ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 133 за 2017 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Блонский А.В., Савенков Е.Б.

Математическая модель и
алгоритм расчета течения в
дискретной системе трещин
с кавернами

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Блонский А.В., Савенков Е.Б. Математическая модель и алгоритм расчета течения в дискретной системе трещин с кавернами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 133. 18 с. doi:[10.20948/prepr-2017-133](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-133)

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-133>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

А.В. Блонский, Е.Б. Савенков

**Математическая модель и алгоритм расчета течения
в дискретной системе трещин с кавернами**

Москва, 2017

А.В. Блонский, Е.Б. Савенков, Математическая модель и алгоритм расчета течения в дискретной системе трещин с кавернами

Аннотация

В работе представлена физико-математическая модель и вычислительный алгоритм для математического моделирования течения в дискретной системе трещин при наличии каверн на пересечениях трещин. Модель описывает конвективный перенос жидкости в трещинах и кавернах с учётом перетока между ними, гравитационных и капиллярных сил.

Ключевые слова: дискретные системы трещин, многофазное течение.

A. V. Blonsky, E. B. Savenkov, Mathematical model and computational algorithms for flow in discrete fracture network with vugs.

Abstract The paper presents a mathematical model und computational algorithms for flow modelling within a discrete fracture network, in the presence of vugs at the intersections of fractures. The model describes convective fluid transport in fractures and vugs with allowance for the flow between them, takes into account gravitational and capillary forces.

Key words and phrases: discrete fracture network, multiphase flow, reservoir simulation.

Содержание

1	Введение	3
2	Геометрическая модель среды	3
3	Математическая модель однофазного течения в каверне	5
4	Математическая модель однофазного течения в трещине	5
5	Условия согласования и граничные условия	6
6	Двухфазное течение в системе трещин и каверн	7
7	Вычислительный алгоритм расчета двухфазного течения	9
7.1	Пространства базисных и пробных функций	9
7.2	Конечномерные аппроксимации	12
8	Заключение	16

1 Введение

В данной работе предлагается обобщение ранее разработанных математических моделей однофазного и двухфазного течения флюида в дискретной системе трещин [1]. Рассмотренные ранее модели состоят из двух групп уравнений:

1. уравнения двумерного течения в трещине в рамках модели смазочного слоя с учётом поверхностных эффектов (относительные фазовые проницаемости, капиллярное давление);
2. условия согласования на линиях пересечений трещин, которые описывают непрерывность потоков массы флюидов и поля давления.

В работе [1] условие (2) неявно предполагало, что фильтрационно-ёмкостные свойства (ФЕС) каверн (каналов, отнесенных к линиям пересечения трещин) пренебрежимо малы по сравнению с ФЕС трещин. Таким образом, течение флюида вдоль каналов не учитывалось. Указанные условия согласования на пересечениях трещин включали в себя только нормальные к линии пересечения трещин потоки массы флюида.

Физико-математическая модель, предлагаемая в данной работе, допускает течение жидкости вдоль каналов. Динамика течения флюида при этом описывается двумерными уравнениями закона сохранения массы в трещинах и одномерными уравнениями закона сохранения массы в каналах.

Рассматриваемая модель актуальна, прежде всего, для математического моделирования течений в системах трещин на пространственном масштабе образца керна, а также в других ситуациях, когда ФЕС каналов сравнимы с ФЕС трещин.

2 Геометрическая модель среды

В качестве геометрической модели среды будет рассматриваться локально двумерная связная область $\mathcal{F}$, которая представляет собой объединение некоторого числа (пересекающихся) трещин:

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{N_f} \mathcal{F}_n,$$

где N_f — число трещин. Каждая отдельная трещина $\mathcal{F}_n$ представляет собой двумерное многообразие (поверхность) с краем. Пример множества $\mathcal{F}$ для случая двух трещин показан на рисунке 1.

Рис. 1. Пример расчетной области. Слева: две трещины $\mathcal{F}_{1,2}$ и линия их пересечения γ . Справа: две трещины $\mathcal{F}_{1,2}$ и каверна на линии их пересечения γ .

Предполагается, что:

- трещины плоские, либо слабо искривлены (средний радиус кривизны существенно больше характерного линейного размера трещины). При описании течения в трещине справедливо приближение смазочного слоя (см. ниже);
- поверхности $\mathcal{F}_n$ представляют собой срединные поверхности трещин, то есть математические поверхности, равноудаленные от берегов трещин. Раскрытие трещины является функцией точки срединной поверхности трещины,

$$w = w_0(x), \quad x \in \mathcal{F},$$

где $\mathcal{F}$ — срединная поверхность трещины;

- любые две трещины $\mathcal{F}_i$ и $\mathcal{F}_j$ либо не имеют общих точек, либо пересекаются по отрезку $\gamma_{ij} = \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j$ конечной длины;
- два отрезка пересечения γ_{ij} и γ_{kl} имеют не более одной общей точки;
- отрезок γ_{ij} будем называть «каверной» или «каналом» переменного сечения с известным диаметром $d_{ij}(x), x \in \gamma_{ij}$ (рисунок 1);
- в дальнейшем будем рассматривать отрезки только из множества $\mathcal{A} = \{\gamma_{ij} : \gamma_{ij} = \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j \neq \emptyset\}$.

Сформулированные выше ограничения являются естественными при представлении трещин в виде плоских полигонов в концепции модели дискретной системы трещин. Другие виды взаимного расположения трещин (например пересечение 3 отрезков γ_{ij} в одной точке) являются геометрически неустойчивыми, то есть исчезают при малых «шевелениях» срединной поверхности.

3 Математическая модель однофазного течения в каверне

Пусть $\gamma = \gamma(s)$ — каверна конечной длины $L_\gamma = |\gamma|$; s — координата вдоль линии, проходящей в центре каверны, $s \in [0, L_\gamma]$; $\vec{\tau} = \vec{\tau}(s)$ — касательный к линии $\gamma = \gamma(s)$ вектор единичной длины. Будем считать, что сечение канала в некоторой точке s имеет форму круга с диаметром $d = d(s)$.

Далее предполагается, что справедливы следующие утверждения:

- течение в каверне существенно одномерное;
- число Рейнольдса $Re = d \cdot v / \nu \ll 1$, где v — характерная скорость течения, ν — кинематическая вязкость флюида.

При сделанных допущениях скорость течения можно описать законом Пуазейля для ламинарного течения вязкой жидкости в тонком канале [2]. Согласно данному закону для скорости течения флюида справедливо следующее выражение:

$$v_v(s) = -\frac{d^2(s)}{32\mu} \frac{\partial p_v}{\partial s}, \quad (1)$$

где v_v — средняя по сечению каверны скорость течения жидкости, μ — динамическая вязкость флюида, p_v — давление в каверне. При сделанных допущениях уравнение закона сохранения массы в канале будет иметь вид [2]:

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial \rho A v_v}{\partial s} = q, \quad (2)$$

$$v_v = -\frac{k_v}{\mu} \left(\frac{\partial p_v}{\partial s} + \rho g_\tau \right), \quad k_v(s) = \frac{d^2(s)}{32}, \quad A(s) = \frac{\pi d^2(s)}{4}, \quad (3)$$

где $A = A(s)$ — площадь сечения канала в точке s , $g_\tau = \vec{g} \cdot \vec{\tau}$ — проекция вектора ускорения свободного падения на вектор $\vec{\tau}$, q — мощность источников, k_v — абсолютная проницаемость канала. Уравнение (2) представляет собой уравнение баланса массы в рамках квазистационарной модели течения в канале с переменным сечением.

4 Математическая модель однофазного течения в трещине

Уравнение однофазного течения трещинах будет описываться той же моделью, что и в предыдущей работе [1]. Для полноты изложения кратко приведем основные уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w\rho) + \operatorname{div}[w\rho\vec{v}_f] = 0, \quad \vec{v}_f = -\frac{k_f}{\mu}(\nabla p_f + \rho\vec{g}_n), \quad (4)$$

где p_f — давление в трещине, $w = w(x)$ — раскрытие трещины, $\vec{g}_n = \Pi_n \vec{g}$ — проекция вектора ускорения свободного падения на плоскость трещины, $\Pi_n = I - \vec{n} \otimes \vec{n}$ — соответствующий проектор, I — единичная матрица, $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к трещине, $\vec{g}$ — ускорение свободного падения, $\vec{v}_f$ — скорость течения жидкости в трещине, k_f — абсолютная проницаемость, выражение для которой, в соответствии с моделью смазочного слоя, имеет вид:

$$k_f(x) = \frac{w^2(x)}{12}, \quad (5)$$

где x — точка расчетной области.

Отметим, что уравнение (2) имеет вид, аналогичный уравнению (4). Отличие заключается в том, как в выражение для проницаемости входит геометрический параметр области течения (диаметр канала — для случая каверны и раскрытие — для трещины).

5 Условия согласования и граничные условия

Уравнения (2)–(4), должны быть дополнены условиями согласования на линиях пересечения трещин γ_{ij} . В работе [1] были введены условия непрерывности давления и потоков на отрезках пересечений трещин. В данной работе дополнительно учитывается течение вдоль пересечений трещин и условие согласования приобретает следующий вид:

- непрерывность потоков массы в точках отрезка γ_{ij} :

$$q = \vec{Q}_{f,i}^{(+)} \cdot \vec{n}_{f,i}^{(+)} + \vec{Q}_{f,i}^{(-)} \cdot \vec{n}_{f,i}^{(-)} + \vec{Q}_{f,j}^{(+)} \cdot \vec{n}_{f,j}^{(+)} + \vec{Q}_{f,j}^{(-)} \cdot \vec{n}_{f,j}^{(-)}, \quad \forall x \in \gamma_{ij},$$

где $\vec{n}_i^{(+)}$, $\vec{n}_i^{(-)}$ — векторы единичных нормалей к линии γ_{ij} , касательные к поверхности трещины $\mathcal{F}_i$ (рисунок 2), $\vec{Q}_{f,i}^{(+)}$, $\vec{Q}_{f,i}^{(-)}$ — векторы плотности потока массы флюида в трещине $\mathcal{F}_i$:

$$\vec{Q}_f = -\rho w \frac{k_f}{\mu} (\nabla p + \rho \vec{g}_n).$$

- непрерывность давления в точках отрезка γ_{ij} :

$$p_f = p_v, \quad \forall x \in \gamma_{ij}.$$

Из представленных выражений видно, что условие непрерывности потоков массы играет роль источникового члена в уравнении одномерного течения флюида в каверне.

Помимо условия согласования, для постановки задачи о течении жидкости необходимо задать начальное распределение давления и граничные условия на границах трещин и каверн. Граничные условия могут быть двух типов: 1) давление; 2) поток жидкости.

Таким образом, система уравнений (2)–(4) совместно с условием согласования, а также начальными и граничными условиями, описывает однофазное течение жидкости в системе трещин и каверн.

Рис. 2. Нормали к отрезку пересечения трещин.

6 Двухфазное течение в системе трещин и каверн

В данном разделе проводится обобщение рассмотренной выше модели однофазного течения на случай двухфазного течения нефти и воды.

Будем считать, что:

- флюид состоит из двух несмешивающихся фаз, то есть каждая фаза $\alpha = W, O$ (« W » — жидкая водная фаза, « O » — жидкая углеводородная фаза) состоит из единственного (псевдо) компонента (« w » — вода, « o » — нефть). В дальнейшем фаза будет отождествляться с соответствующим компонентом;
- фазы являются сжимаемыми, массовая плотность фазы является функцией ее давления p_α : $\rho_\alpha = \rho_\alpha(p_\alpha)$, $\alpha = W, O$.

Дифференциальные уравнения законов сохранения масс компонент в трещинах и кавернах в рассматриваемых допущениях имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha w S_\alpha) + \operatorname{div} \vec{Q}_{f,\alpha} = 0, \quad \vec{x} \in \mathcal{F}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho_\alpha A S_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial Q_{v,\alpha}}{\partial s} = q_\alpha, \quad \vec{x} \in \gamma_{ij}, \quad (7)$$

где $\alpha = W, O$ — водная и нефтяная фазы, q_α — член, отвечающий за массообмен между трещинами и кавернами (будет описан ниже), S_α — насыщенности фаз, такие что $S_W + S_O = 1$, $\vec{Q}_{f,\alpha}$ — вектор плотности потока массы компонента в трещине, $Q_{v,\alpha}$ — плотность потока массы компонента в каверне, для которых справедливы следующие соотношения:

$$\vec{Q}_{f,\alpha} = -\rho_\alpha w \frac{k_f k_{r,\alpha}^{(f)}}{\mu_\alpha} (\nabla p_{f,\alpha} + \rho_\alpha \vec{g}_n), \quad (8)$$

$$Q_{v,\alpha} = -\rho_\alpha A(s) \frac{k_v k_{r,\alpha}^{(v)}}{\mu} \left(\frac{\partial p_{v,\alpha}}{\partial s} + \rho_\alpha g_\tau \right), \quad (9)$$

где k_f, k_v — абсолютные проницаемости трещин и каверн, определяемые выражениями (3) и (5) соответственно, $k_{r,\alpha}^{(\beta)} = k_{r,\alpha}^{(\beta)}(S_w)$, $\beta = f, v$ — относительные фазовые проницаемости, $p_{f,\alpha}, p_{v,\alpha}$ — давления фаз в трещине и каверне, $\mu_\alpha = \mu_\alpha(p_\alpha)$ — вязкость фазы.

Давления фаз не равны, они связаны капиллярным давлением, которое определяется локально (в точке пространства) моделью, учитывающей раскрытие (диаметр) трещины (каверны) и эффекты смачиваемости:

$$p_{f,c}(x) = (p_{f,O} - p_{f,W})(x) = \frac{2\sigma \cos \theta(x)}{w(x)}, \quad (10)$$

$$p_{v,c}(s) = (p_{v,O} - p_{v,W})(s) = \frac{4\sigma \cos \theta(s)}{d(s)}, \quad (11)$$

где θ — контактный угол (является заданной функцией взаимных свойств флюидов и скелета), σ — поверхностное натяжение.

Условия согласования в модели двухфазного течения принимают следующий вид:

- непрерывность потоков массы в точках отрезка γ_{ij} :

$$q_\alpha = \vec{Q}_{f,\alpha,i}^{(+)} \cdot \vec{n}_{f,\alpha,i}^{(+)} + \vec{Q}_{f,\alpha,i}^{(-)} \cdot \vec{n}_{f,\alpha,i}^{(-)} + \vec{Q}_{f,\alpha,j}^{(+)} \cdot \vec{n}_{f,\alpha,j}^{(+)} + \vec{Q}_{f,\alpha,j}^{(-)} \cdot \vec{n}_{f,\alpha,j}^{(-)}, \quad \forall x \in \gamma_{ij}, \quad \alpha = W, O;$$

- непрерывность давления в точках отрезка γ_{ij} :

$$p_{f,\alpha} = p_{v,\alpha}, \quad \forall x \in \gamma_{ij}, \quad \alpha = W, O.$$

Условие непрерывности давлений фаз в точках отрезков γ_{ij} означает, что капиллярные давления также должны быть равны. Будем считать, что капиллярное давление в точках отрезков γ_{ij} определяется из выражения для каверн:

$$p_{f,c}(x) = p_{v,c}(s) = \frac{4\sigma \cos \theta(s)}{d(s)}, \quad \forall s \in \gamma_{ij}. \quad (12)$$

Для замыкания системы уравнений (6)–(9) необходимо задать зависимости относительных фазовых проницаемостей в трещинах и кавернах. Будем предполагать, что ОФП задаются линейной зависимостью (с нулевыми значениями остаточных насыщенныхностей).

В работе [1] параметрами модели являлись геометрия и раскрытие трещин. Для модели течения, предлагаемой в данной работе, также необходимо задать радиус каверн. Радиус каверн может быть определен двумя способами:

- определен явно как входной параметр, наравне с раскрытием трещин;
- задан как функция раскрытия трещин.

Таким образом, система уравнений (6)–(9) совместно с условиями согласования на границах трещина–каверна, начальными и граничными условиями для давления и насыщен-

ности, а также уравнениями состояния для плотностей и вязкостей компонент описывает двухфазное течение жидкости в системе трещин и каверн.

7 Вычислительный алгоритм расчета двухфазного течения

В данном разделе будет изложен процесс построения численной схемы двухфазного течения в системе трещин и каверн. Аналогичные рассуждения могут быть проведены для модели однофазного течения. Вначале будут введены аппроксимации функций, определенных в расчетной области. Затем будут рассмотрены аппроксимации дифференциальных уравнений по времени и в пространстве.

7.1 Пространства базисных и пробных функций

Для построения численной схемы, так же как и в работе [1], в расчетной области $\mathcal{F}$ вводится треугольная сетка, согласованная на пересечениях трещин. Обозначим через $\mathcal{T}^h$ множество ячеек сетки

$$\mathcal{T}^h = \bigcup_{k=1}^{N_w} w_k,$$

где w_k — треугольник сетки (конечный элемент), N_w — количество треугольников. При этом каждому треугольнику ставится в соответствие три вершины: $w_k \leftrightarrow \{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\}$.

Множество $\mathcal{T}^h$ — правильное, т.е. любые два конечных элемента имеют либо общую грань, либо общую вершину, либо не имеют общих точек. Так же как и в работе [4], на данном множестве определяется пространство непрерывных кусочно-линейных базисных функций. Базисные функции $\phi(x)$ данного пространства строятся следующим образом [3]:

- в узле i сетки базисная функция равна единице, а в остальных узлах — нулю, то есть: $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, $i, j = \overline{1, N_h}$, N_h — количество узлов сетки;
- в пределах каждого треугольника $\phi_i(x)$ является линейной.

Тогда каждой непрерывной и достаточно гладкой функции $f(x)$, $x \in \mathcal{F}$, может быть поставлена в соответствие непрерывная кусочно-линейная функция из пространства базисных функций [5]:

$$f_h(x) = \sum_{i=1}^{N_h} f_i \phi_i(x), \quad x \in \mathcal{F}, \quad (13)$$

где f_i — значения функции $f(x)$ в узлах сетки x_i , $\phi_i(x)$ — базисные функции.

На разбиении $\mathcal{T}^h$ строятся контрольные объёмы Ω_i таким образом, что их объединение

Рис. 3. Пример частей контрольного объёма в треугольнике.

составляет всю расчетную область:

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{N_h} \Omega_n.$$

Рассмотрим конечный элемент w_k с узлами $\{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\}$. Каждому узлу сопоставим часть конечного элемента, которая образована путем соединения центра треугольника (под которым будем понимать его барицентр) с центрами его сторон, и представляет собой четырехугольник. Тогда конечный элемент может быть представлен в виде объединения его частей (рисунок 3):

$$w_k = w_k^{i_1} \cup w_k^{i_2} \cup w_k^{i_3}.$$

Рис. 4. Построение контрольного объёма (x_i — узел сетки, Ω_i — контрольный объём вокруг вершины x_i , пунктирная линия — граница контрольного объёма).

Контрольный объём для узла сетки с номером i определим как объединение множества четырехугольников w_k^i , инцидентных заданному узлу сетки x_i (рисунок 4):

$$\Omega_i = \bigcup_{w_k: x_i \in w_k} w_k^i.$$

Так же как и в работе [4], на контрольных объёмах определяется пространство пробных

функций. При этом пробная функция $\psi_i(x)$ определяется как:

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \notin \Omega_i. \end{cases} \quad (14)$$

Тогда каждой функции $f(x)$, $x \in \mathcal{F}$, может быть поставлена в соответствие кусочно-постоянная функция из пространства пробных функций [6]:

$$f_h(x) = \sum_{i=1}^{N_h} f_i \psi_i(x), \quad x \in \mathcal{F}, \quad (15)$$

где f_i — среднее значение функции $f(x)$ в пределах контрольного объёма Ω_i , которое определяется следующим образом:

$$f_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} f(x) dx,$$

где $|\Omega_i|$ — площадь контрольного объёма Ω_i .

Поскольку в данной работе математическая модель включает одномерное течение жидкости в кавернах, то для построения численной схемы также необходимо ввести пробные функции, соответствующие отрезкам пересечений трещин. При этом для согласованности схемы вводимые функции должны быть определены с учётом контрольных объёмов Ω_i . Обозначим через Σ_i множество точек, лежащих одновременно внутри контрольного объёма Ω_i и на отрезках пересечения трещин:

$$\Sigma_i = \left\{ x : x \in \bigcup_{\gamma_{ij}} (\gamma_{ij} \cap \Omega_i) \right\}.$$

Тогда на множествах Σ_i введем пробные функции $\psi_{\Sigma_i}(x)$:

$$\psi_{\Sigma_i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Sigma_i, \\ 0, & x \notin \Sigma_i. \end{cases} \quad (16)$$

Пусть $\mathcal{N}$ — множество узлов сетки. Разобьём его на два подмножества $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{N}_{\gamma}$, $\mathcal{N}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{N}_{\gamma} = \emptyset$, где $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ — узлы, лежащие во внутренней области трещин, $\mathcal{N}_{\gamma}$ — узлы, лежащие на пересечениях трещин.

Рассмотрим, как устроены контрольные объёмы, соответствующие узлам сетки, лежащим на пересечениях трещин. Возьмем узел $x \in \mathcal{N}_{\gamma}$, и пусть Ω — соответствующий ему контрольный объём. Тогда Ω может быть представлен в следующем виде:

$$\Omega = \bigcup \Omega^{(k)}, \quad (17)$$

Рис. 5. Пример контрольного объёма для двух пересекающихся трещин.

где $\Omega^{(k)} = \Omega \cap \mathcal{F}_k$ — часть контрольного объёма, лежащая в трещине $\mathcal{F}_k$. На рисунке 5 представлен пример контрольного объёма для двух пересекающихся трещин.

Рис. 6. Пример разбиения контрольного объёма по отрезку пересечения трещин ($\Gamma^{(1,1)}, \Gamma^{(1,2)}$ — части границ контрольных объёмов $\Omega^{(1,1)}, \Omega^{(1,2)}$, лежащие внутри трещины $\mathcal{F}_1$, γ — часть границ контрольных объёмов $\Omega^{(1,1)}, \Omega^{(1,2)}$, лежащая на линии пересечения трещин).

При этом стоит заметить, что контрольный объём в каждой трещине также разбивается на части, относительно отрезка пересечения (рисунок 6):

$$\Omega^{(k)} = \bigcup \Omega^{(k,i)}. \quad (18)$$

7.2 Конечномерные аппроксимации

Система уравнений (6), (7) будет аппроксимирована по времени с помощью полностью неявной схемы. В качестве первичных переменных выберем давление нефти p_O и водонасыщенность S_W . Давление воды и нефтенасыщенность могут быть определены через соотношения для капиллярного давления и насыщенностей фаз. Тогда система уравне-

ний (6), (7) примет следующий вид:

$$\frac{\rho_\alpha(\hat{p}_{f,\alpha})w\hat{S}_\alpha - \rho_\alpha(p_{f,\alpha})wS_\alpha}{\Delta t} + \operatorname{div} \left[-\rho_\alpha(\hat{p}_{f,\alpha})w \frac{k_f k_{r,\alpha}^{(f)}(\hat{S}_W)}{\mu_\alpha(\hat{p}_{f,\alpha})} (\nabla \hat{p}_{f,\alpha} + \rho_\alpha(\hat{p}_{f,\alpha}) \vec{g}_n) \right] = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\rho_\alpha(\hat{p}_{v,\alpha})A\hat{S}_\alpha - \rho_\alpha(p_{v,\alpha})AS_\alpha}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial s} \left[-\rho_\alpha(\hat{p}_{v,\alpha})A \frac{k_v k_{r,\alpha}^{(v)}}{\mu(\hat{p}_{v,\alpha})} \left(\frac{\partial \hat{p}_{v,\alpha}}{\partial s} + \rho_\alpha(\hat{p}_{v,\alpha})g_\tau \right) \right] = \hat{q}_{\alpha,f,v}, \quad (20)$$

где $\alpha = W, O$, $\hat{p}_{v,\alpha}, \hat{p}_{f,\alpha}, \hat{S}_\alpha$ — неизвестные с нового временного слоя, $p_{v,\alpha}, p_{f,\alpha}, S_\alpha$ — известные значения давления и насыщенности с предыдущего временного слоя, Δt — шаг по времени.

Заметим, что в соответствии с введенными условиями согласования о непрерывности полей давления и потока массы флюидов на границе «трещина»/«каверна», в случае, когда $\vec{x} \in \mathcal{A}$, давления фаз в трещинах и кавернах равны.

Рассмотрим случай, когда $x \in \mathcal{N}_\mathcal{F}$. Тогда течение описывается моделью течения в трещинах и дискретизация уравнений проводится аналогично тому, как это сделано в работе [4]: для дискретизации задачи уравнение (19) умножается на ψ_i , $i \in \mathcal{I}_F$, где $\mathcal{I}_F = \{i : \Omega_i \cap \mathcal{A} = \emptyset\}$, и интегрируется по всей расчетной области $\mathcal{F}$. Затем в полученных выражениях давления $\hat{p}_\alpha$ и p_α заменяются на их кусочно-линейные аппроксимации $\hat{p}_{\alpha,h}$ и $p_{\alpha,h}$, а насыщенности $\hat{S}_\alpha$ и S_α — на кусочно-постоянные приближения $\hat{S}_{\alpha,h}$ и $S_{\alpha,h}$. В результате получается система интегральных соотношений относительно значений давления и насыщенности фаз в точках сетки:

$$\int_{\Omega_i} \frac{\rho_\alpha(\hat{p}_{f,\alpha,h})w\hat{S}_{\alpha,h} - \rho_\alpha(p_{f,\alpha})wS_{\alpha,h}}{\Delta t} d\sigma + \int_{\partial\Omega_i} \left(\vec{Q}_{f,\alpha}(\hat{p}_{f,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}), \vec{n}_i \right) dl = 0, \quad i \in \mathcal{I}_F. \quad (21)$$

Рассмотрим случай, когда $x \in \mathcal{N}_\gamma$, и введем обозначение: $\mathcal{I}_V = \{i : \Omega_i \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\}$ — номера всех контрольных объёмов, содержащих отрезки пересечений.

Уравнение (19) умножается на ψ_i , $i \in \mathcal{I}_V$, а уравнение (20) умножается на $\psi_{\Sigma_i}(x)$, $i \in \mathcal{I}_V$, и оба уравнения интегрируются по всей расчетной области $\mathcal{F}$. В результате получается система интегральных соотношений:

$$\int_{\Omega_i} \frac{\rho_\alpha(\hat{p}_{f,\alpha,h})w\hat{S}_{\alpha,h} - \rho_\alpha(p_{f,\alpha})wS_{\alpha,h}}{\Delta t} d\sigma + \int_{\Omega_i} \operatorname{div} \left(\vec{Q}_{f,\alpha}(\hat{p}_{f,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}) \right) d\sigma = 0, \quad i \in \mathcal{I}_V, \quad (22)$$

$$\int_{\Sigma_i} \frac{\rho_\alpha(\hat{p}_{v,\alpha,h})A\hat{S}_{\alpha,h} - \rho_\alpha(p_{v,\alpha})AS_{\alpha,h}}{\Delta t} dl + \int_{\Sigma_i} \frac{\partial}{\partial s} Q_{v,\alpha}(\hat{p}_{v,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}) dl = \int_{\Sigma_i} \hat{q}_\alpha, \quad i \in \mathcal{I}_V. \quad (23)$$

Рассмотрим второе слагаемое уравнения (22), описывающее потоки через границу контрольного объёма. Для простоты предположим, что в точке x_i , соответствующей контрольному объёму Ω_i , пересекаются только две трещины, тогда выражение для потока

примет вид:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_i} \operatorname{div} \left(\vec{Q}_{f,\alpha}(\hat{p}_{f,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}) \right) d\sigma = \\
& = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_i^k} \operatorname{div} \left(\vec{Q}_{f,\alpha}(\hat{p}_{f,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}) \right) d\sigma = \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_i^{k,j}} \left(\vec{Q}_{f,\alpha}(\hat{p}_{f,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}), \vec{n} \right) dl + \\
& \quad + \sum_{k=1}^2 \int_{\gamma} \left(\vec{Q}_{f,\alpha}(\hat{p}_{f,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}), \vec{n}_k^{(+)} \right) + \left(\vec{Q}_{f,\alpha}(\hat{p}_{f,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}), \vec{n}_k^{(-)} \right) dl, \quad (24)
\end{aligned}$$

где Ω_i^k — часть контрольного объёма Ω_i , лежащая внутри k -ой трещины, $\Gamma_i^{k,j}$ — границы частей контрольного объёма, лежащие внутри трещин (рисунок 6), γ — отрезок пересечения, разделяющий контрольный объём Ω_i на части (см. рисунки 2, 5, 6).

В предыдущих работах [1], [4] предполагалось, что последнее слагаемое выражения (24) равно нулю. В настоящей работе, в соответствии с введенным условием непрерывности потоков на границе трещина–каверна, данное слагаемое описывает переток жидкости между трещинами и кавернами и определяет источниковый член в уравнении (23):

$$\int_{\Sigma_i} \hat{q}_\alpha = \sum_{k=1}^2 \int_{\gamma} \left(\vec{Q}_{f,\alpha}(\hat{p}_{f,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}), \vec{n}_k^{(+)} \right) + \left(\vec{Q}_{f,\alpha}(\hat{p}_{f,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}), \vec{n}_k^{(-)} \right) dl. \quad (25)$$

Предыдущие рассуждения легко обобщаются на случай произвольного количества пересечений трещин в точке x_i .

Соотношения (21)–(25) представляет собой систему нелинейных уравнений относительно неизвестных $\hat{p}_{O,i}, \hat{S}_{W,i}, i = \overline{1, N_h}$. Данная система может быть представлена в общем виде:

$$A^f \vec{x} + A^v \vec{x} = 0, \quad (26)$$

где A^f, A^v — операторы, соответствующие интегральным соотношениям (21)–(23), вектор $\vec{x} = [\hat{p}_{O,1}, \dots, \hat{p}_{O,N_h}, \hat{S}_{W,1}, \dots, \hat{S}_{W,N_h}]$ — вектор неизвестных. В силу условия согласования непрерывности давлений на границе трещина–каверна, давления фаз в точках пересечений трещин равны давлениям фаз в кавернах и, следовательно, число неизвестных остаётся тем же, что и в работе [4]. В данном случае в системе уравнений в строках соответствующих узлам сетки, которые лежат на пересечениях трещин, появляются дополнительные слагаемые, описывающие течение жидкости в кавернах.

Процесс приведения соотношений (21)–(22) к системе линейных уравнений и сопутствующие операции численного интегрирования подробно описаны в работе [4]. Рассмотрим отрезок γ_{ij} , на котором лежат $N_{\gamma_{ij}}$ точек сетки. Разобьём отрезок на множество сегментов $\gamma_{ij} = \bigcup_{n=1}^{N_{\gamma_{ij}}} \gamma_{ij,n}$, где $\gamma_{ij,n}$ — отрезок, образованный точками середин смежных с n -ой точкой отрезков (рисунок 7). Нумерация точек на отрезке γ_{ij} задается в соответствии с вектором

Рис. 7. Разбиение отрезка γ_{ij} .

7. Множество Σ_i состоит из объединения отрезков $\gamma_{ij,n}$, лежащих внутри контрольного объёма Ω_i . При этом из способа построения контрольных объёмов Ω_i и отрезков разбиения $\gamma_{ij,n}$ следует, что из каждого отрезка γ_{ij} в множество Σ_i может попасть только один сегмент $\gamma_{ij,n}$. Отсюда имеем, что $\Sigma_i = \{x : x \in \bigcup_{\gamma_{ij} \cap \Omega_i \neq \emptyset} (\gamma_{ij,n})\}$. Рассмотрим поочередно первые два слагаемых (23):

$$\int_{\Sigma_i} \frac{\rho_\alpha(\hat{p}_{v,\alpha,h}) A \hat{S}_{\alpha,h} - \rho_\alpha(p_{v,\alpha,h}) A S_{\alpha,h}}{\Delta t} dl = \sum_{\gamma_{ij,n} \in \Sigma_i} |\gamma_{ij,n}| A_{\gamma_{ij,n}} \frac{\rho_\alpha(\hat{p}_{v,\alpha,i}) \hat{S}_{\alpha,i} - \rho_\alpha(p_{v,\alpha,i}) S_{\alpha,i}}{\Delta t}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_i} \frac{\partial}{\partial s} Q_{v,\alpha}(\hat{p}_{v,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}) dl &= \sum_{\gamma_{ij,n} \in \Sigma_i} \int_{\gamma_{ij,n}} \frac{\partial}{\partial s} Q_{v,\alpha}(\hat{p}_{v,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}) dl = \\ &= \sum_{\gamma_{ij,n} \in \Sigma_i} \left(Q_{v,\alpha}(\hat{p}_{v,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h})|_{\gamma_{ij,n+1/2}} - Q_{v,\alpha}(\hat{p}_{v,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h})|_{\gamma_{ij,n-1/2}} \right), \quad (28) \end{aligned}$$

где $\gamma_{ij,n+1/2}, \gamma_{ij,n-1/2}$ — концы отрезка $\gamma_{ij,n}$. Теперь рассмотрим выражение для потока, на границах отрезка:

$$Q_{v,\alpha}|_{\gamma_{ij,n+1/2}} = \left(-\rho_\alpha(\hat{p}_{v,\alpha}) A \frac{k_v k_{r,\alpha}^{(v)}}{\mu(\hat{p}_{v,\alpha})} \right) \Big|_{\gamma_{ij,n+1/2}} \cdot \left(\frac{\hat{p}_{v,\alpha,n+1} - \hat{p}_{v,\alpha,n}}{l_{ij,n+1/2}} + \rho_\alpha(\hat{p}_{v,\alpha}) \gamma_{ij,n+1/2} g_\tau \right), \quad (29)$$

где $l_{ij,n+1/2}$ — расстояние между точками с номерами n и $n+1$.

Из выражения (29) видно, что для расчета потоков необходимо вычислить значения плотности и вязкости воды и нефти, ОФП, абсолютную проницаемость и площади сечения каверны на границе отрезков. Будем считать, что диаметр сечения задан в центрах отрезков и описывается линейной зависимостью между центрами отрезков. Соответственно, площадь сечения и абсолютная проницаемость определяются непосредственно по значению диаметра на границе отрезка. Для расчета плотности и вязкости необходимо определить соответствующее давление на границе отрезка. Так как функция давления была заменена кусочно-линейным приближением, то, используя давление в узлах сетки, можно определить давление в любой точке области. Для определения относительной фазовой проницаемости используется аппроксимация «против потока» [5], в соответствии с которой на границе отрезка используется значение ОФП из той ячейки, откуда вытекает жидкость.

Таким образом, была построена система нелинейных уравнений (21)–(25) и описаны

аппроксимации потоков в каверне (27)–(29). Построенная система может быть решена методом Ньютона.

Детали реализации численной схемы и общая схема алгоритма (расчет локальных матриц жесткости конечных элементов, сборка глобальной матрицы жесткости, матрицы Якоби и т.д.) во многом идентичны представленным в работе [4] (за исключением той части, которая относится к «кавернам»).

8 Заключение

В данной работе была представлена новая физико-математическая модель течения жидкости в дискретной системе трещин и каверн с учётом сжимаемости жидкости, капиллярных и гравитационных сил. Модель течения в трещинах описывается моделью смазочного слоя. Модель течения в кавернах описывается законом Пуазейля для ламинарного течения вязкой жидкости в узком канале. На границе «трещина»/«каверна» введены условия непрерывности давления и потоков. Данная модель применима для описания течения жидкости на масштабе образца керна, когда ФЕС трещин и каверн являются сравнимыми величинами.

Список литературы

- [1] Блонский А.В., Митрушкин Д.А., Савенков Е.Б. Моделирование течений в дискретной системе трещин: физико-математическая модель // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 65. 27 с. doi:10.20948/prepr-2017-65.
- [2] Milišić V., Quarteroni A. Analysis of lumped parameter models for blood flow simulations and their relation with 1D models // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. – 2004. – V. 38. – №. 4. – pp. 613-632.
- [3] Zienkiewicz O. C. et al. Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, The: Its Basis and Fundamentals. – Elsevier, Incorporated, 2013.
- [4] Блонский А.В., Митрушкин Д.А., Савенков Е.Б. Моделирование течений в дискретной системе трещин: вычислительные алгоритмы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 66. 30 с. doi:10.20948/prepr-2017-66.
- [5] Chen Z., Huan G., Ma Y. Computational methods for multiphase flows in porous media. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.
- [6] Chen Z. On the control volume finite element methods and their applications to multiphase flow, networks and heterogeneous media. – American Institute of Mathematical Sciences, 2006.