ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 23 за 2017 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Бахвалов П.А., Козубская Т.К.

Схема EBR-WENO для решения задач газовой динамики с разрывами на неструктурированных сетках

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахвалов П.А., Козубская Т.К. Схема EBR-WENO для решения задач газовой динамики с разрывами на неструктурированных сетках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 23. 32 с. doi:10.20948/prepr-2017-23
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-23

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

П. А. Бахвалов, Т. К. Козубская

Схема EBR-WENO для решения задач газовой динамики с разрывами на неструктурированных сетках

Москва — 2017

Бахвалов П. А., Козубская Т. К.

Схема EBR-WENO для решения задач газовой динамики с разрывами на неструктурированных сетках

Для решения уравнений Эйлера с разрывами на неструктурированных сетках предлагается схема EBR-WENO. Она относится к классу рёберно-ориентированных схем с квазиодномерной реконструкцией переменных. Монотонизация осуществляется за счёт взвешивания трёх реконструированных значений исходя из анализаторов гладкости, в соответствии с классической конечно-разностной схемой WENO. Получающаяся таким образом схема при сохранении относительно низкой вычислительной стоимости, присущей EBR-схемам, позволяет подавлять осцилляции на разрывах на неструктурированных сетках. Свойства схемы демонстрируются на тестовых задачах.

Ключевые слова: уравнения Эйлера, разрывное решение, рёберно-ориентированная схема, неструктурированная сетка, схема WENO

Pavel Alexeevisch Bakhvalov, Tatiana Konstantinovna Kozubskaya

EBR-WENO scheme for solving gas dynamics problems with discontinuities on unstructured meshes

We develop EBR-WENO scheme for solving Euler equations on unstructured meshes. It belongs to the class of edge-based schemes with quasi-1D reconstruction of variables. The scheme monotonization is provided by using a convex conbination of three lower-order reconstructions of variables in a similar way as it is in the classical finite-difference WENO scheme. The new scheme damps oscillations near shocks on unstructured meshes and, due to its edge-based nature, requires rather low computational costs. The properties of the new scheme are demonstrated on several test problems.

Key words: Euler equations, discontinuous solution, edge-based scheme, unstructured mesh, WENO scheme

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 15-01-07911.

Введение

Для решения многих задач газовой динамики важно в рамках одного расчёта обеспечить как высокую точность на гладких участках решения, так и корректное разрешение скачков или слабых разрывов. Для решения задач с разрывами в промышленных приложениях хорошо себя зарекомендовала схема Колгана-ван Лира [1] [2]. В ней потоки определяются из решения задачи о распаде разрыва относительно значений, полученных линейной реконструкций физических или консервативных переменных. Наклон, возникающий в этой реконструкции, определяется путём применения функции minmod к разностям вперёд и назад. На декартовой сетке эта схема позволяет избегать паразитных осцилляций за и перед фронтом ударной волны, но обладает чрезмерно большой диссипацией на гладких решениях.

Более эффективным подходом, позволяющим сочетать повышенную точность на гладких решениях с корректной обработкой разрывов, является схема WENO (Weighed essentially non-oscillatory scheme). В ней значения, относительно которых решается задача о распаде разрыва, получаются линейной комбинацией нескольких различным образом реконструированных значений, причём веса этой линейной комбинации определяются интегральными характеристиками соответствующих интерполяционных полиномов. Эта схема была предложена для одномерных задач в [3]; в [4] для неё были предложены новые индикаторы гладкости, а сама схема обобщена на многомерный случай.

В многомерном случае на декартовой сетке возможны две реализации WENO-схемы: конечно-разностная и конечно-объёмная. В конечно-разностной WENO-схеме (FD WENO), предложенной в [4], значения сеточной функции интерпретируются как точечные значения в узлах или центрах ячеек, а производные по сеточным направлениям определяются независимо друг от друга по одномерной WENO-схеме. Этот подход является экономичным, так как сложность вычислений растёт линейно с ростом размерности задачи. Конечно-объёмная WENO-схема (FV WENO) предполагает определение переменных в смысле интегральных средних по сеточному элементу. Для вычисления потока через каждую грань сеточного элемента требуется реконструкция многомерного полинома. В результате конечно-объёмная WENO-схема в нелинейном случае оказывается многократно дороже конечно-разностной. Подробное описание и сравнение конечно-разностного и конечно-объёмного вариантов схемы WENO приведено в [5]. Также эти схемы сравнивались в [6], где конечно-разностная WENO-схема была названа конечно-объёмной WENO-схемой класса A, а схема с многомерной полиномиальной реконструкцией – WENO-схемой класса B.

Хотя конечно-объёмный подход на декартовой сетке многократно дороже конечно-разностного, именно он, благодаря своей универсальной

методологии, имеет естественное обобщение на неструктурированную сетку, как это было сделано для гладкого случая в [7]. Первые применения к неструктурированным сеткам взвешивания полиномов по аналогии с WENO были опубликованы в работах [8] и [9], однако полноценная WENO-схема на неструктурированных сетках была предложена в работе Hu и Shu [10]. Для эффективного применения WENO-схем на неструктурированных сетках понадобились дополнительные исследования конечно-объёмных схем на многомерной декартовой сетке [11], [12], [13]. Дальнейшее развитие и применение ENO и WENO схем на неструктурированных сетках связано с работами [14], [15], [16] и др. Несмотря на множество работ в этом направлении, неустранимым недостатком конечно-объёмных WENO-схем на основе многомерной полиномиальной реконструкции остаётся их дороговизна.

Особым классом конечно-объёмных схем на неструктурированных сетках являются рёберно-ориентированные схемы. Их специфика заключается в том, что они записываются относительно точечных значений искомых функций в сеточных узлах (а не относительно интегральных средних по ячейкам), а значения потоков определяются в серединах рёбер. Рёберно-ориентированные схемы облают существенно более низкой вычислительной стоимостью, чем схемы с многомерной полиномиальной реконструкцией, однако в рамках классического рёберно-ориентированного подхода нельзя построить схему наперёд заданного порядка аппроксимации. Примерами рёберно-ориентированных схем являются «линейная» схема повышенной точности T. Barth [17], метод коррекции потоков (Flux Correction method, FC) [18] [19] [20] [21] [22] [23] и схемы, получившие название схем с квазиодномерной реконструкцией переменных (Edge-Based Reconstruction, EBR) [24] [25] [26] [27] [28] [29].

В схемах с квазиодномерной реконструкцией переменных значения в центре ребра определяются на основе значений в вершинах этого ребра и значений в точках на его продолжении, определяемых линейной интерполяцией. Впервые эта идея была предложена в [24], где с каждой стороны ребра было достроено по одной точке. Позже в [25] было предложено расширить шаблон, взяв дополнительно к точкам на продолжении ребра градиенты в узлах, используемых для интерполяции в эту точку. Такая схема, предназначенная для задач с гладкими решениями, была названа LV5 и NLV5 (в зависимости от типа реконструируемых переменных). Расширение шаблона позволило улучшить диссипативные и дисперсионные свойства схем на неструктурированных сетках. Вместо использования градиентов в [29] была предложена схема SEBR5, в которой на продолжении прямой с каждой стороны ребра достраиваются по две точки, значения в которых также определяются линейной интерполяцией. Упрощённый вариант с одной точкой на продолжении ребра мы будем обозна-

чать через EBR3.

Схемы EBR3 и SEBR5 обладают 3-м или 5-м порядком аппроксимации на трансляционно-симметрических (ТС-) сетках (т. е. инвариантных относительно трансляции на величину любого своего ребра). Симплициальные ТС-сетки могут быть получены только однородным разбиением на симплексы равномерной сетки из параллелограммов или параллелепипедов. На произвольной же неструктурированной сетке EBR-схемы обладают лишь точностью на линейной функции и на практике обычно показывают порядок точности около двух. Высокая точность на ТС-сетках в некотором смысле позволяет сочетать в рамках одной схемы возможность как расчёта на неструктурированных сетках с порядком точности, близким ко второму, так и расчёта с высокой точностью на структурированных сетках.

При решении разрывных задач на неструктурированных сетках схемы очень высокого порядка аппроксимации оказываются неэффективными ввиду того, что они сохраняют свою высокую стоимость, но существующие в настоящий момент способы монотонизании часто не позволяют получить существенный выигрыш по точности в сравнении со схемами второго порядка. В этих условиях использование рёберно-ориентированных схем, на наш взгляд, может представлять особенный интерес. Тем не менее, до настоящего момента их возможности исследованы не в полной мере. Для метода коррекции потоков – одного из подклассов рёберно-ориентированных схем – основные исследования проводились в области неконсервативных схем, что не позволяет напрямую применять их для решения задач с разрывами.

В рёберно-ориентированных схемах с квазиодномерной реконструкцией переменных для решения задач с разрывами естественным образом могут быть использованы ограничители. Шаблон из четырёх точек на одной прямой позволяет записать для определения потоков в серединах рёбер схему повышенной точности со многими известными ограничителями: minmod, superbee и др. В [28] рассматривается использование ограничителей для сохранения неотрицательности плотности и давления. Однако, как уже было сказано, применение ограничителей очень сильно сказывается на точности в подобластях гладкого решения. В предшествующих работах по схемам с квазиодномерной реконструкцией [26] [27] отмечалось, что этого можно избежать путём применения сенсоров, но работа по их реализации и анализу получающихся при этом схем так и не была проведена.

В настоящей работе предлагается другой метод повышенной точности на основе квазиодномерной рёберно-ориентированной реконструкции, а именно, схема EBR-WENO. В этом случае шеститочечный шаблон, существующий по построению в схеме SEBR5, используется для определения потоков в серединах рёбер путём взвешивания трёх различных «реконструирован-

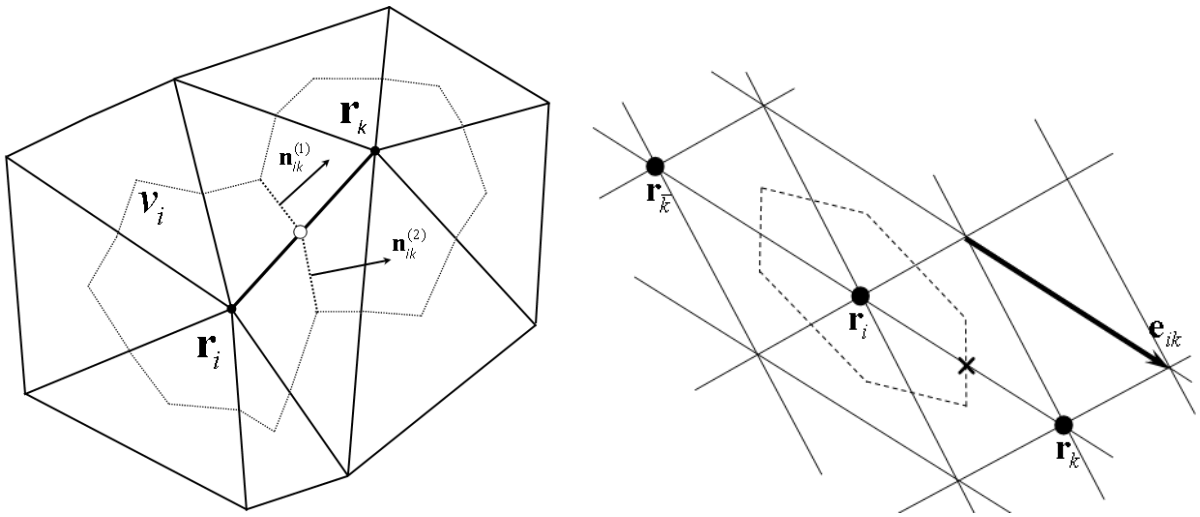

Рис. 1. Барицентрические ячейки, описанные около узлов i и k, и вектора $\boldsymbol{n}_{ik}^{(1)}$, $\boldsymbol{n}_{ik}^{(2)}$, составляющие ориентированную площадь $\boldsymbol{n}_{ik} = \boldsymbol{n}_{ik}^{(1)} + \boldsymbol{n}_{ik}^{(2)}$. Слева: неструктурированная сетка, справа: ТС-сетка

ных» значений, как это делается в конечно-разностной схеме WENO5. Схему EBR-WENO5 можно рассматривать как обобщение конечно-объёмной схемы WENO класса A (см. [6]) на неструктурированную сетку. Она сочетает в себе сравнительно низкую вычислительную стоимость, присущую рёберно-ориентированным схемам, повышенную точность на гладких решениях и ограниченную генерациую осцилляций на разрывах.

Рёберно-ориентированные схемы

Начнём описание рассматриваемого класса разностных схем с уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{a} \cdot \nabla u = 0 \tag{1}$$

с постоянной скоростью $\boldsymbol{a}$.

Рёберно-ориентированные схемы подразумевают разбиение расчётной области на ячейки (контрольные объёмы), каждая из которых содержит ровно один сеточный узел. Значения сеточной функции определяются в узлах сетки. В общем виде рёберно-ориентированные схемы записываются в виде

$$\frac{du_i}{dt} + \frac{1}{v_i} \sum_{k \in N_1(i)} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}_{ik} h_{ik} = 0, \tag{2}$$

где $N_1(i)$ – множество узлов, соединённых ребром с i, $\boldsymbol{n}_{ik}$ – ориентированная площадь, ассоциированная с ребром ik и направленная внутрь ячейки j, v_i – объём ячейки, содержащей узел i. Эти обозначения в двумерном случае проиллюстрированы на рис. 1, где $\boldsymbol{n}_{ik} = \boldsymbol{n}_{ik}^1 + \boldsymbol{n}_{ik}^2$. Консервативность обеспечивается

тождествами $\boldsymbol{n}_{ik} + \boldsymbol{n}_{ki} = 0$ и $h_{ik} = h_{ki}$. Всюду в настоящей работе мы будем предполагать, что используется барицентрический способ построения ячеек, см. [30] или [31].

Значение h_{ik} в середине ребра, фигурирующее в формуле (2), вычисляется с учётом направления характеристики:

$$h_{ik} = \mathrm{h}(u_{ik}, u_{ki}) = \begin{cases} u_{ik}, & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}_{ik} > 0, \\ u_{ki}, & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}_{ik} < 0, \end{cases} = \begin{cases} \mathcal{R}_{ik}(\{u\}), & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}_{ik} > 0, \\ \mathcal{R}_{ki}(\{u\}), & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}_{ik} < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\mathcal{R}_{ik}(\{u\})$ и $\mathcal{R}_{ki}(\{u\})$ – некоторые, в общем случае, нелинейные функции, сопоставляющие сеточной функции u значения в середине ребра.

Рёберно-ориентированные схемы с квазиодномерной реконструкцией переменных

Одним из подходов для определения значений потоков в центрах рёбер с повышенной точностью в рёберно-ориентированных схемах является метод квазиодномерной реконструкции переменных. В нём для определения значения в середине ребра ik проводится прямая, содержащая это ребро. На этой прямой отмечаются четыре или шесть точек. Двумя точками являются вершины самого ребра, обозначим их через $\boldsymbol{r}_{ik}^{(3)} = \boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}_{ik}^{(4)} = \boldsymbol{r}_k$. Помимо них, на продолжении ребра с каждой стороны от него определяется по одной точке ($\boldsymbol{r}_{ik}^{(2)}$ и $\boldsymbol{r}_{ik}^{(5)}$) или по две точки ($\boldsymbol{r}_{ik}^{(1)}$, $\boldsymbol{r}_{ik}^{(2)}$, $\boldsymbol{r}_{ik}^{(5)}$, $\boldsymbol{r}_{ik}^{(6)}$), см. рис. 2. Значения определяются в этих точках линейной интерполяцией. После этого задача определения значения h_{ik} в центре ребра может рассматриваться как задача определения значения потока в полуцелой точке в одномерном случае на неравномерной сетке.

Опишем алгоритм определения точек $\boldsymbol{r}_{ik}^{(1)}$ и $\boldsymbol{r}_{ik}^{(2)}$ и значений в них; точки $\boldsymbol{r}_{ik}^{(5)}$ и $\boldsymbol{r}_{ik}^{(6)}$, лежащие со стороны узла k, и значения в них определяются аналогично.

Разобъём все ячейки на классы соседства с узлом i следующим образом. Пусть $N_1(i)$ состоит из всех узлов, соединённых ребром с i, а $N_2(i)$ – из всех узлов, имеющих общее ребро хотя бы с одним узлом из $N_1(i)$, за вычетом узла i и узлов, входящих в $N_1(i)$. Далее, составим список всевозможных граней (2D – рёбер), все узлы которых принадлежат классу N_m, $m = 1{,}2$. В случае структурированной сетки такие грани образуют две вложенные замкнутые поверхности, внутри которой находится узел i; на неструктурированной сетке возможно образование более сложной фигуры. Среди всех таких граней определим ту, которая пересекает луч реконструкции, выпущенный из $\boldsymbol{r}_i$ в направлении $\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_k$. Если таких граней оказывается несколько, выберем такую из них, для которой найденная точка пересечения лежит дальше всего от $\boldsymbol{r}_i$. Эту точку пересечения мы и возьмём в качестве точки одномерного шаблона $\boldsymbol{r}_{ik}^{(3-m)}$, а значение $u_{ik}^{(3-m)}$

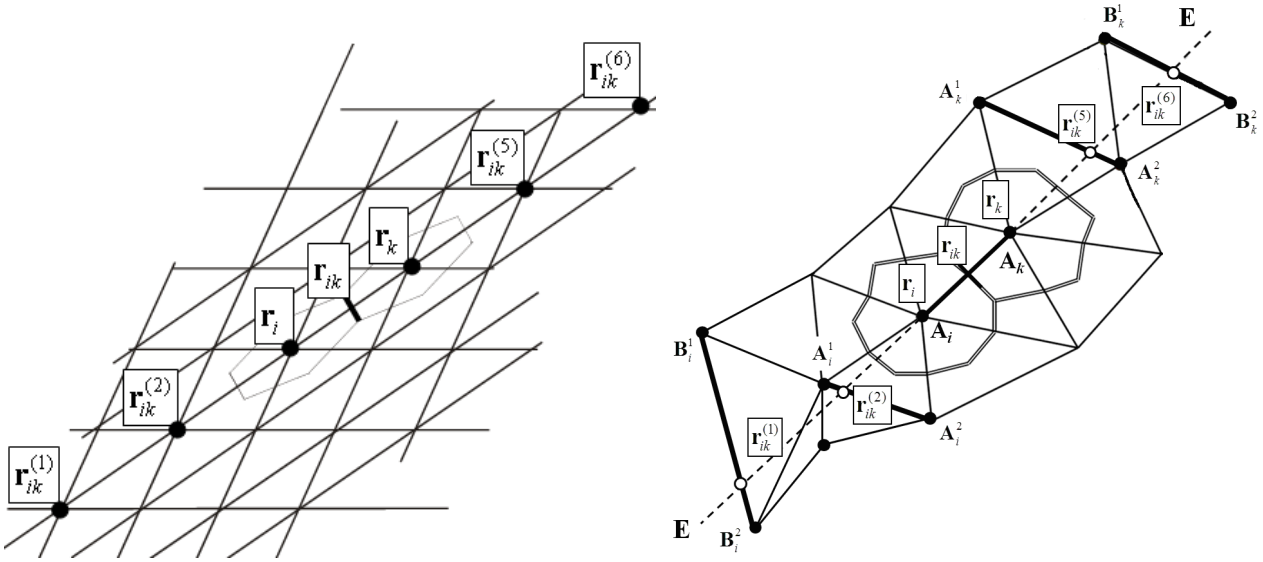

Рис. 2. Шаблон для определения значения u_{ik} в рёберно-ориентированных схемах с квазиодномерной реконструкцией: слева – на ТС-сетке, справа – на неструктурированной сетке

определим линейной интерполяцией по найденной грани. Таким образом получается одномерный четырёх- или шеститочечный шаблон с неравномерным шагом. Более подробно этот алгоритм описан в [29]. Если сетка трансляционно-симметрическая, то узлы одномерного шаблона совпадают с сеточными узлами, и интерполяция не требуется (см. рис. 2 слева).

Введём обозначение для разделённых разностей.

$$\Delta_{ik}^{(m+1/2)} = \frac{u_{ik}^{(m+1)} - u_{ik}^{(m)}}{\left|\boldsymbol{r}_{ik}^{(m+1)} - \boldsymbol{r}_{ik}^{(m)}\right|}, \quad m = 1, \ldots, 5. \tag{4}$$

В настоящей работе рассматриваются рёберно-ориентированные схемы, в которых оператор реконструкции имеет вид

$$\mathcal{R}_{ik}(\{u\}) = u_i + \frac{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|}{2} \sum_m \beta_m \Delta_{ik}^{(m)},$$

где $\sum \beta_m = 1$. Такой подход обеспечивает точность значения потока в центре ребра на линейной функции. Как следствие, благодаря использованию медианных контрольных объёмов, градиент в узле, посчитанный по рёберно-ориентированной схеме в целом, тоже точен на линейной функции. Доказательство этого факта см., например, в [31].

Выбор коэффициентов β определяет конкретную рёберно-ориентированную схему с квазиодномерной реконструкцией переменных.

Квазиодномерные реконструкции

Линейная реконструкция. Схемы EBR3 и SEBR5. В схемах EBR3 и SEBR5 [29] коэффициенты β не зависят от решения, в результате чего оператор реконструкции является линейным. Также коэффициенты β не зависят от сетки.

Коэффициенты β в схеме EBR3 находятся из условия, чтобы в одномерном случае (при положительной скорости переноса) на равномерной сетке схема вырождалась в 4-точечную направленную разность:

$$hu'(x_i) = \frac{1}{6}u_{i-2} - u_{i-1} + \frac{1}{2}u_i + \frac{1}{3}u_{i+1} =$$

$$= \left[u_i + \frac{h}{2}\left(\frac{2}{3}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} + \frac{1}{3}\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)\right] - \left[u_{i-1} + \frac{h}{2}\left(\frac{2}{3}\frac{u_i-u_{i-1}}{h} + \frac{1}{3}\frac{u_{i-1}-u_{i-2}}{h}\right)\right].$$

Отсюда получаются коэффициенты $\beta_{5/2} = 1/3$, $\beta_{7/2} = 2/3$. Таким образом, оператор реконструкции схемы EBR3 имеет вид

$$\mathcal{R}_{ik}^{\text{EBR3}}(\{u\}) = u_i + \frac{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|}{2}\left(\frac{1}{3}\frac{u_i - u_{ik}^{(2)}}{\left|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{ik}^{(2)}\right|} + \frac{2}{3}\frac{u_k - u_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|}\right). \tag{5}$$

В схеме SEBR5 коэффициенты β находятся из условия вырождения в 6-точечную направленную разность:

$$hu'(x_i) = -\frac{1}{30}u_{i-3} + \frac{1}{4}u_{i-2} - u_{i-1} + \frac{1}{3}u_i + \frac{1}{2}u_{i+1} - \frac{1}{20}u_{i+2}.$$

Отсюда получаются коэффициенты $\beta_{3/2} = -1/15$, $\beta_{5/2} = 11/30$, $\beta_{7/2} = 4/5$, $\beta_{9/2} = -1/10$. Таким образом, оператор реконструкции схемы SEBR5 имеет вид

$$\mathcal{R}_{ik}^{\text{SEBR5}}(\{u\}) = u_i + \frac{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|}{2}\left(-\frac{1}{15}\frac{u_{ik}^{(2)} - u_{ik}^{(1)}}{\left|\boldsymbol{r}_{ik}^{(2)} - \boldsymbol{r}_{ik}^{(1)}\right|} + \frac{11}{30}\frac{u_i - u_{ik}^{(2)}}{\left|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{ik}^{(2)}\right|} + \right.$$
$$\left. + \frac{4}{5}\frac{u_k - u_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|} - \frac{1}{10}\frac{u_{ik}^{(5)} - u_k}{\left|\boldsymbol{r}_{ik}^{(5)} - \boldsymbol{r}_k\right|}\right) \tag{6}$$

На трансляционно-симметрических сетках схемы EBR3 (2), (3), (5) и SEBR5 (2), (3), (6) обладают соответственно третьим и пятым порядком аппроксимации, в том числе при любом однородном способе построения контрольных объёмов [29].

Реконструкции с ограничителями. Схема EBR-minmod. Равно как и в одномерном случае, можно построить схему с квазиодномерной реконструкцией путём применения ограничителя к двум разделённым разностям [28]:

$$\mathcal{R}_{ik}^{\mathrm{EBR}-<\phi>}(\{u\}) = u_i + \frac{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|}{2}\phi(\Delta_{ik}^{(5/2)}, \Delta_{ik}^{(7/2)}), \tag{7}$$

где $\phi(\Delta_{ik}^{(5/2)}, \Delta_{ik}^{(7/2)})$ – некоторый ограничитель. Простейшим ограничителем является ограничитель minmod:

$$\mathrm{minmod}(\Delta_{ik}^{(5/2)}, \Delta_{ik}^{(7/2)}) = \begin{cases} \mathrm{sign}(\Delta_{ik}^{(7/2)})\min\{\Delta_{ik}^{(5/2)}, \Delta_{ik}^{(7/2)}\}, & \Delta_{ik}^{(7/2)}\Delta_{ik}^{(5/2)} > 0 \\ 0, & \Delta_{ik}^{(7/2)}\Delta_{ik}^{(5/2)} \leqslant 0 \end{cases} \tag{8}$$

WENO-реконструкция. Схема EBR-WENO. В одномерном случае на равномерной сетке конечно-разностная реконструкция WENO [5] для характеристик, направленных вправо, записывается следующей цепочкой формул:

$$\beta_0 = \frac{13}{12}\left(u_i - 2u_{i+1} + u_{i+2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(3u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}\right)^2;$$

$$\beta_1 = \frac{13}{12}\left(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(u_{i-1} - u_{i+1}\right)^2;$$

$$\beta_2 = \frac{13}{12}\left(u_{i-2} - 2u_{i-1} + u_i\right)^2 + \frac{1}{4}\left(u_{i-2} - 4u_{i-1} + 3u_i\right)^2;$$

$$u_{i+1/2-0}^{(0)} = -\frac{1}{6}u_{i+2} + \frac{5}{6}u_{i+1} + \frac{1}{3}u_i;$$

$$u_{i+1/2-0}^{(1)} = \frac{1}{3}u_{i+1} + \frac{5}{6}u_i - \frac{1}{6}u_{i-1};$$

$$u_{i+1/2-0}^{(2)} = \frac{11}{6}u_i - \frac{7}{6}u_{i-1} + \frac{1}{3}u_{i-2};$$

$$d_0 = \frac{3}{10}, \quad d_1 = \frac{3}{5}, \quad d_2 = \frac{1}{10};$$

$$\alpha_s = \frac{d_s}{(\epsilon + \beta_s)^2}, \quad s = 0,1,2, \quad \epsilon = 10^{-40};$$

$$\omega_s = \frac{\alpha_s}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \quad s = 0,1,2;$$

$$u_{i+1/2-0} = \mathcal{R}_{i,i+1}(\{u\}) = \omega_0 u_{i+1/2-0}^{(0)} + \omega_1 u_{i+1/2-0}^{(1)} + \omega_2 u_{i+1/2-0}^{(2)}.$$

Выражения для $u_{i-1/2-0}$ и $u_{i\pm1/2+0}$ записываются аналогично.

Оператор реконструкции для схемы EBR-WENO5 получается в результате переписывания этих выражений через разделённые разности:

$$\beta_0 = \frac{13}{12}\left(\Delta_{ik}^{(9/2)} - \Delta_{ik}^{(7/2)}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\Delta_{ik}^{(9/2)} - 3\Delta_{ik}^{(7/2)}\right)^2;$$

$$\beta_1 = \frac{13}{12}\left(\Delta_{ik}^{(7/2)} - \Delta_{ik}^{(5/2)}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\Delta_{ik}^{(7/2)} + \Delta_{ik}^{(5/2)}\right)^2;$$

$$\beta_2 = \frac{13}{12}\left(\Delta_{ik}^{(5/2)} - \Delta_{ik}^{(3/2)}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(3\Delta_{ik}^{(5/2)} - \Delta_{ik}^{(3/2)}\right)^2;$$

$$\delta^{(0)} = -\frac{1}{6}\Delta_{ik}^{(9/2)} + \frac{2}{3}\Delta_{ik}^{(7/2)};$$

$$\delta^{(1)} = \frac{1}{3}\Delta_{ik}^{(7/2)} + \frac{1}{6}\Delta_{ik}^{(5/2)};$$

$$\delta^{(2)} = \frac{5}{6}\Delta_{ik}^{(5/2)} - \frac{1}{3}\Delta_{ik}^{(3/2)};$$

$$d_0 = \frac{3}{10}, \quad d_1 = \frac{3}{5}, \quad d_2 = \frac{1}{10};$$

$$\alpha_s = \frac{d_s}{(\epsilon + \beta_s)^2}, \quad k = 0{,}1{,}2, \quad \epsilon = 10^{-40};$$

$$\omega_s = \frac{\alpha_s}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \quad k = 0{,}1{,}2;$$

$$\mathcal{R}_{ik}^{\text{WENO5}}(\{u\}) = u_i + \omega_0\delta^{(0)} + \omega_1\delta^{(1)} + \omega_2\delta^{(2)}. \tag{9}$$

Также будем рассматривать модификацию WENO-Z с параметром $q = 2$ [32], в которой коэффициенты α_s определяются формулой

$$\alpha_s = d_s\left(1 + \frac{(\beta_0 - \beta_2)^2}{(\epsilon + \beta_s)^2}\right), \quad s = 0{,}1{,}2.$$

Обобщение на уравнения Эйлера

Рассмотрим систему уравнений Эйлера для идеального газа

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\boldsymbol{Q}) = 0, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{Q} = (\rho, \rho\boldsymbol{u}, E)^T$ и

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \rho\boldsymbol{u} \\ \rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} + p\boldsymbol{I} \\ (E + p)\boldsymbol{u} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Здесь $E = \rho \boldsymbol{u}^2/2 + p/(\gamma - 1)$, γ – показатель адиабаты.

Для систем вида (10) общий вид рёберно-ориентированной схемы (см. (2)) может быть записан в виде

$$[\nabla \cdot \mathcal{F}(\boldsymbol{Q})]_i = \frac{1}{v_i} \sum_{k \in N_1(i)} |\boldsymbol{n}_{ik}| \boldsymbol{h}_{ik}.$$

Обозначим единичный вектор по направлению ориентированной площади, ассоциированной с ребром ik, через $\tilde{\boldsymbol{n}}_{ik} = \boldsymbol{n}_{ik}/|\boldsymbol{n}_{ik}|$. Определим $\boldsymbol{Q}_{ik}^{\mathrm{Roe}}$ – среднее по Роу в центре ребра, посчитанное по значениям $\boldsymbol{Q}_i$ и $\boldsymbol{Q}_k$. Введём матрицы собственных векторов $\boldsymbol{S}_{ik} = \boldsymbol{S}_{ki}$ и $\boldsymbol{S}_{ik}^{-1} = \boldsymbol{S}_{ki}^{-1}$ и диагональную матрицу $\boldsymbol{\Lambda}_{ik} = -\boldsymbol{\Lambda}_{ki}$, составленную из собственных значений, равенством

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}_{ik}^{\mathrm{Roe}}) = \frac{d\mathcal{F} \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}_{ik}}{d\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{Q}_{ik}^{\mathrm{Roe}}) = \boldsymbol{S}_{ik} \boldsymbol{\Lambda}_{ik} \boldsymbol{S}_{ik}^{-1}.$$

Вид матриц $\boldsymbol{S}_{ik}$ и $\boldsymbol{S}_{ik}^{-1}$ приведён в приложении.

Нелинейность функции $\mathcal{F}$ по $\boldsymbol{Q}$ позволяет определить несколько вариантов реконструкции, различающихся типами реконструируемых переменных.

«MUSCL»: численный поток на основе реконструкции консервативных переменных.

$$\boldsymbol{h}_{ik} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{Q}_{ik}, \boldsymbol{Q}_{ki}) = \boldsymbol{h}(\mathcal{R}_{ik}(\{\boldsymbol{Q}\}), \mathcal{R}_{ki}(\{\boldsymbol{Q}\})), \tag{12}$$

где $\boldsymbol{h}$ – одна из схем для решения задачи о распаде разрыва (схема Годунова, схема Роу, схема Лакса-Фридрихса, HLLE, HLLC и т. д.). Например, при использовании схемы Роу выражение для потока приобретает вид

$$\boldsymbol{h}_{ik} = \frac{\boldsymbol{F}(\mathcal{R}_{ik}(\{\boldsymbol{Q}\})) \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}_{ik} + \boldsymbol{F}(\mathcal{R}_{ki}(\{\boldsymbol{Q}\})) \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}_{ik}}{2} - \frac{1}{2} \boldsymbol{S}_{ik} |\boldsymbol{\Lambda}_{ik}| \boldsymbol{S}_{ik}^{-1} (\mathcal{R}_{ki}(\{\boldsymbol{Q}\}) - \mathcal{R}_{ik}(\{\boldsymbol{Q}\})).$$

Такой подход ограничивает точность схемы вторым порядком.

«HYBRID»: численный поток на основе одновременной реконструкции консервативных и потоковых переменных с последующим применением схемы Роу или Лакса-Фридрихса.

$$\boldsymbol{h}_{ik} = \frac{\mathcal{R}_{ik}(\{\mathcal{F} \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}_{ik}\}) + \mathcal{R}_{ki}(\{\mathcal{F} \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}_{ik}\})}{2} - \frac{1}{2} \boldsymbol{S}_{ik} |\boldsymbol{\Lambda}_{ik}| \boldsymbol{S}_{ik}^{-1} (\mathcal{R}_{ki}(\{\boldsymbol{Q}\}) - \mathcal{R}_{ik}(\{\boldsymbol{Q}\})). \tag{13}$$

Такой подход позволяет в нелинейных задачах сохранить тот порядок аппроксимации, который был и в линейном случае. При использовании схемы Лакса-Фридрихса следует заменить $|\boldsymbol{\Lambda}_{ik}|$ в (13) на максимальный модуль

элемента этой матрицы, умноженный на единичную матрицу.

«CH»: численный поток на основе реконструкции характеристических переменных.

$$\boldsymbol{h}_{ik} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{Q}_{ik}, \boldsymbol{Q}_{ki}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{S}_{ik}\mathcal{R}_{ik}(\{\boldsymbol{S}_{ik}^{-1}\boldsymbol{Q}\}), \boldsymbol{S}_{ik}\mathcal{R}_{ki}(\{\boldsymbol{S}_{ik}^{-1}\boldsymbol{Q}\})), \tag{14}$$

В случае, если оператор реконструкции $\mathcal{R}$ линейный, формулы (14) и (12) совпадают.

Отметим, что при использовании схемы Роу в (14) нужно использовать значения $\boldsymbol{Q}_{ij}^{\mathrm{Roe}}$, вычисленные по значениям $\boldsymbol{Q}_i$ и $\boldsymbol{Q}_k$, и нельзя их перевычислять усреднением $\boldsymbol{Q}_{ik}$ и $\boldsymbol{Q}_{ki}$.

«FS»: численный поток на основе реконструкции расщеплённых характеристических потоков. Определим расщеплённые потоки в сеточных узлах формулой

$$\boldsymbol{f}_m^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{S}_{ik}^{-1}\mathcal{F}(\boldsymbol{Q}_m)\cdot\tilde{\boldsymbol{n}}_{ik} \pm |\boldsymbol{\Lambda}_{ik}|\ \boldsymbol{S}_{ik}^{-1}\boldsymbol{Q}_m\right), \tag{15}$$

если используется расщепление Роу, или формулой

$$\boldsymbol{f}_m^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{S}_{ik}^{-1}\mathcal{F}(\boldsymbol{Q}_m)\cdot\tilde{\boldsymbol{n}}_{ik} \pm |\lambda_{ik}^{\max}|\ \boldsymbol{S}_{ik}^{-1}\boldsymbol{Q}_m\right),$$

если используется расщепление Лакса-Фридрихса. Потоки определяются формулой

$$\boldsymbol{F}_{ik} = \boldsymbol{S}_{ik}(\mathcal{R}_{ik}(\{\boldsymbol{f}^+\}) + \mathcal{R}_{ki}(\{\boldsymbol{f}^-\})). \tag{16}$$

В случае, если оператор реконструкции линейный, формулы (15), (16) совпадают с (13).

Граничные условия

Для конечно-объёмных схем на широком шаблоне вопрос о граничных условий распадается на два: вычисление собственно граничных потоков и вычисление потоков в приграничной области, где удаётся определить шаблон описанным выше образом.

На входных и выходных границах расчётной области задание граничных условий представляет собой отдельный вопрос, общий для всех конечно-объёмных и многих других численных методов. Некоторые примеры граничных условий см. в [33]. Поскольку локальность граничных условий вносит существенную погрешность в решение, точность численной схемы вблизи них не важна. Поэтому на рёбрах, хотя бы один из узлов которого лежит на входной или выходной границе, полагается $\mathcal{R}_{ik}(\{u\}) = u_i$.

Рассмотрим теперь граничные условия непротекания: $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$. Потоки через грани контрольного объёма узла i, помеченные условием непротекания, вычисляются по формуле $\boldsymbol{h} = (0, p_i \boldsymbol{n}, 0)^T$, где p_i – давление в соответствующем узле [24]. Более точный алгоритм, обеспечивающий точность на линейной функции, предполагает осреднение с учётом соседних ячеек (см., например, [34]), однако улучшения качества счёта при его использовании нами на практике замечено не было.

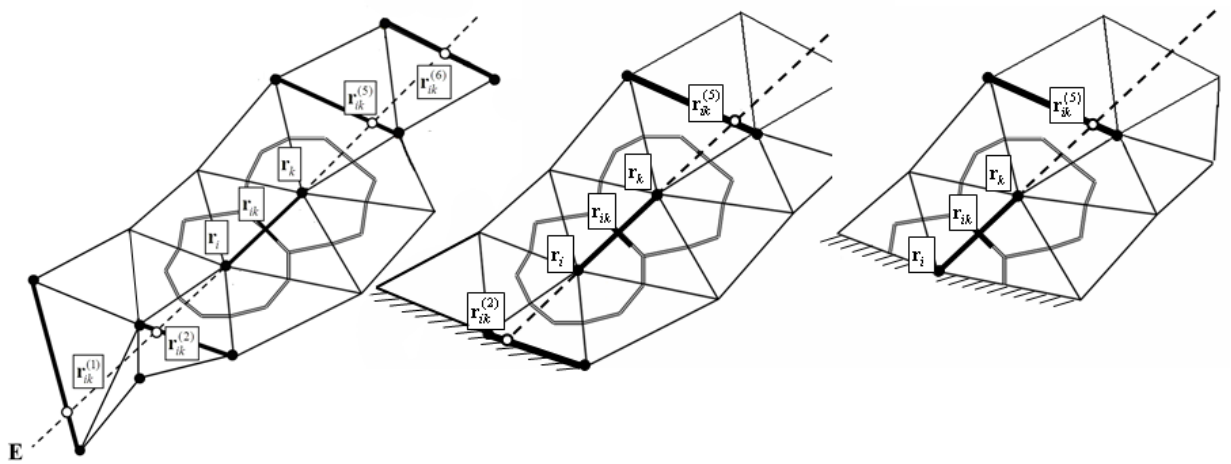

Рис. 3. Квазиодномерные шаблоны вблизи границ. Слева: полный 6-точечный, по центру: 4-точечный, справа: 3-точечный

Говоря о реконструкции на недостаточном шаблоне, мы предполагаем, что вблизи границ достаточно сохранения точности на линейной функции. Таким образом, если не удаётся определить точку $\boldsymbol{r}_{ik}^{(1)}$ или $\boldsymbol{r}_{ik}^{(6)}$, то мы используем реконструкцию $\mathcal{R}_{ik}^{\mathrm{WENO3}}$ или $\mathcal{R}_{ik}^{\mathrm{minmod}}$ (7–8) для задач с разрывными решениями и $\mathcal{R}_{ik}^{\mathrm{EBR3}}$ (5) в гладком случае, см. рис. 3 в центре. Однако переключение на 3-точечную реконструкцию не снимает вопроса о том, как вычислять потоки вдоль рёбер, если узел i является граничным и не определена точка $\boldsymbol{r}_{ik}^{(2)}$. В этом случае мы полагаем $\mathcal{R}_{ik}(\{u\}) = (u_i + u_k)/2$, но при этом для определения $\mathcal{R}_{ki}$, если это возможно, пользуемся реконструкциями $\mathcal{R}_{ik}^{\mathrm{WENO3}}$, $\mathcal{R}_{ik}^{\mathrm{minmod}}$ или $\mathcal{R}_{ik}^{\mathrm{EBR3}}$ соответственно, см. рис. 3 справа. Для большей надёжности мы в этом случае для решения задачи о распаде разрыва используем схему Лакса-Фридрихса (или, в случае использования реконструкции потоков, – соответствующее расщепление), даже если в остальной области для этого используется другая схема или другое расщепление.

Искусственная вязкость

В дополнение к монотонизации, заложенной в реконструкции $\mathcal{R}^{\text{WENO}}$, для лучшего подавления осцилляций можно использовать метод Тагировой и Родионова [35]. Он заключается во введении искусственной вязкости, имеющей форму обычной молекулярной вязкости. Это позволяет вместо уравнений Эйлера решать уравнение Навье-Стокса, в котором роль коэффициента молекулярной вязкости играет величина искусственной вязкости. Дискретизация вязких потоков в уравнении Навье-Стокса при этом производится методом Галёркина с линейными базисными функциями.

Коэффициент искусственной вязкости вычисляется по формуле

$$\mu_{AV} = \begin{cases} -k_1 \rho l^2 (\text{div}\boldsymbol{u} + k_2 a/l), & \text{div}\boldsymbol{u} + k_2 a/l < 0 \\ 0, & \text{div}\boldsymbol{u} + k_2 a/l \geqslant 0 \end{cases}, \tag{17}$$

где l – максимальная высота сеточного треугольника или тетраэдра, $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$ – скорость звука. В соответствии с рекомендациями, данными в [35], коэффициенты приняты равными $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.02$.

Тестирование

Линейная акустика. Начнём с задач с гладкими решениями и рассмотрим влияние монотонизации методом WENO на точность получающихся решений. Рассмотрим линеаризованные уравнения Эйлера на постоянном фоновом поле $\bar{\rho} = 1, \bar{\boldsymbol{u}} = 0, \bar{p} = 1/\gamma$. Начальные данные зададим в виде бесконечной решётки импульсов: $\rho'(\boldsymbol{r})|_{t=0} = p(\boldsymbol{r})|_{t=0} = f(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{u}'|_{t=0} = 0$, где

$$f(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{ijk} A \exp\left(-\ln 2 \left(\frac{\boldsymbol{r} - L(i\boldsymbol{e}_x + j\boldsymbol{e}_y + k\boldsymbol{e}_z)}{b} \right)^2 \right),$$

$A = 1/2$, $b = 6$, $L = 12.5$, а $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ и $\boldsymbol{e}_z$ – единичные векторы по соответствующим направлениям. $p_{ijk} = 1$, если $(i+j+k)$ – чётное, и $p_{ijk} = 0$, если $(i+j+k)$ – нечётное. Расчёт проводится в кубе с длиной ребра $2L = 25$ с периодическими граничными условиями по всем направлениям. Результаты расчёта сравниваются с точным решением на время $T = 20$.

Рассматриваются два вида сеток: трансляционно-симметрическая, полученная однородным разбиением кубов на 6 тетраэдров, и неструктурированная тетраэдральная, построенная сеточным генератором Gambit. Для сравнения также были проведены расчёты по обычным конечно-разностным схемам на декартовой сетке.

Для интегрирования по времени была использована 5-шаговая линейная схема Рунге-Кутты. Проводилась реконструкция характеристических перемен-

ных (в силу линейности $\mathcal{F}(\boldsymbol{Q})$ реконструкция характеристических расщеплённых потоков дала бы тот же результат). Ошибка по плотности, взятая в норме L_∞, сведена на рис. 4.

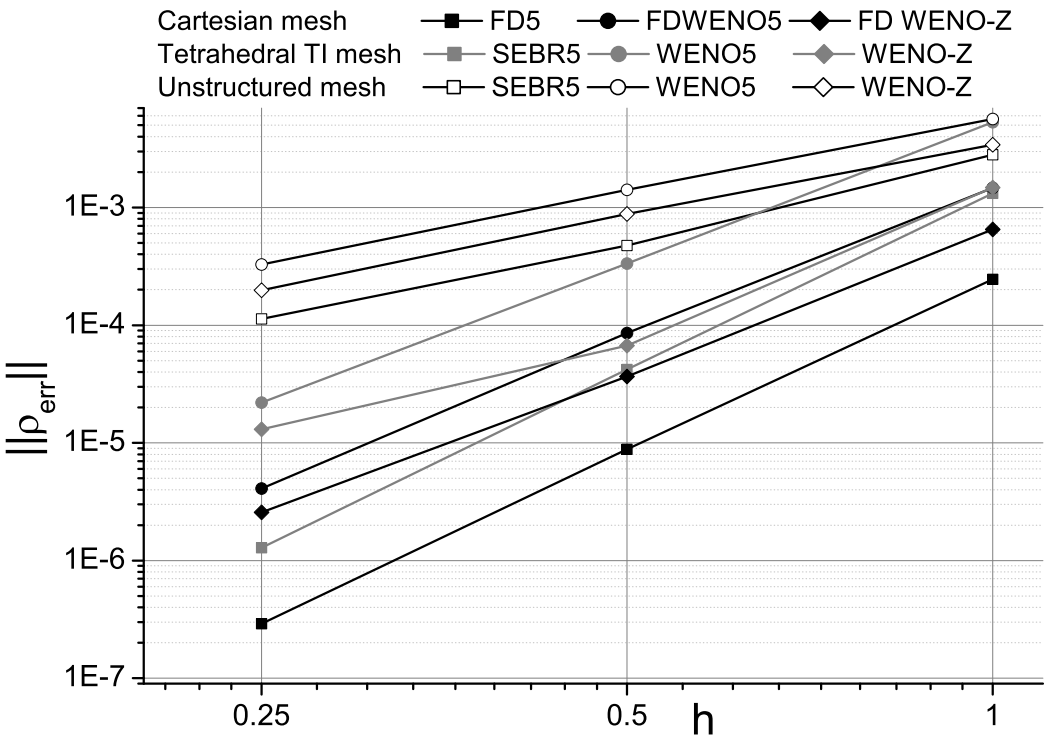

Рис. 4. Сходимость численного решения линейной задачи к точному решению при использовании схемы SEBR5 и её монотонизированных вариантов EBR-WENO5 и EBR-WENO-Z

Рис. 4 подтверждает, что на тетраэдральной трансляционно-симметрической (translationally-invariant, TI) сетке схемы SEBR5, EBR-WENO5 и EBR-WENOZ обладают теми же порядками точности, что и их классические конечно-разностные аналоги. Схема SEBR5 обладает 5-м порядком точности, а схемы EBR-WENO5 и EBR-WENO-Z показывают порядки точности между 3 и 5. Повышенная диссипация на ТС-сетке в сравнении с конечно-разностной схемой объясняется тем, что часть разностей на ТС-сетке берётся вдоль направлений, шаг по которым больше: он равен $h\sqrt{2}$ для диагоналей граней и $h\sqrt{3}$ для диагоналей кубов.

Сравнивая между собой схему SEBR5 и её монотонизированные аналоги, можно заключить, что на ТС-сетках монотонизация ухудшает точность схемы в той же мере, как это происходит в конечно-разностной WENO-схеме, а на неструктурированной сетке ухудшение точности в результате применения монотонизации является незначительным.

Одномерные задачи с разрывными решениями в трёхмерной постановке. Теперь изучим поведение схемы EBR-WENO5 на задачах с разрывными решениями на трёхмерной изотропной неструктурированной сетке. Рассматриваемые в настоящем разделе задачи имеют одномерное решение, но решабтся в рамках трёхмерных уравнений Эйлера. Сетки получены генератором Gambit. Для интегрирования по времени используется схема Рунге-Кутты 3-го порядка [36].

Начнём с движущейся ударной волны. Пусть показатель адиабаты равен $\gamma = 1.4$. Положим начальные данные следующим образом:

$$\boldsymbol{Q}|_{t=0} = \begin{cases} \boldsymbol{Q}_L, & x < 5, \\ \boldsymbol{Q}_R, & x \geqslant 5, \end{cases}$$

где $\rho_L = 54/29$, $u_L = 25/36$, $p_L = 295/168$, $\rho_R = 1$, $u_R = 0$, $p_R = 5/7$, $v_L = w_L = v_R = w_R = 0$. Точным решением этой задачи являющаяся ударная волна, движущаяся со скоростью $D = 1.5$. Расчёт будем проводить на неструктурированных трёхмерных сетках в области 160x12x12 с характерной длиной ребра $h = 1$ до времени $T_{\max} = 100$.

Поскольку перед фронтом ударной волны ни одна из схем не даёт осцилляций, приведём результаты за фронтом. Результаты, полученные с использованием схемы Роу, сведены на рис. 5, а полученные с использованием схемы Лакса-Фридрихса – на рис. 6. Из рисунков видно, что осцилляции почти не зависят от типа реконструкции (характеристических переменных – CH или характеристических расщеплённых потоков – FS). Схема Лакса-Фридрихса, будучи более диссипативной, обеспечивает существенно меньший объём осцилляций за фронтом ударной волны. Говоря же о реконструкции, можно заметить, что наибольшие осцилляции даёт схема EBR-WENO5, поскольку она наименее диссипативна из всех рассматриваемых схем.

Отметим, что в приведённые результаты очень сильно зависят от сетки. Например, картины осцилляций получаются другими, если полученную сетку измельчить вдвое однородным образом.

В одномерном случае конечно-разностная схема с ограничителем minmod не допускает осцилляций за фронтом ударной волны, а в одномерной конечно-разностной схеме WENO они присутствуют, но на несколько порядков меньше, чем наблюдаемые в расчётах на неструктурированных сетках. Как видно из приведённых данных, на неструктурированных сетках эти осцилляции не исчезают даже при использовании схемы «первого порядка». Поэтому наблюдаемое поведение рёберно-ориентированных схем можно считать корректным. Добавление искусственной вязкости по формуле (17) также не

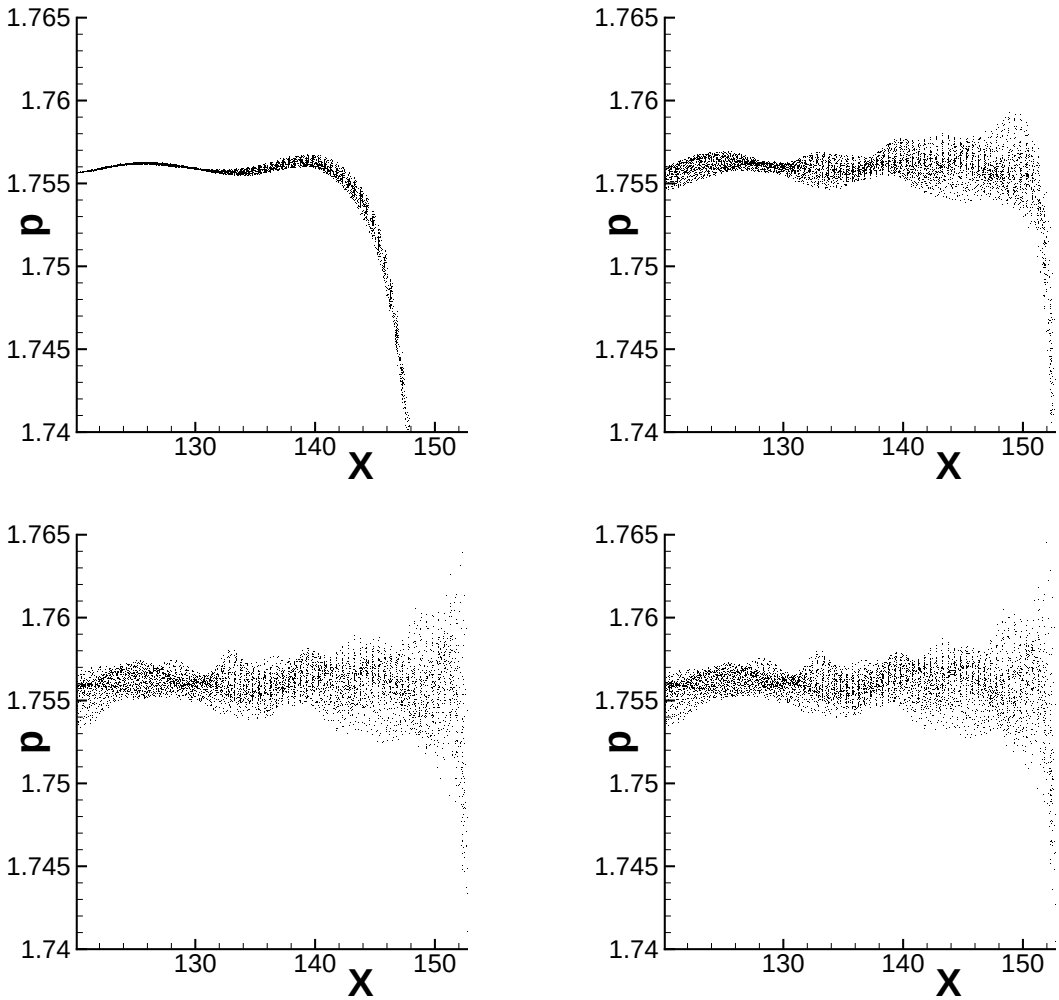

Рис. 5. Осцилляции за фронтом ударной волны на трёхмерной неструктурированной сетке, схема Роу. Сверху вниз и слева направо: схема 1-го порядка, EBR-minmod/CH, EBR-WENO5/CH, EBR-WENO5/FS

позволяет подавить эти осцилляции.

Теперь рассмотрим одномерную задачу о распаде разрыва, предложенную Жмакиным и Фурсенко [37]. В ней показатель адиабаты $\gamma = 5/3$, а начальные данные задаются равенством

$$\boldsymbol{Q}|_{t=0} = \begin{cases} \boldsymbol{Q}_L, & x < 0, \\ \boldsymbol{Q}_R, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

где $\rho_L = 8, p_L = 480, \rho_R = p_R = 1, \boldsymbol{u}_L = \boldsymbol{u}_R = 0$. Расчёт проводится до времени $T_{\max} = 4$.

Результаты расчёты по разным схемам сведены на рис. 7. Сверху вниз: EBR-minmod/CH, EBR-WENO5/CH, EBR-WENO5/CH. В каждой строке слева приведены результаты расчёта в одномерной постановке по конечно-разностной

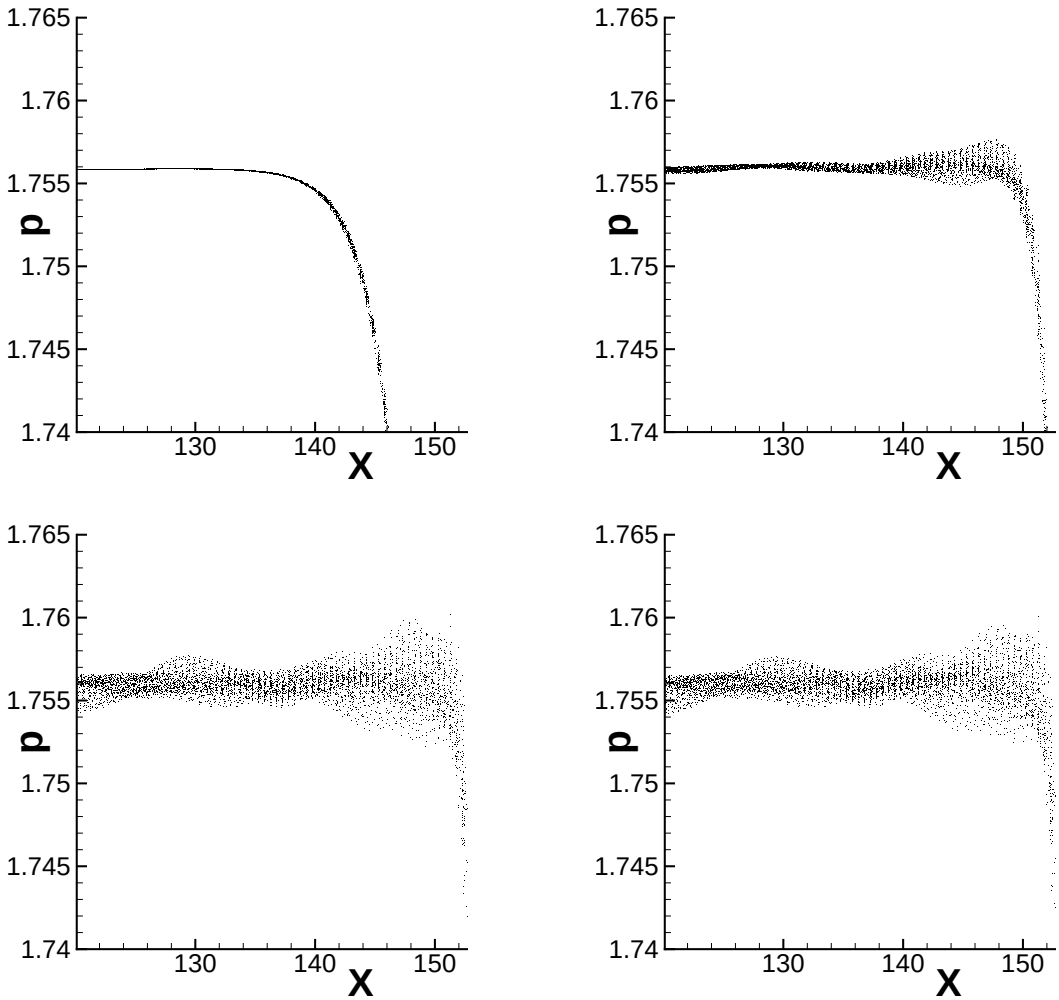

Рис. 6. Осцилляции за фронтом ударной волны на трёхмерной неструктурированной сетке, схема Лакса-Фридрихса. Сверху вниз и слева направо: схема «первого порядка», EBR-minmod/CH, EBR-WENO5/CH, EBR-WENO5/FS

схеме, а справа – результаты расчёта по схемам с квазиодномерной рёберно-ориентированной реконструкцией на трёхмерной неструктурированной сетке. Во всех тестах для решения задачи о распаде разрыва использовалась схема Роу (либо, для реконструкции расщеплённых потоков, – расщепление Роу).

Общий вывод, который можно сделать из приведённых графиков, заключается в том, что объём численной вязкости, вносимой рёберно-ориентированными схемами, в целом близок к соответствующим конечно-разностным схемам, однако из-за передачи скачков на неструктурированных сетках возникают дополнительные осцилляции.

Теперь рассмотрим задачу Blast wave [38]. В ней $x \in (0{,}1)$, на границах расчётной области задаются условия отражения. $\gamma = 1.4$. Начальные данные

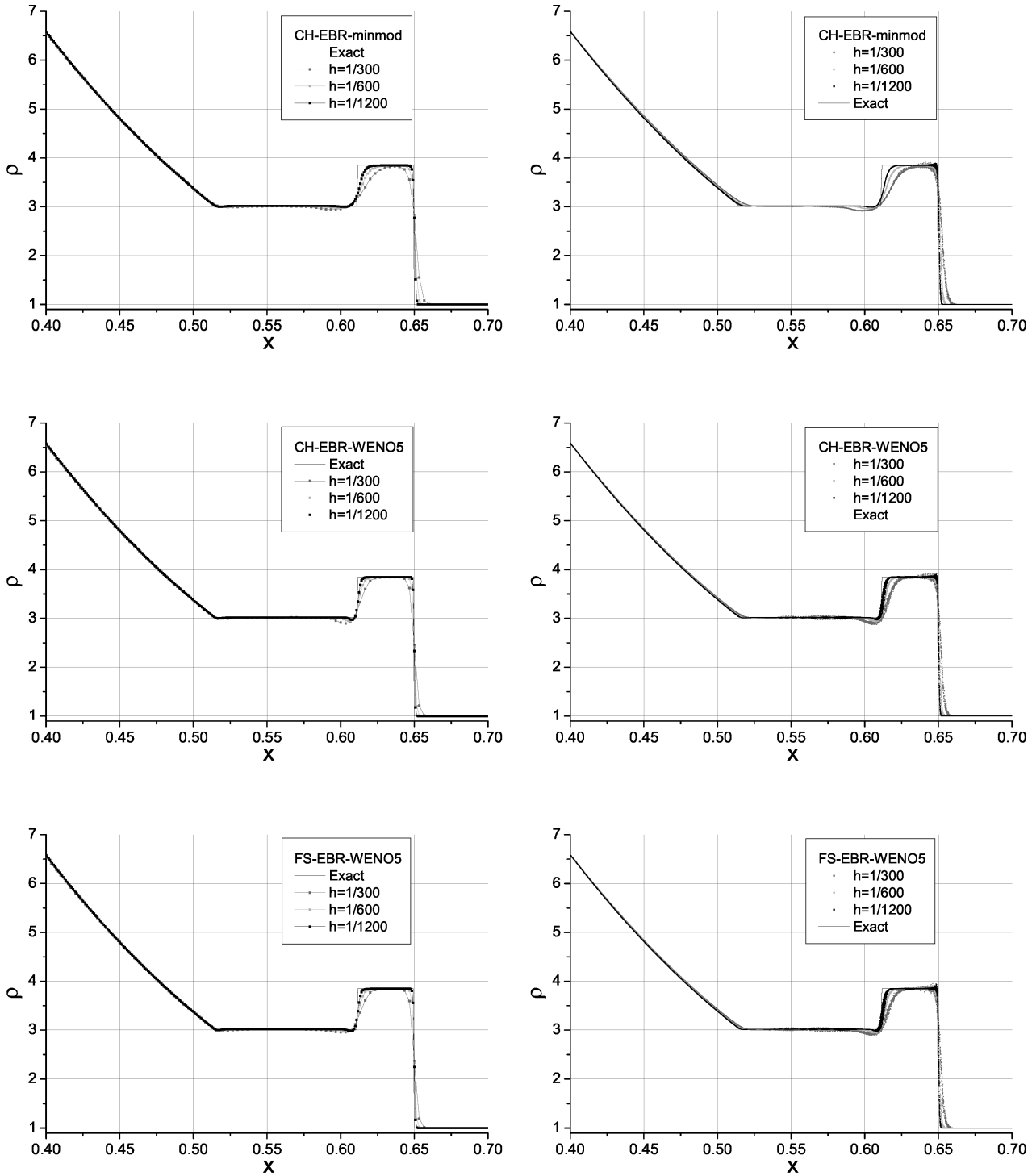

Рис. 7. Решение задачи Жмакина-Фурсенко на последовательности сеток. Схема Роу. Слева – одномерная постановка, справа – трёхмерная. Сверху вниз: EBR-minmod/CH, EBR-WENO5/CH, EBR-WENO5/FS

задаются формулами $\rho|_{t=0} = 1$, $\boldsymbol{u}|_{t=0} = 0$,

$$p|_{t=0} = \begin{cases} 1000, & x < 0.1, \\ 0.01, & 0.1 < x < 0.9, \\ 100, & x > 0.9. \end{cases}$$

Расчёт проводится до времени $T_{\max} = 0.038$.

Результаты расчёты по схемам EBR-minmod/CH и EBR-WENO5/CH приведены на рис. 8. В каждой строке слева приведены результаты одномерного расчёта по конечно-разностной схеме на равномерной сетке, а справа – по соответствующей схеме с квазиодномерной рёберно-ориентированной реконструкцией на трёхмерной неструктурированной сетке.

Расчёты по схеме EBR-WENO5/CH независимо от выбора схемы для решения задачи о распаде разрыва (Роу или Лакса-Фридрихса) привели к авосту из-за появления узла с отрицательным давлением. Причина, вызывающая этот эффект для реконструкции характеристических переменных, но не вызывающая его при реконструкции характеристических расщеплённых потоков, подлежит дальнейшему выяснению.

Двумерные задачи. Рассмотрим задачу о распаде двумерного разрыва, предложенную под номером 17 в [39]. Начальные данные в ней задаются в виде

$$\boldsymbol{Q}|_{t=0} = \begin{cases} \boldsymbol{Q}_{LT}, & x < 0.5, y > 0.5, \\ \boldsymbol{Q}_{RT}, & x > 0.5, y > 0.5, \\ \boldsymbol{Q}_{LB}, & x < 0.5, y < 0.5, \\ \boldsymbol{Q}_{RB}, & x > 0.5, y < 0.5, \end{cases}$$

где

$$\rho_{LT} = 2, p_{LT} = 1, u_{LT} = 0, v_{LT} = -0.3,$$

$$\rho_{RT} = 1, p_{RT} = 1, u_{RT} = 0, v_{LT} = -0.4,$$

$$\rho_{LB} = 1.0625, p_{LB} = 0.4, u_{LB} = 0, v_{LB} = 0.2145,$$

$$\rho_{RB} = 0.5197, p_{RB} = 0.4, u_{RB} = 0, v_{LB} = -1.1259.$$

Показатель адиабаты равен $\gamma = 1.4$. Расчёт проводится в единичном квадрате до времени $T_{\max} = 0.3$. При $x = 0$ и $x = 1$ задаются условия отражения, при $y = 0$ и $y = 1$ – входные/выходные условия. Среди четырёх возникающих в этой задаче одномерных разрывов есть два тангенциальных разрыва с разным перепадом скоростей, одна ударная волна и одна волна разрежения.

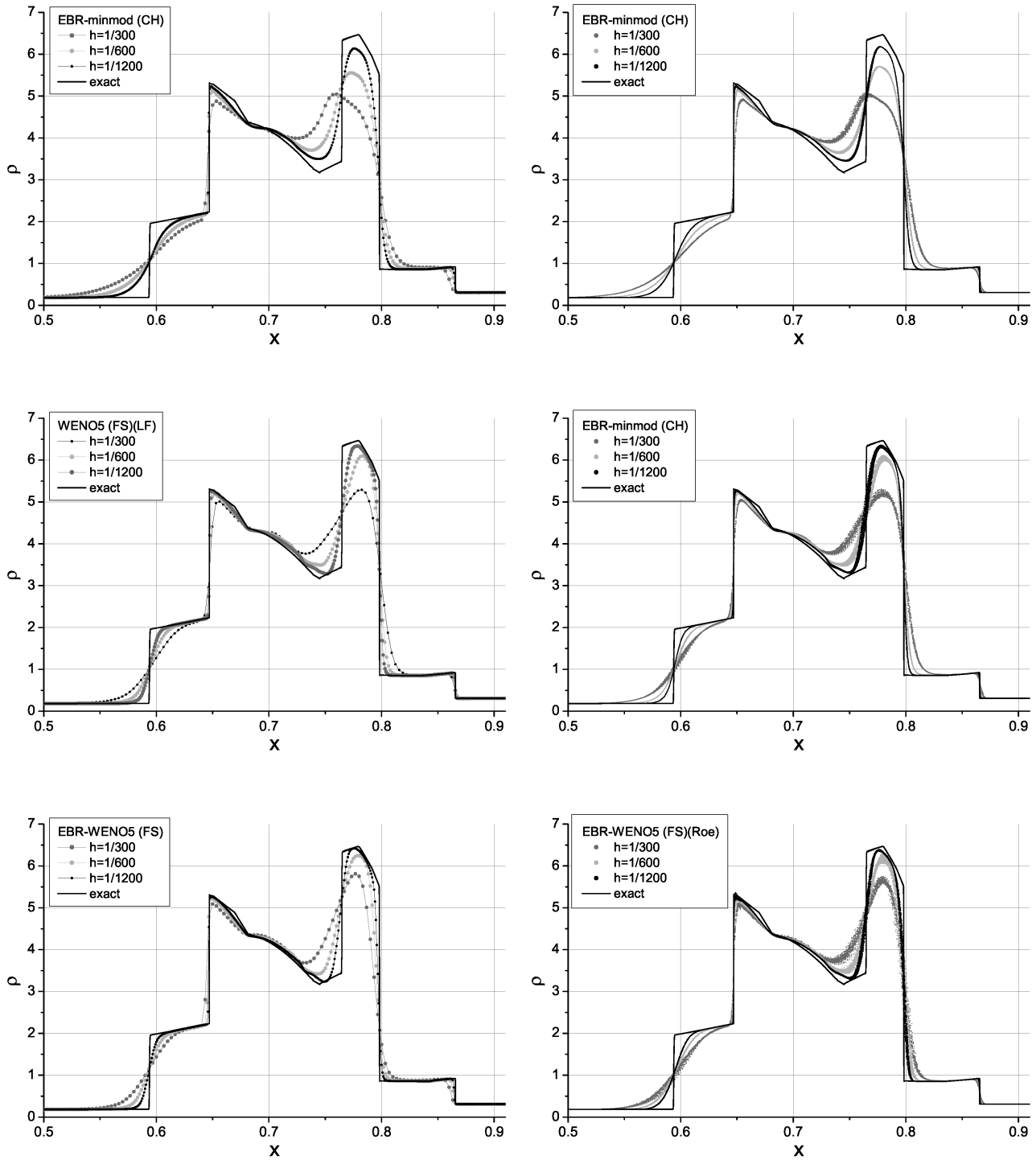

Рис. 8. Решение задачи Blast wave на последовательности сеток. Слева – одномерная постановка, справа – трёхмерная. Сверху вниз: EBR-minmod/CH (Роу), EBR-WENO5/FS (Лакс-Фридрихс), EBR-WENO5/FS (Роу)

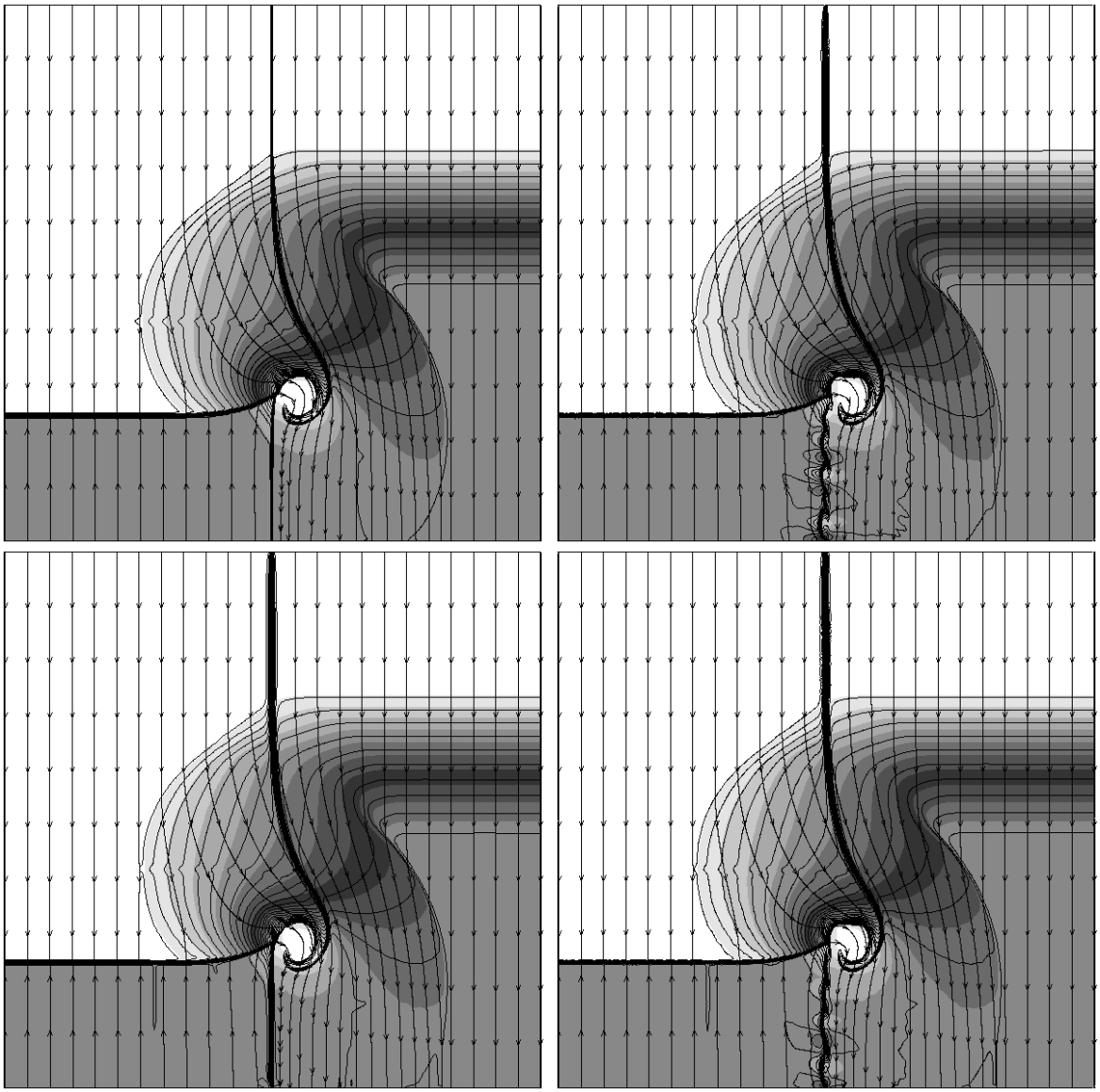

Рис. 9. Решение задачи о распаде двумерного разрыва (постановка из статьи Лиски и Вендроффа №17). Слева – решение на декартовой сетке, справа – на неструктурированной. Сверху вниз: EBR-WENO5/CH (Роу), EBR-WENO5/FS (Лакс-Фридрихс)

Расчёты проводились на неструктурированной сетке, построенной генератором Gmsh, и сравнивались с расчётами по конечно-разностной схеме на декартовой сетке. Шаг сетки принят равным $h = 1/400$. Результаты расчётов по схеме EBR-WENO5 (справа) в сравнении с расчётом по конечно-разностной схеме WENO5 (слева) приведены на рис. 9. Сверху приведены результаты с использованием реконструкции характеристических переменных (CH) и схемы Роу, снизу – с использованием реконструкции характеристических расщеплённых потоков (FS) и схемой Лакса-Фридрихса.

Цветом обозначено давление (14 контуров от 0.2 до 0.98 с шагом 0.06),

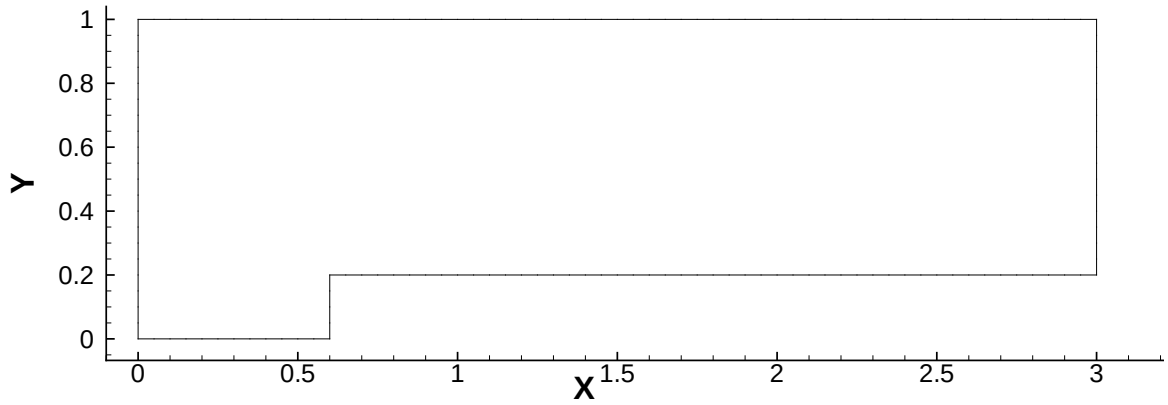

Рис. 10. Расчётная область для задачи об обтекании уступа в канале

белый цвет соответствует крайним значениям, а наиболее тёмный – среднему значению. Чёрные линии являются изолиниями плотности: проведено 30 изолиний, соответствующих значениям от 0.53 до 1.98 с шагом 0.05.

Рассмотрим теперь задачу об обтекании прямого уступа сверхзвуковым потоком, предложенную в [38]. Геометрия расчётной области представлена на рис. 10. При $x = 0$ и $x = 3$ задаются входные и выходные условия соответственно, на остальных границах задаётся условие непротекания. Показатель адиабаты равен $\gamma = 1.4$. Начальными данными является однородный поток с параметрами $\rho = 1.4$, $p = 1$, $u = 3$, $v = 0$. Расчёт проводится до времени $T_{\max} = 4$.

Будем проводить расчёты этой задаче на очень подробной сетке, а именно, с характерным шагом $h = 320$, чтобы можно было наиболее явно увидеть преимущество схем более высокой точности. На рис. 11 приведены результаты расчётов на ТС-сетке из прямоугольных треугольников, а на рис. 12 – расчётов на неструктурированной сетке, построенной генератором Gmsh. На каждом рисунке изображены изолинии плотности (30 линий от 0.252 до 6.062).

Из полученных результатов можно сделать два вывода. Во-первых, схема EBR-WENO5 позволяет корректно моделировать решения уравнения Эйлера с разрывами, внося при этом меньшую вязкость, чем схема EBR-minmod. Во-вторых, введение искусственной вязкости по формуле (17) в этой задаче позволяет подавить осцилляции, возникающие на головной ударной волне, почти не влияя на решение в остальной области.

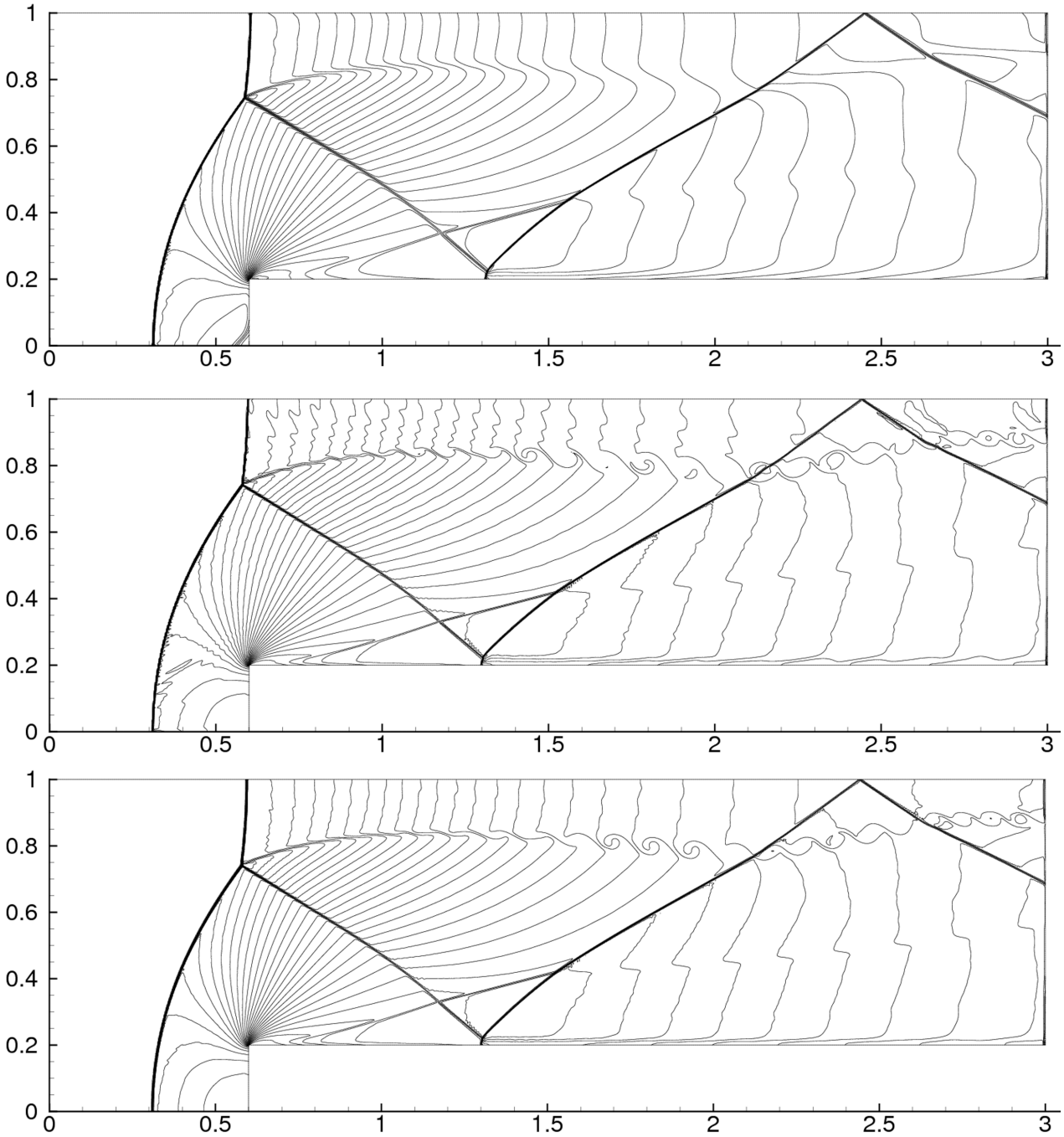

Рис. 11. Решение задачи об обтекании уступа в канале на сетке из прямоугольных треугольников. Сверху вниз: EBR-minmod/CH (Poy), EBR-WENO5/CH (Poy), EBR-WENO5/CH (Poy) с искусственной вязкостью

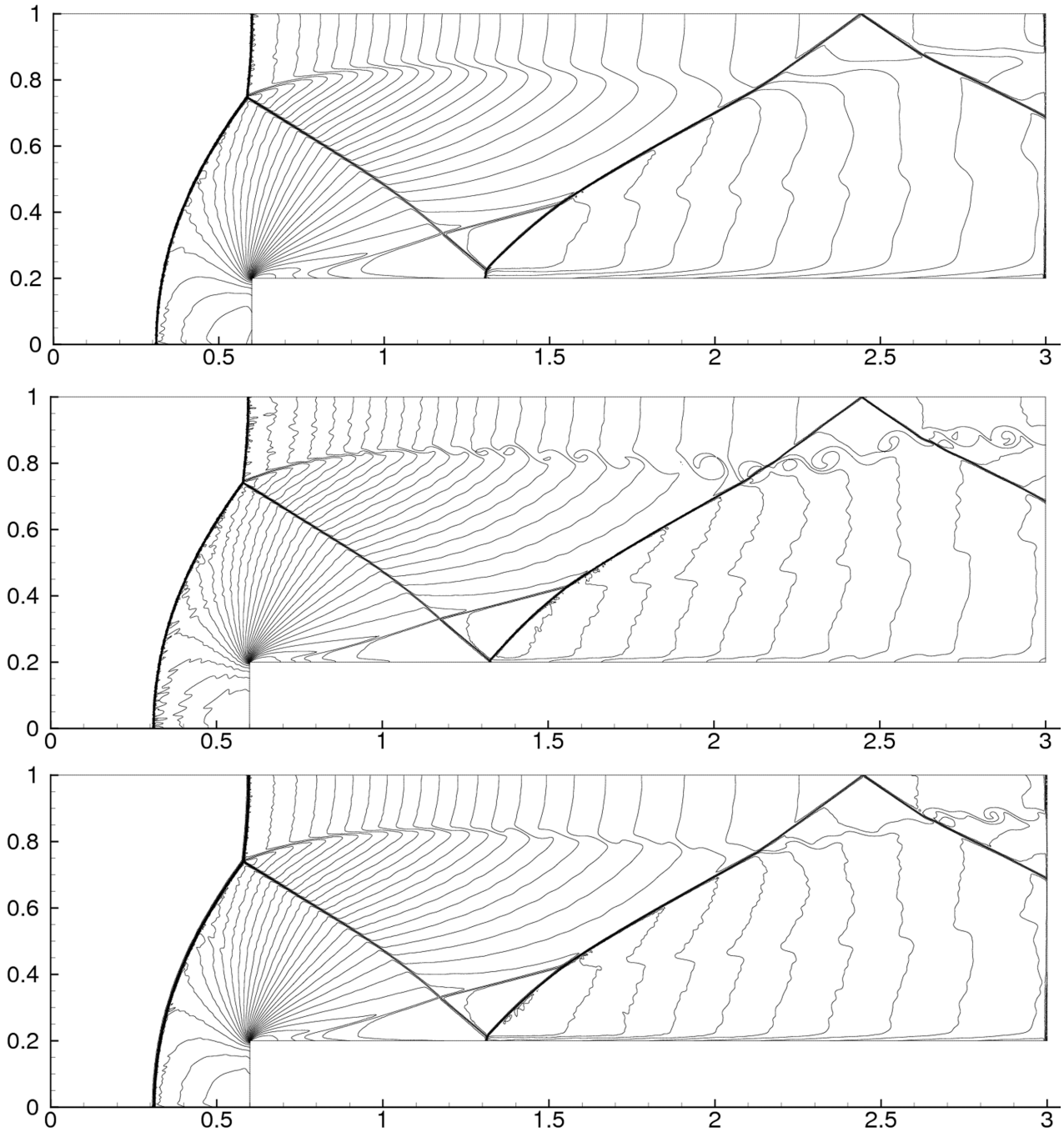

Рис. 12. Решение задачи об обтекании уступа в канале на неструктурированной сетке. Сверху вниз: EBR-minmod/CH (Poy), EBR-WENO5/CH (Poy), EBR-WENO5/CH (Poy) с искусственной вязкостью

Заключение

В настоящей работе предложена и протестирована на модельных задачах схема EBR-WENO5, представляющая собой рёберно-ориентированную схему с квазиодномерной реконструкцией переменных. В отличие от существующих в настоящее время реализаций WENO-схем на неструктурированных сетках, она опирается не на конечно-объёмный, а на конечно-разностный подход к определению предраспадных значений. В этом смысле её можно считать обобщением схемы WENO класса A на неструктурированную сетку. Схема EBR-WENO5 обладает сравнительно низкой вычислительную стоимостью, характерной для конечно-разностных схем WENO. На гладких решениях она сохраняет повышенную точность, присущую EBR-схемам, и при этом обеспечивает корректное воспроизведение разрывов: устраняет провал перед фронтом ударной волны и ограничивает генерацию осцилляций за ним.

Приложение

Матрицы собственных векторов для уравнения Эйлера.

Пусть $\boldsymbol{n}$ – некоторый единичный вектор. Рассмотрим матрицу $\boldsymbol{A}_n = d(\mathcal{F}(\boldsymbol{Q}) \cdot \boldsymbol{n})/d\boldsymbol{Q}$. Одно из возможных представлений её в виде $\boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}$ можно получить, если положить

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ u_x & s_x & t_x & u_x + an_x & u_x - an_x \\ u_y & s_y & t_y & u_y + an_y & u_y - an_y \\ u_z & s_z & t_z & u_z + an_z & u_z - an_z \\ \boldsymbol{u}^2/2 & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{s} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t} & h + a\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} & h - a\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} + a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} - a \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \beta\frac{\boldsymbol{u}^2}{2} & \beta u_x & \beta u_y & \beta u_z & -\beta \\ -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{s} & s_x & s_y & s_z & 0 \\ -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t} & t_x & t_y & t_z & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\beta\frac{\boldsymbol{u}^2}{2} - \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}}{a}\right) & \frac{1}{2}\left(-\beta u_x + \frac{n_x}{a}\right) & \frac{1}{2}\left(-\beta u_y + \frac{n_y}{a}\right) & \frac{1}{2}\left(-\beta u_z + \frac{n_z}{a}\right) & \frac{1}{2}\beta \\ \frac{1}{2}\left(\beta\frac{\boldsymbol{u}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}}{a}\right) & \frac{1}{2}\left(-\beta u_x - \frac{n_x}{a}\right) & \frac{1}{2}\left(-\beta u_y - \frac{n_y}{a}\right) & \frac{1}{2}\left(-\beta u_z - \frac{n_z}{a}\right) & \frac{1}{2}\beta \end{pmatrix}$$

Здесь $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$ – скорость звука, $\beta = (\gamma - 1)/a^2$, $h = (E + p)/\rho$ – удельная полная энтальпия, а единичные вектора $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{t}$ выбираются таким образом, чтобы

$\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{t}$ образовывали ортонормированный базис. Для этого, например, можно положить

$$s_x = -\sqrt{n_x^2 + n_y^2}, \quad s_y = \frac{n_x n_y}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}, \quad s_y = \frac{n_x n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}},$$

$$t_x = 0, \quad t_y = -\frac{n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}, \quad t_z = \frac{n_y}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}.$$

Список литературы

1. Колган В. П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчёта разрывных течений газовой динамики // Учёные записки ЦАГИ. 1972. Т. 3(6). С. 68–77.

2. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // Journal of Computational Physics. 1979. Vol. 32. P. 101–136.

3. Liu X.-D., Osher S., Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes // Journal of computational physics. 1994. Vol. 115. P. 200–212.

4. Jiang G. S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // Journal of computational physics. 1996. Vol. 126. P. 202–228.

5. Shu C.-W. Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws: Tech. Rep.: 97-65: NASA, 1997.

6. Zhang R., Zhang M., Shu C.-W. On the Order of Accuracy and Numerical Performance of Two Classes of Finite Volume WENO Schemes // Commun. Comput. Phys. 2011. Vol. 9, no. 3. P. 807–827.

7. Barth T. J., Frederickson P. O. High order solution of the Euler equations on unstructured grids using quadratic reconstruction // AIAA Paper No. 90-0013. 1990.

8. Oliver-Gooch, C. F. Quasi-ENO schemes for unstructured meshes based on unlimited data-dependent Least-Squares reconstruction // Journal of computational physics. 1997. Vol. 133. P. 6–17.

9. Friedrichs O. Weighted essentially non-oscillatory schemes for the interpolation of mean values on unstructured grids // Journal of Computational Physics. 1998. Vol. 144. P. 194–212.

10. Hu C., Shu C.-W. Weighted essentially non-oscillatory schemes on Triangular meshes // Journal of Computational Physics. 1999. Vol. 150. P. 97–127.

11. Shi J., Hu Ch., Shu C.-W. A Technique of Treating Negative Weights in WENO Schemes // Journal of computational physics. 2002. Vol. 175. P. 108–127.

12. Titarev V. A., Toro E. F. Finite-volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws // Journal of Computational Physics. 2004. Vol. 201. P. 238–260.

13. Titarev V. A., Toro E. F. WENO schemes based on upwind and centred TVD fluxes // Computers and fluids. 2005. Vol. 34, no. 6. P. 705–720.

14. Quadrature-free non-oscillatory finite volume schemes on unstructured meshes for nonlinear hyperbolic systems / Dumbser M., Kaeser M., Titarev V. A. et al. // Journal of Computational Physics. 2007. Vol. 226. P. 204–243.

15. Wolf W. R., Azevedo J. L. F. High-order ENO and WENO schemes for unstructured grids // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2007. Vol. 55, no. 10. P. 917–943.

16. Liu Y., Zhang Y.-T. A Robust Reconstruction for Unstructured WENO Schemes // Journal of Scientific Computing. 2013. Vol. 54. P. 603–621.

17. Barth T. J. Numerical aspects of computing high Reynolds number flows on unstructured meshes // AIAA Paper No. 91-0721. 1991.

18. Katz Aaron, Sankaran Venkateswaran. An Efficient Correction Method to Obtain a Formally Third-Order Accurate Flow Solver for Node-Centered Unstructured Grids // J. Sci. Comput. New York, NY, USA, 2012. may. T. 51, № 2. C. 375–393.

19. Pincock B., Katz A. High-Order Flux Correction for Viscous Flows on Arbitrary Unstructured Grids // J. Sci. Comput. New York, NY, USA, 2014. nov. T. 61, № 2. C. 454–476.

20. Work C. D., Katz A. J. Aspects of the Flux Correction Method for Solving the Navier-Stokes Equations on Unstructured Meshes // AIAA paper No. 2015-0834. 2015.

21. Nishikawa Hiroaki. First, Second, and Third Order Finite-volume Schemes for Advection-diffusion // J. Comput. Phys. San Diego, CA, USA, 2014. sep. T. 273. C. 287–309. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2014.05.021.

22. Бахвалов П. А., Козубская Т. К. Модификация схемы Flux Corrector для повышения точности решения нестационарных задач // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 69. С. 1–24. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-69.

23. Bakhvalov P.A., Kozubskaya T.K. Modification of Flux Correction method for accuracy improvement on unsteady problems // Journal of Computational Physics. 2017. T. 338. C. 199 – 216.

24. Stoufflet B., Fezoui F. P., Dervieux A. Numerical simulation of 3-D hypersonic Euler flows around space vehicles using adapted finite elements // AIAA Paper No. 87-0560. 1987.

25. Computation of unsteady flows with mixed finite volume/ finite element upwind methods / Debiez C., Dervieux A., Mer K. et al. // International journal for numerical method in fluids. 1998. Vol. 27. P. 193–206.

26. Debiez C., Dervieux A. Mixed-element-volume MUSCL methods with weak viscosity for steady and unsteady flow calculations // Computers and Fluids. 2000. Vol. 29, no. 1. P. 89 – 118.

27. Abalakin I., Dervieux A., Kozubskaya T. High Accuracy Finite Volume Method for Solving Nonlinear Aeroacoustics Problems on Unstructured Meshes // Chinese Journal of Aeronautics. 2006. Vol. 19. P. 97–104.

28. Koobus B., Alauzet F., Dervieux A. Computational Fluid Dynamics / Ed. by M. F. CRC Press, 2011. P. 131–204.

29. Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T. Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2016. Vol. 81. P. 331–356.

30. Barth T. J. A 3-D upwind Euler solver for unstructured meshes // AIAA Paper No. 91-1548. 1991.

31. Бахвалов П. А., Козубская Т. К. О построении рёберно-ориентированных схем, обеспечивающих точность на линейной функции, для решения уравнений Эйлера на неструктурированных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 4. С. 92–111.

32. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws / Borges R., Carmona M., Costa B. et al. // Journal of computational physics. 2008. Vol. 227. P. 3191–3211.

33. Carlson J.-R. Inflow/Outflow Boundary Conditions with Application to FUN3D: Tech. Rep.: NASA/TM–2011-217181: NASA, 2011.

34. Nishikawa H. Accuracy-preserving boundary flux quadrature for finite-volume discretization on unstructured grids // Journal of computational physics. 2015. Vol. 281. P. 518–555.

35. И. Ю. Тагирова, А. В. Родионов. Применение искусственной вязкости для борьбы с «карбункул»-неустойчивостью в схемах типа Годунова // Математическое моделирование. 2015. Т. 27. С. 47–64.

36. Shu C.-W., Osher S. Effcient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes // Journal of computational physics. 1988. Vol. 77. P. 439–471.

37. А. И. Жмакин, А. А. Фурсенко. Об одной монотонной разностной схеме сквозного счета // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1980. Т. 20. С. 1021–1031.

38. Woodward P., Colella P. The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks // Journal of computational physics. 1984. Vol. 54. P. 115–173.

39. Liska R., Wendroff B. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations // SIAM Journal on Scientific Computing. 2003. Vol. 25. P. 995–1017.

Оглавление

Введение 3
Рёберно-ориентированные схемы 6
Рёберно-ориентированные схемы
с квазиодномерной реконструкцией переменных 7
Квазиодномерные реконструкции 9
Линейная реконструкция. Схемы EBR3 и SEBR5 9
Реконструкции с ограничителями. Схема EBR-minmod 10
WENO-реконструкция. Схема EBR-WENO 10
Обобщение на уравнения Эйлера 11
Граничные условия 13
Искусственная вязкость 15
Тестирование 15
Линейная акустика 15
Одномерные задачи с разрывными решениями в трёхмерной постановке 17
Двумерные задачи 21
Заключение 27
Приложение 27
Список литературы 28