. *Волков Я.Ф., Кулик Н.В., Маринин Н.В., Морозов А.И., Терешин В.И. и др.* Анализ параметров потока плазмы, генерируемых полноблочным КСПУ Х-50 // Физ. плазмы. 1992. Т. 18. Вып. 11. С. 1392-1402.
5. *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* Стационарные течения плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 3-87.
6. *Брушлинский К.В., Морозов А.И.* Анализ двумерных течений плазмы в каналах // Энциклопедия низкотемпературной плазмы / Под ред. В.Е. Фортова. М.: Янус-К, 2007. Серия Б, Т. IX-2, С. 334-369.
7. *Брушлинский К.В.* Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009. 200 с.
8. *Styopin E.V.* Numerical simulation of near-Alfven MHD flows relaxation with a longitudinal magnetic field // J. Plasma Physics. 2015. V. 81. 905810309. URL: http://doi.org/10.1017/S002237781500001X
9. *Горшенин К.П.* Об особенностях осесимметричных течений плазмы в узкой трубке потока // ПМТФ. 1991. № 5. С 3-10.
10. *Стёпин Е.В.* Стационарные МГД-течения в коаксиальных каналах криволинейной конфигурации // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2015. Т. 4. № 5. С. 407-420. URL: http://doi.org/10.1134/S2304487X15050144

11. *Brushlinskii K.V., Styopin E.V.* On the magnetohydrodynamics flows in curved coaxial channels // J. Phys.: Conf. Ser. 2017. V. 788. 012009. URL: http://doi.org/10.1088/1742-6596/788/1/012009
12. *Брушлинский К.В., Жданова Н.С.* Расчет осесимметричных МГД-течений в канале с внешним продольным магнитным полем // ЖВМ и МФ. 2006. Т. 46. № 3. С. 550-559. URL: http://mi.mathnet.ru/zvmmf510
13. *Брушлинский К.В., Жданова Н.С.* МГД-течения в каналах плазменных ускорителей с продольным магнитным полем // Физ. плазмы. 2008. Т. 34. № 12. С. 1120-1128. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=11633769
14. *Козлов А.Н.* Динамика вращающихся потоков в канале плазменного ускорителя с продольным магнитным полем // Физ. плазмы. 2006. Т. 32. № 5. С. 413-422. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=9221596
15. *Козлов А.Н.* Двухжидкостная магнитогидродинамическая модель течений плазмы в квазистационарном ускорителе с продольным магнитным полем // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 3. С. 44-55. URL: http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=120044&ARTICLE_ID=128323
16. *Козлов А.Н.* Исследование приэлектродных процессов в квазистационарных плазменных ускорителях с непроницаемыми электродами // Физ. плазмы. 2012. Т. 38. № 1. С. 15-25. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=17313597
17. *Oran E., Boris J.P.* Numerical simulation of reactive flow. NY, Amsterdam, London: Elsevier, 1987. 601 p. (Перевод: *Оран Э., Борис Дж.* Численное моделирование реагирующих потоков. М.: Мир, 1990. 660 с.)
18. *Zalesak S.T.* Fully Multidimensional Flux-Corrected Transport Algorithms for Fluids // J. Comput. Phys. 1979. V. 31. P. 335-362. URL:
19. *Брушлинский К.В.* Математические основы вычислительной механики жидкости, газа и плазмы. М.: ИД Интеллект, 2017. 272 с.

Оглавление

Введение 3
1. Постановка задачи. Метод решения 5
2. Квазиодномерное приближение 7
3. Результаты расчётов 10
3.1. Канал с выпуклым центральным электродом 10
3.2. Канал с выпуклым внешним электродом 14
Заключение 16
Список литературы 17