ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 4 за 2016 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Беляев М.Ю., Волков О.Н., Монахов М.И., Сазонов В. В.**

# Оценка точности методики реконструкции вращательного движения спутника по измерениям его угловой скорости и магнитного поля Земли

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки:*** Оценка точности методики реконструкции вращательного движения спутника по измерениям его угловой скорости и магнитного поля Земли / М.Ю.Беляев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 4. 40 с. doi:10.20948/prepr-2016-4
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-4

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В.Келдыша

**М.Ю.Беляев, О.Н.Волков, М.И.Монахов, В.В.Сазонов**

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МЕТОДИКИ РЕКОНСТРУКЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ЕГО УГЛОВОЙ СКОРОСТИ И МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

Москва – 2016

**Аннотация**

Исследована точность методики, позволяющей реконструировать вращательное движение искусственных спутников Земли по данным бортовых измерений векторов угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли (МПЗ). Методика основана на кинематических уравнениях вращательного движения твердого тела. Данные измерений обоих типов, собранные на некотором отрезке времени, обрабатываются совместно. Измерения угловой скорости аппроксимируются удобными формулами, которые подставляются в кинематические дифференциальные уравнения для кватерниона, задающего переход от связанной системы координат спутника к инерциальной системе координат. Полученные таким образом уравнения представляют собой кинематическую модель вращательного движения спутника. Решение этих уравнений, аппроксимирующее фактическое движение, находится методом наименьших квадратов из условия наилучшего согласования данных измерений вектора напряженности МПЗ с его расчетными значениями. Точность методики оценена посредством обработки данных с борта Служебного модуля МКС. Реконструкция движения станции, выполненная с помощью упомянутой методики, сравнивалась с телеметрическими данными о ее фактическом движении. Методика позволила реконструировать движение станции в режиме орбитальной ориентации с максимальной погрешностью менее 0.6° и развороты с максимальной погрешностью менее 1.2°.

**M.Yu.Belyaev, O.N.Volkov, M.I.Monakhov, V.V.Sazonov. Accuracy estimation of the technique for reconstructing the spacecraft attitude motion by measurements of its angular rate and Earth magnetic field strength.** The reconstruction technique is based on processing the measurements of two vectors: the spacecraft angular rate and the strength of the Earth magnetic field. The processing technique uses kinematical equations of the attitude motion of a rigid body. In its framework, the measurement data of both types, collected on a time interval, are processed jointly. The angular rate data are smoothed by suitable functions and those functions are substituted in kinematical equations for components of the quaternion, which defines a transformation of the spacecraft coupled coordinate system to inertial one. The equations obtained present the kinematical model of a spacecraft attitude motion. The solution of the equations, which approximates the real motion, is found by the least squares method from the condition of the best agreement between measurement and calculation data of the magnetic strength. The accuracy of the technique was investigated by processing measurements obtained on board Service Module of ISS. The reconstruction of ISS attitude motion was compared with telemetry data of its real motion. The errors of reconstruction of the motion in orbital orientation did not exceed 0.6°, the errors of reconstruction of rotations did not exceed 1.2°.

.

**1. Введение.** В работах [1, 2] описаны результаты реконструкции вращательного движения искусственных спутников Земли по данным бортовых измерений векторов угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли (МПЗ). Методика реконструкции основана на кинематических уравнениях вращательного движения твердого тела. В рамках этой методики данные измерений обоих типов, собранные на некотором отрезке времени, обрабатываются совместно. Измерения угловой скорости аппроксимируются удобными формулами, которые подставляются в кинематические дифференциальные уравнения для кватерниона, задающего переход от связанной системы координат спутника к инерциальной системе координат. Полученные таким образом уравнения представляют собой кинематическую модель вращательного движения спутника. Решение этих уравнений, аппроксимирующее фактическое движение, находится методом наименьших квадратов из условия наилучшего согласования данных измерений вектора напряженности МПЗ с его расчетными значениями. Описанная методика позволяет реконструировать фактическое вращательное движение спутника одним решением кинематических уравнений на интервалах времени продолжительностью более 5 часов.

Однако оценить точность реконструкций движения, построенных в [1, 2], удалось только по косвенным данным. Чтобы получить непосредственную оценку точности, необходимо иметь независимую информацию об ориентации спутника, а такой информации не было. В случае Международной космической станции (МКС) такая возможность имеется. Ориентация Служебного модуля (СМ) МКС известна с высокой точностью по передаваемой с борта телеметрической информации. С борта СМ передаются и телеметрические значения угловой скорости. Наконец, в СМ имеется трехосный магнитометр. Все эти данные позволяют реализовать методику, аналогичную использованной в [1, 2], и напрямую оценить ее точность. Разумеется, полученные таким образом оценки не имеют отношения к реконструкциям [1, 2], но они позволяют получить представление о возможностях методики.

Полученные результаты излагаются следующим образом. Сначала показывается, что телеметрические значения угловой скорости, полученные с борта СМ МКС, можно подготовить таким образом, что построенные на их основе кинематические уравнения вращательного движения станции являются приемлемыми. А именно, решениями этих уравнений можно достаточно точно аппроксимировать телеметрические значения кватерниона ориентации станции, относящиеся к тому же отрезку времени, что и измерения угловой скорости. Затем описывается подготовка измерений бортового магнитометра. Наконец, демонстрируются примеры реконструкции вращательного движения станции по измерениям магнитометра с помощью построенной кинематической модели. Проводится сопоставление кватернионов ориентации станции, полученных по телеметрии и с помощью проверяемой методики.

**2. Системы координат.** Для решения поставленных задач используется несколько систем координат. Опишем четыре из них, необходимые для представления полученных результатов. Все эти системы – правые декартовы.

Система $Y_1Y_2Y_3$ – инерциальная. Плоскость $Y_1Y_2$ параллельна среднему земному экватору эпохи 2000.0. Ось $Y_1$ направлена в точку весеннего равноденствия указанной эпохи, ось $Y_3$ направлена в соответствующий Северный полюс мира.

Под ориентацией станции понимается ориентация жестко связанной с корпусом СМ строительной системы координат $y_1y_2y_3$. Ось $y_1$ параллельна продольной оси СМ и направлена от его переходного отсека к агрегатному отсеку, ось $y_2$ параллельна оси вращения солнечных батарей СМ.

Для расчета МПЗ используется гринвичская система координат $X_1X_2X_3$. Плоскость $X_1X_2$ параллельна земному экватору. Ось $X_1$ параллельна плоскости гринвичского меридиана, ось $X_3$ направлена вдоль оси вращения Земли в Северный полюс мира.

Вращательное движение станции иллюстрируется с помощью орбитальной системы координат $Z_1Z_2Z_3$. Ось $Z_2$ направлена по геоцентрическому радиусу-вектору центра масс станции, ось $Z_3$ направлена противоположно вектору орбитального кинетического момента станции.

Положение системы $y_1y_2y_3$ относительно системы $Y_1Y_2Y_3$ задается с помощью нормированного кватерниона $Q=(q_0,q_1,q_2,q_3)$, $q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2=1$. Кватернионная формула перехода: $(0,Y_1,Y_2,Y_3)=Q\circ(0,y_1,y_2,y_3)\circ Q^{-1}$. Матрицу перехода от системы $y_1y_2y_3$ к системе $Y_1Y_2Y_3$ обозначим $\| a_{ij} \|_{i,j=1}^{3}$, где $a_{ij}$ – косинус угла между осями $Y_i$ и $y_j$. Элементы этой матрицы выражаются через компоненты $Q$ по формулам

$$\begin{aligned}
&a_{11}=q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2, && a_{12}=2(q_1q_2-q_0q_3), && a_{13}=2(q_1q_3+q_0q_2),\\
&a_{21}=2(q_2q_1+q_0q_3), && a_{22}=q_0^2+q_2^2-q_1^2-q_3^2, && a_{23}=2(q_2q_3-q_0q_1),\\
&a_{31}=2(q_3q_1-q_0q_2), && a_{32}=2(q_3q_2+q_0q_1), && a_{33}=q_0^2+q_3^2-q_1^2-q_2^2.
\end{aligned}$$

Матрица перехода от системы координат $Y_1Y_2Y_3$ к системе $X_1X_2X_3$ представляется в виде произведения трех матриц: матрицы прецессии, матрицы нутации и матрицы поворота вокруг оси $X_3$ на звездное время. Эти матрицы рассчитываются по упрощенным формулам [3].

Положение системы $y_1y_2y_3$ относительно системы $Z_1Z_2Z_3$ будем задавать углами Крылова $\psi$ (рысканье), $\gamma$ (крен) и $\theta$ (тангаж). Они вводятся следующим образом. Система $Z_1Z_2Z_3$ может быть переведена в систему $y_1y_2y_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол $\psi$ вокруг оси $Z_2$, 2) на угол $\gamma$ вокруг новой оси $Z_1$, 3) на угол $\theta$ вокруг новой оси $Z_3$, совпадающей с осью $y_3$. Здесь предполагается, что начала обеих систем совпадают. Матрицу перехода от системы $y_1y_2y_3$ к системе $Z_1Z_2Z_3$ обозначим $\| c_{ij} \|_{i,j=1}^{3}$, где $c_{ij}$ – коси-

нус угла между осями $Z_i$ и $y_j$. Элементы этой матрицы выражаются через углы Крылова с помощью формул

$$c_{11} = \cos\psi\cos\theta + \sin\psi\sin\gamma\sin\theta, \qquad c_{21} = \cos\gamma\sin\theta,$$
$$c_{12} = -\cos\psi\sin\theta + \sin\psi\sin\gamma\cos\theta, \qquad c_{22} = \cos\gamma\cos\theta,$$
$$c_{13} = \sin\psi\cos\gamma, \qquad c_{23} = -\sin\gamma,$$

$$c_{31} = -\sin\psi\cos\theta + \cos\psi\sin\gamma\sin\theta,$$
$$c_{32} = \sin\psi\sin\theta + \cos\psi\sin\gamma\cos\theta,$$
$$c_{33} = \cos\psi\cos\gamma.$$

**3. Уравнения движения станции** состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение ее центра масс, другая – движение относительно центра масс. Подсистема уравнений движения центра масс станции записана в гринвичской системе координат с учетом нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16,16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Начальные условия решений этой подсистемы на представляющих интерес отрезках времени предоставлялись РКК «Энергия».

Подсистема уравнений движения вокруг центра масс образована кинематическими уравнениями для компонент кватерниона $Q$. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} 2\dot{q}_0 &= -q_1\omega_1 - q_2\omega_2 - q_3\omega_3, \\ 2\dot{q}_1 &= q_0\omega_1 + q_2\omega_3 - q_3\omega_2, \\ 2\dot{q}_2 &= q_0\omega_2 + q_3\omega_1 - q_1\omega_3, \\ 2\dot{q}_3 &= q_0\omega_3 + q_1\omega_2 - q_2\omega_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь точка над символом означает дифференцирование по времени $t$, $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$ – компоненты абсолютной угловой скорости СМ (можно считать, станции) $\boldsymbol{\omega}$ в системе координат $y_1y_2y_3$.

С борта СМ МКС можно получить телеметрические значения кватерниона $Q$ и вектора $\boldsymbol{\omega}$. Компоненты этих величин заданы в дискретные моменты времени. Последовательности этих моментов с измерениями разных видов не совпадают, но расположены весьма часто (обычно с шагом 1с) и охватывают достаточно большой промежуток времени. Телеметрические значения $Q$ и $\boldsymbol{\omega}$ представим в виде

$$t'_k, \quad q_i^{(k)} \quad (i = 0, 1, 2, 3;\ k = 0, 1, \ldots, K); \tag{2}$$

$$t''_m, \quad \omega_j^{(m)} \quad (j = 1, 2, 3;\ m = 0, 1, \ldots, M). \tag{3}$$

Здесь $t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_K$, $q_i^{(k)}$ – значение компоненты $q_i$ в момент времени $t'_k$; $t''_0 < t''_1 < \ldots < t''_M$, $\omega_j^{(m)}$ – значение компоненты $\omega_j$ в момент времени $t''_m$. Кватернион, задающий ориентацию станции, определен с точностью до знака. Знаки $q_i^{(k)}$ и момент $t'_0$ в (2) выбираются из условия

$$q_0^{(0)} > 0, \quad \sum_{i=0}^{3} q_i^{(k-1)} q_i^{(k)} > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, K).$$

Полагаем, что разности $t''_{m+1} - t''_m$ незначительно отличаются друг от друга. Это условие позволяет построить аппроксимацию данных (3) выражениями:

$$\chi_j(t) = A_{j,L+1} + A_{j,L+2}(t - t''_0) + \sum_{l=1}^{L} A_{j,l} \sin \frac{\pi l (t - t''_0)}{t''_M - t''_0} \quad (j = 1, 2, 3). \qquad (4)$$

Коэффициенты $A_{j,l}$ находятся методом наименьших квадратов для каждой компоненты угловой скорости независимо. Как показывает сравнение построенных таким образом выражений (4) с результатами расчета угловой скорости СМ по сглаженным данным (2) (см. [4, 5]), эти выражения имеют большие ошибки аппроксимации вблизи концевых точек $t''_0$ и $t''_M$. Более удачный способ состоит в сглаживании такими выражениями значений квазиуглов, определяемых соотношениями

$$\phi_j^{(0)} = 0, \quad \phi_j^{(m)} = \phi_j^{(m-1)} + \frac{t''_m - t''_{m-1}}{2} [\omega_j^{(m)} + \omega_j^{(m-1)}] \quad (m = 1, 2, \ldots, M; \ j = 1, 2, 3).$$

Квазиуглы $\phi_j^{(m)}$ относятся к моменту времени $t''_m$. Аппроксимирующими выражениями данных (3) в этом случае являются выражения $\Omega_j(t) = \dot{\chi}_j(t)$.

Примеры сглаживания данных (3) обоими способами приведены на рис. 1 – 4. В подписях к рисункам указаны основные характеристики данных и число гармоник в сглаживающих выражениях. Рисунки 1а и 3а содержат графики данных (3) на двух отрезках времени. Данные заданы с шагом 1с, но имеют небольшие пропуски, которые восполнялись линейной интерполяцией. Графики представляют собой ломаные линии, звенья которых соединяют точки $\left(t''_m, \omega_j^{(m)}\right)$ и $\left(t''_{m+1}, \omega_j^{(m+1)}\right)$, $m = 0, 1, \ldots, M-1$. На рис. 1б и 3б приведены аналогичные графики квазиуглов. На рис. 2а и 4а приведены графики сглаживающих выражений $\Omega_j(t)$, построенных двумя способами. Первый способ состоял в непосредственном сглаживании данных (3) выражениями (4), во втором способе этими выражениями сглаживались квазиуглы, которые затем дифференцировались по времени. На рис. 2б и 4б изображены разности найденных сглаживающих выражений – из выражения, построенного первым способом, вычиталось выражение, построенное вторым способом. Как видно из рисунков, отличие в результатах сглаживания значимо только вблизи точек $t''_0$ и $t''_M$. Ниже используется только второй способ, в котором меньше проявляются неадекватные концевые «забросы» графиков.

Как оказалось (см. [4, 5]) телеметрические данные (3) и, следовательно, сглаживающие выражения $\Omega_j(t)$ имеют смещения, которые на непродолжительных (примерно орбитальный виток) отрезках времени можно считать постоянными. По этой причине в уравнения (1) подставлялись выражения

$$\omega_j = \Omega_j(t) + \xi_j \quad (j = 1, 2, 3), \tag{5}$$

где смещения $\xi_j$ – постоянные величины. Уравнения (1), (5) использовались на интервалах времени не более полутора часов, причем смещения $\xi_j$ были уточняемыми параметрами. При численном интегрировании этих уравнений единицами измерения времени и угловой скорости служили 1000с и $0.001\,\text{с}^{-1}$.

**4. Тестирование математической модели.** Предложение использовать уравнения (1), (5) в качестве математической модели вращательного движения станции нуждается в проверке. Такая проверка может быть выполнена в процессе построения решениями этих уравнений аппроксимации телеметрических данных (2), относящихся к тому же отрезку времени, на котором построены выражения $\Omega_j(t)$.

Пусть для упрощения обозначений $t_0'' < t_0' < t_K' < t_M''$. Аппроксимацией данных (2) будем считать решение уравнений (1), (5), доставляющее минимум функционалу

$$\Phi = \sum_{k=0}^{K} \sum_{i=0}^{3} [q_i^{(k)} - q_i(t_k)]^2 . \tag{6}$$

Функционал минимизируется по начальным условиям искомого решения $q_i(t_0')$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ и параметрам $\xi_j$ $(j = 1, 2, 3)$. При этом учитывается условие нормировки

$$q_0^2(t_0') + q_1^2(t_0') + q_2^2(t_0') + q_3^2(t_0') = 1.$$

Если это условие выполнено, то решением уравнений (1) будет нормированный кватернион.

Чтобы перейти к безусловной минимизации $\Phi$, начальные условия уравнений (1) в точке $t_0'$ выразим через параметры Родрига $z_1$, $z_2$ и $z_3$:

$$q_0(t_0') = \frac{1 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2}{1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad q_i(t_0') = \frac{2z_i}{1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{7}$$

В результате функционал (6) минимизируется по 6 независимым величинам – параметрам $z_j$ и смещениям $\xi_j$ $(j = 1, 2, 3)$. Для удобства записи объединим эти параметры в один вектор $x = (x_1, \ldots, x_6)^{\mathrm{T}} \equiv (z_1, z_2, z_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)^{\mathrm{T}}$ и будем рассматривать (6) как функцию $x$: $\Phi = \Phi(x)$. Реконструкция движения станции задается вектором параметров $x_* = \arg\min \Phi(x)$.

Минимизация $\Phi(x)$ выполняется методом Гаусса-Ньютона [6]. В начальном приближении $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$, $z_j$ соответствуют кватерниону-измерению на момент $t_0'$. На каждой итерации этого метода поправка $\Delta x$, уточняющая имеющуюся оценку $x \approx x_*$, определяется системой нормальных уравнений

$$G(x)\Delta x = d(x),$$

$$d(x) = (d_1, d_2, \ldots, d_6)^{\mathrm{T}}, \quad d_l = -\sum_{k=0}^{K}\sum_{i=0}^{3}[q_i^{(k)} - q_i(t_k)]\frac{\partial q_i(t_k)}{\partial x_l} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_l},$$

$$G(x) = \| g_{lm} \|_{l,m}^{6}, \quad g_{lm} = \sum_{k=0}^{K}\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial q_i(t_k)}{\partial x_l}\frac{\partial q_i(t_k)}{\partial x_m} \approx \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_l \partial x_m},$$

$$\frac{\partial q_0(t)}{\partial x_l} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial x_l}q_1(t) + \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial x_l}q_2(t) + \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial x_l}q_3(t)\right],$$

$$\frac{\partial q_1(t)}{\partial x_l} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial x_l}q_0(t) + \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial x_l}q_2(t) - \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial x_l}q_3(t)\right],$$

$$\frac{\partial q_2(t)}{\partial x_l} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial x_l}q_0(t) + \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial x_l}q_3(t) - \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial x_l}q_1(t)\right],$$

$$\frac{\partial q_3(t)}{\partial x_l} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial x_l}q_0(t) + \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial x_l}q_1(t) - \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial x_l}q_2(t)\right].$$

Здесь $\partial \varphi_j / \partial x_l$ – псевдопроизводные, служащие для представления истинных производных $\partial q_i / \partial x_l$. Псевдопроизводная – это не частная производная некоторой функции по какому-то параметру. Запись ее в виде частной производной используется лишь для удобства. Такую запись следует воспринимать как единый символ с двумя индексами. Псевдопроизводная – это вектор, являющийся аналогом угловой скорости. В кинематике твердого тела угловая скорость служит для расчета производных по времени, а псевдопроизводная – для расчета производных по параметру (ср. последние выражения для $\partial q_i / \partial x_l$ и уравнения (1) для $\dot{q}_i$). В обозначении $\partial \varphi_j / \partial x_l$ индекс $j$ указывает векторную компоненту, индекс $l$ – номер параметра, по которому должно выполняться дифференцирование.

Значения псевдопроизводных определяются в процессе интегрирования уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_j} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_j}\omega_3 - \frac{\partial \varphi_3}{\partial z_j}\omega_2, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_j}\omega_3 - \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_j}\omega_2 + \delta_{1j},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_j}=\frac{\partial\varphi_3}{\partial z_j}\omega_1-\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_j}\omega_3,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_j}=\frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi_j}\omega_1-\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_j}\omega_3+\delta_{2j},\tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_3}{\partial z_j}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_j}\omega_2-\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_j}\omega_1,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi_j}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_j}\omega_2-\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_j}\omega_1+\delta_{3j}$$

совместно с уравнениями (1), (5). Здесь $\delta_{lm}$ – символ Кронекера. Начальные условия для этих уравнений в точке $t_0'$ следующие:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1}=s(z_1q_1+q_0),\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_1}=s(z_1q_2-q_3),\quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial z_1}=s(z_1q_3+q_2),$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_2}=s(z_2q_1+q_3),\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_2}=s(z_2q_2+q_0),\quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial z_2}=s(z_2q_3-q_1),$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_3}=s(z_3q_1-q_2),\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_3}=s(z_3q_2+q_1),\quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial z_3}=s(z_3q_3+q_0),$$

$$s=\frac{4}{1+z_1^2+z_2^3+z_3^2},\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\xi_l}=0\quad (l,m=1,2,3),$$

где $q_l=q_l(t_0')$ выражаются через параметры $z_j$ по формулам, указанным выше.

Интегрирование уравнений (1), (5) и уравнений в вариациях (8) выполнялось методом RKV56 [7]. Это – метод 6-го порядка типа Рунге-Кутты с локальным контролем точности. Метод позволяет автоматически выбирать оптимальный шаг интегрирования и с минимальными дополнительными вычислениями строить интерполяционный полином вычисляемого решения внутри шага. Использование интерполяционного полинома дало возможность эффективно (сохраняя оптимальный шаг интегрирования) включить в обработку все собранные телеметрические данные, не проводя их прореживания или предварительной аппроксимации.

Точность аппроксимации данных (2) и разброс в определении компонент $x_*$ будем характеризовать, следуя методу наименьших квадратов, соответствующими стандартными отклонениями. Стандартное отклонение $\sigma_Q$ ошибок в данных (2) находится по формуле

$$\sigma_Q=\sqrt{\frac{\Phi(x_*)}{3(K-1)}}.$$

Множитель 3 в этой формуле согласован с условием нормировки кватернионов (2). Стандартные отклонения компонент вектора $x_*$ равны квадратным корням из соответствующих диагональных элементов матрицы $\sigma_Q^2G^{-1}(x_*)$. Стандартные отклонения величин $z_j^*$ и $\xi_j^*$ обозначим $\sigma_{zj}$ и $\sigma_{\xi j}$.

Стандартное отклонение $\sigma_Q$ зависит от числа $L$ в (4) $\sigma_Q = \sigma_Q(L)$. Естественно взять такое значение $L$, при котором $\sigma_Q$ минимально. Здесь нет необходимости использовать этот точный количественный критерий. Достаточно попробовать несколько значений $L$ с шагом 5.

Примеры аппроксимации телеметрических данных (2) решениями уравнений (1), (5) приведены на рис. 5 – 10. Рисунки 5, 7 и 9 иллюстрируют точность аппроксимации. На этих рисунках с индексом (а) в единых системах координат изображены графики аппроксимирующих решений и данных измерений (последние представляют собой ломаные, звенья которых соединяют точки $\left(t'_k, q_i^{(k)}\right)$ и $\left(t'_{k+1}, q_i^{(k+1)}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, K-1$. Аппроксимация оказалась достаточно точной. Графики измерений и решений практически сливаются, поэтому рядом с ними на рисунках с индексом (б) приведены графики их разностей – ломаные с вершинами в точках $\left(t'_k, q_i^{(k)} - q_i(t'_k)\right)$, $k = 0, 1, \ldots, K$. Однако эта иллюстрация не дает представления о точности в наглядных кинематических терминах.

Чтобы получить такое представление, заметим, что разность нормированных кватернионов $Q_1$ и $Q_2$ в случае $Q_2 \approx Q_1$ можно представить в виде

$$Q_2 - Q_1 = \frac{1}{2} Q_1 \circ (0, \Delta\phi_1, \Delta\phi_2, \Delta\phi_3), \tag{9}$$

где $\Delta\boldsymbol{\varphi} = (\Delta\phi_1, \Delta\phi_2, \Delta\phi_3)$ – вектор бесконечно малого поворота. Если эти кватернионы задают близкие угловые положения твердого тела, то малый эйлеров поворот тела из положения $Q_1$ в положение $Q_2$ задается вектором $\Delta\boldsymbol{\varphi}$. Положив $Q_2 = \left(q_0^{(k)}, q_1^{(k)}, q_2^{(k)}, q_3^{(k)}\right)$ и приняв за $Q_1$ решение соответствующего аппроксимирующего решения уравнений (1), (5) в точке $t'_k$, определим по формуле (9) вектор бесконечно малого поворота $\Delta\boldsymbol{\varphi}_k = \left(\Delta\phi_1^{(k)}, \Delta\phi_2^{(k)}, \Delta\phi_3^{(k)}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, K$. Графики ломаных с вершинами в точках $\left(t'_k, \Delta\phi_i^{(k)}\right)$ приведены на рис. 5, 7 и 9 с индексом (в). Эти графики дают исчерпывающее представление о точности построенных аппроксимаций.

Формула (9) позволяет представить минимальное значение функционала (6) в виде

$$\Phi(x_*) \approx \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{K} |\Delta\boldsymbol{\varphi}_k|^2 .$$

При надлежащем изменении определения величин $\Delta\boldsymbol{\varphi}_k$ эта формула справедлива и для произвольных значений $x$ из окрестности точки $x_*$.

Рисунки 6, 8 и 10 иллюстрируют реконструкции движения станции, полученные минимизацией функционала (6). На рисунках с индексом (а) приведены графики соответствующих функций (5), на рисунках с индексом (б) приведены графики углов Крылова, задающие ориентацию системы $y_1 y_2 y_3$ относительно орбитальной системы координат. Углы рассчитаны вдоль найденного решения

уравнений (1), (5). Графики углов повторены на рисунках с индексом (в), а рядом с ними в тех же координатных осях приведены графики углов Крылова, рассчитанных по данным (2). Рассогласование одноименных графиков соответствует ошибкам аппроксимации, представленным графиками на рис. 5в, 7в и 9в.

Движение станции на рис. 5, 6 и 9, 10 представляет собой режим орбитальной ориентации. Реконструкция этого режима выполнена весьма точно. Ошибки по каждой компоненте вектора $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ не превышают нескольких сотых долей градуса. Движение на рис. 7, 8 представляет собой разворот. Здесь реконструкция менее точна. Однако ее ошибки по каждой компоненте вектора $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ не превышают 0.5°. Такая точность модели приемлема для реконструкции движения станции по измерениям МПЗ. Ошибки реконструкции по магнитным измерениям обычно составляют несколько градусов.

Приведем результаты минимизации функционала (6) на двух отрезках времени. Для реконструкции, представленной на рис. 7, 8, было получено

$$\sigma_Q = 0.00160, \quad z_1 = -0.0395, \quad z_2 = 0.8704, \quad z_3 = 0.6855,$$
$$\xi_1 = -3.49\cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1}, \quad \xi_2 = -3.04\cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1}, \quad \xi_3 = -9.98\cdot 10^{-7}\,\text{с}^{-1},$$
$$\sigma_{z1} = 5.8\cdot 10^{-5}, \quad \sigma_{z2} = 5.3\cdot 10^{-5}, \quad \sigma_{z3} = 6.3\cdot 10^{-5},$$
$$\sigma_{\xi 1} = 5.1\cdot 10^{-8}\,\text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\xi 2} = 5.3\cdot 10^{-8}\,\text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\xi 3} = 3.2\cdot 10^{-8}\,\text{с}^{-1}.$$

Собственные числа матрицы $G(x_*)$ составляют 390, 469, 666, 7240, 7583, 18788. Для реконструкции, представленной на рис. 9, 10, было получено

$$\sigma_Q = 5.48\cdot 10^{-5}, \quad z_1 = -0.1746, \quad z_2 = -0.1305, \quad z_3 = -0.0662,$$
$$\xi_1 = -2.52\cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1}, \quad \xi_2 = 4.15\cdot 10^{-7}\,\text{с}^{-1}, \quad \xi_3 = -2.27\cdot 10^{-7}\,\text{с}^{-1},$$
$$\sigma_{z1} = 8.1\cdot 10^{-7}, \quad \sigma_{z2} = 9.0\cdot 10^{-7}, \quad \sigma_{z3} = 9.7\cdot 10^{-7},$$
$$\sigma_{\xi 1} = 1.9\cdot 10^{-9}\,\text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\xi 2} = 1.7\cdot 10^{-9}\,\text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\xi 3} = 1.0\cdot 10^{-9}\,\text{с}^{-1}.$$

Собственные числа матрицы $G(x_*)$ составляют 654, 969, 1481, 19814, 21199, 33927. Как видим, задача аппроксимации данных (2) решением уравнений (1), (5) является хорошо обусловленной.

**5. Тестирование магнитных измерений.** Измеряемые магнитометром компоненты вектора напряженности магнитного поля обозначим $h_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Эти компоненты относятся к собственной системе координат датчика, направления осей которой близки направлениям осей строительной системы. Данные измерений магнитометра, полученные в течение одного сеанса работы с ним, представляют собой совокупность чисел

$$t_n, \; h_i^{(n)} \;\; (i = 1, 2, 3; \; n = 0, 1, 2, \ldots, N). \tag{10}$$

Здесь $h_i^{(n)} \approx h_i(t_n)$. Как правило, $t_{n+1} - t_n = 1\,\text{с}$, $t_N - t_0 = 60 \div 100\,\text{мин}$. Поскольку магнитометр установлен на выносной штанге за бортом СМ, он должен измерять внешнее магнитное поле, т. е. в основном МПЗ. Последнее же достаточно

точно представляется аналитической моделью IGRF. Указанные обстоятельства позволили проверить показания магнитометра посредством их сопоставления с моделью IGRF [8]. Эти показания оказались достаточно точными, и при сопоставлении удалось уточнить их временную привязку, постоянную систематическую ошибку (смещение нуля) и матрицу перехода от строительной системы координат к собственной системе координат магнитометра. Эту матрицу обозначим $B = \| b_{ij} \|_{i,j=1}^{3}$, где $b_{ij}$ – косинус угла между осью с номером $i$ системы координат магнитометра и осью $y_j$.

Как оказалось, привязка ко времени данных магнитных измерений не вполне верна, и в моментах $t_n$ имеется некоторый сдвиг. Этот сдвиг, обозначим его $\tau$, прибавлялся к $t_n$ и принимался постоянным на всем временном интервале сравнения. Постоянную систематическую ошибку в измерениях компоненты поля $h_i$ обозначим $\Delta_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Эти ошибки вычитались из соответствующих измерений и также принимались постоянными на интервале сравнения. Величины $\tau$, $\Delta_i$ и $B$ определялись методом наименьших квадратов из условия наилучшего согласования на этом интервале измеренного и расчетного векторов напряженности магнитного поля [8]. Вычисления были организованы с использованием модели IGRF, модели орбитального движения станции и аппроксимации кватерниона ориентации СМ на интервале сравнения. Использовалась линейная интерполяция данных (2) с последующей нормировкой.

Зададимся сдвигом $\tau$. С помощью перечисленных моделей вычислим компоненты МПЗ в строительной системе координат в моменты времени $t_n + \tau$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, N)$. Эти компоненты обозначим $H_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, 3)$. Если пренебречь ошибками измерений и разного рода возмущениями, то при каждом $n$ величины $h_i^{(n)}$ и $H_i^{(n)}$ являются компонентами одного и того же вектора и потому связаны определенными соотношениями. Эти соотношения с учетом постоянных смещений в измерениях запишем в виде

$$h_i^{(n)} = \Delta_i + \sum_{j=1}^{3} b_{ij} H_j^{(n)} \qquad (i = 1, 2, 3;\ n = 0, 1, \ldots, N). \tag{11}$$

При наличии ошибок в данных измерений соотношения (11) становятся приближенными. Учитывая это обстоятельство и принимая во внимание большое значение $N$, для отыскания матрицы $B$ и смещений $\Delta_i$ воспользуемся методом наименьших квадратов. Применение этого метода означает принятие следующей гипотезы: невязки соотношений (11) представляют собой некоррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми стандартными отклонениями.

Следуя методу наименьших квадратов, ищем минимум выражения

$$Z = \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{3} \left( h_i^{(n)} - \Delta_i - \sum_{j=1}^{3} b_{ij} H_j^{(n)} \right)^2$$

по величинам $b_{ij}$ и $\Delta_i$ при условии, что матрица $B$ ортогональна и $\det B = 1$. Эта задача решается с помощью стандартных процедур вычислительной линейной алгебры [9]. Обозначим ее решение $B^\circ$, $\mathbf{\Delta}^\circ = (\Delta_1^\circ, \Delta_2^\circ, \Delta_3^\circ)^{\mathrm{T}}$. В линейном приближении окрестность решения параметризуется независимыми параметрами $\eta_i, \theta_i$ $(i = 1, 2, 3)$: $\Delta_i = \Delta_i^\circ + \eta_i$, $B = E_\theta B^\circ$, где

$$E_\theta = \begin{Vmatrix} 1 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 1 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Величины $\theta_i$ представляют собой компоненты вектора бесконечно малого поворота, характеризующего отличие матрицы $B$ от ее оценки $B^\circ = \| b_{ij}^\circ \|$. Эти компоненты относятся к системе координат магнитометра. Согласно методу наименьших квадратов параметры $\eta_i, \theta_i$ образуют случайный вектор $\zeta \in R^6$ с математическим ожиданием, равным нулю. Ковариационная матрица $K_\zeta$ этого вектора выражается через матрицу $P$ системы нормальных уравнений, получающейся линеаризацией исходной задачи по $\zeta$ в точке минимума $Z$, и значение $Z_{\min}$:

$$K_\zeta = \sigma_0^2 P^{-1}, \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{Z_{\min}}{3N-3}}.$$

Здесь $\sigma_0$ – оценка стандартного отклонения ошибок в соотношениях (11). Стандартные отклонения величин $\xi_i, \theta_i$ – квадратные корни из соответствующих диагональных элементов матрицы $K_\zeta$ – обозначим $\sigma_{\Delta i}$ и $\sigma_{\theta i}$.

Введенная величина $Z_{\min}$ является функцией $\tau$. Эта функция вычисляется на равномерной сетке с шагом по $\tau$, равным 1с. Значение $\tau^*$, доставляющее минимум на сетке этой функции, дает решение задачи согласования магнитных измерений с моделью IGRF. Стандартное отклонение оценки $\tau^*$ вычисляется по формуле

$$\sigma_H^2 = \frac{Z_{\min}(\tau^*)}{3N-4}, \qquad \sigma_\tau^2 = 2\sigma_H^2 \left[ \frac{d^2 Z_{\min}(\tau^*)}{d\tau^2} \right]^{-1}.$$

Вторая производная здесь вычислялась по сеточным значениям $Z_{\min}$ разностным способом. Введенные выше стандартные отклонения $\sigma_0$, $\sigma_{\Delta i}$ и $\sigma_{\theta i}$ также зависят от $\tau$. Они называются маргинальными, или условными. При $N >> 1$ и $\tau = \tau *$ они практически совпадают (на самом деле, несколько меньше) с безусловными стандартными отклонениями. Поскольку вычислять их намного проще, ниже будем указывать именно их.

Описанное сопоставление получалось более точным, когда в качестве измерений в (10) принимались величины $\kappa h_i^{(n)}$ при $\kappa = 1 \div 1.03$. Коэффициент $\kappa$

подбирался на сетке с шагом 0.005 для каждого отрезка данных. При дальнейшем анализе этого отрезка параметры $\kappa$ и $\tau^*$ не изменялись, и, чтобы не вводить новых обозначений, за величинами $t_n + \tau^*$ и $\kappa h_i^{(n)}$ сохраним обозначения $t_n$ и $h_i^{(n)}$. Ниже в подписях к рисункам, связанным с магнитными измерениями, указывается нескорректированное время. Это сделано ради удобства работы с данными.

Результаты сопоставления показаний установленного на СМ магнитометра с моделью IGRF на трех отрезках времени приведены на рис. 11 – 13. Начальные и конечные точки этих отрезков лишь на несколько секунд отличаются от соответствующих концов отрезков, представленных на рис. 5 – 10. На рис. 11 – 13 с индексом (а) в каждой системе координат изображены два практически неразличимых графика. Один из них – ломаная с вершинами в точках $\left(t_n, H_i^{(n)}\right)$, другой – ломаная с вершинами в точках $\left(t_n, \tilde{H}_i^{(n)}\right)$, где

$$\tilde{H}_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{3} (h_j^{(n)} - \Delta_j^\circ) b_{ji}^\circ \quad (i = 1, 2, 3;\ n = 0, 1, 2, \ldots, N). \tag{12}$$

Первая ломаная характеризует зависимость от времени $i$-ой компоненты поля IGRF в строительной системе координат СМ, вторая – аналогичную зависимость той же компоненты, преобразованной надлежащим образом из скорректированных за постоянные смещения данных измерений. Рядом, на рис 11 – 13 с индексом (б) изображены ломаные с вершинами в точках $\left(t_n, \tilde{H}_i^{(n)} - H_i^{(n)}\right)$. Они иллюстрируют рассогласование измерений и модели. В подписях к рисункам указаны характеризующие соответствующий набор данных (10) величины $N$, $\tau^*$, $\kappa$, $\sigma_H$, $\Delta_i^\circ$ и углы $\alpha, \beta, \gamma$, параметризующие матрицу $B^\circ$.

Эти углы вводятся посредством следующего условия. При совмещении с помощью параллельного переноса начала строительной системы с началом системы координат магнитометра первая из этих систем переводится во вторую тремя последовательными поворотами вокруг своих осей. Поворот 1 – на угол $\alpha$ вокруг оси $y_2$, поворот 2 – на угол $\beta$ вокруг оси $y_3$, преобразованной первым поворотом, поворот 3 – на угол $\gamma$ вокруг дважды преобразованной оси $y_1$, совпадающей с осью 1 системы координат магнитометра. Элементы матрицы $B$ выражаются через введенные углы с помощью формул

$$\begin{aligned}
&b_{11} = \cos\alpha\cos\beta, && b_{12} = \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma,\\
&b_{21} = \sin\beta, && b_{22} = \cos\beta\cos\gamma,\\
&b_{31} = -\sin\alpha\cos\beta, && b_{32} = \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{13} &= \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma,\\
b_{23} &= -\cos\beta\sin\gamma,\\
b_{33} &= \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.
\end{aligned}$$

В качестве примера приведем оценки $B^\circ$ и стандартные отклонения $\sigma_{\Delta i}$, $\sigma_{\theta i}$ для двух отрезков времени. Для отрезка, представленного на рис. 12,

$$B^\circ = \begin{Vmatrix} 0.996353 & 0.004956 & -0.085186 \\ -0.004598 & 0.999980 & 0.004399 \\ 0.085206 & -0.003991 & 0.996355 \end{Vmatrix},$$

$$\sigma_{\Delta 1} = 8.9\gamma,\ \sigma_{\Delta 2} = 7.5\gamma,\ \sigma_{\Delta 3} = 5.9\gamma,\quad \sigma_{\theta 1} = 0.017^\circ,\ \sigma_{\theta 2} = 0.024^\circ,\ \sigma_{\theta 3} = 0.014^\circ.$$

Для отрезка, представленного на рис. 13,

$$B^\circ = \begin{Vmatrix} 0.996972 & 0.010229 & -0.077091 \\ -0.010616 & 0.999933 & -0.004621 \\ 0.077039 & 0.005426 & 0.997013 \end{Vmatrix},$$

$$\sigma_{\Delta 1} = 7.4\gamma,\ \sigma_{\Delta 2} = 5.9\gamma,\ \sigma_{\Delta 3} = 5.2\gamma,\quad \sigma_{\theta 1} = 0.011^\circ,\ \sigma_{\theta 2} = 0.019^\circ,\ \sigma_{\theta 3} = 0.0093^\circ.$$

Поскольку обе матрицы $B^\circ$ близки к единичной, стандартные отклонения углов $\alpha, \beta, \gamma$ весьма точно выражаются соотношениями [9] $\sigma_\alpha \approx \sigma_{\theta 2}$, $\sigma_\beta \approx \sigma_{\theta 3}$, $\sigma_\gamma \approx \sigma_{\theta 1}$. Разброс найденных оценок $\Delta_i^\circ$, $\alpha, \beta, \gamma$ существенно превышает стандартные отклонения $\sigma_{\Delta i}$, $\sigma_{\theta i}$. Возможно, этот разброс отражает изменения условий функционирования магнитометра.

**6. Реконструкция вращательного движения станции по измерениям датчика угловой скорости и магнитометра.** Пусть магнитные измерения имеют вид (10) и пусть на отрезке $I = \{t:\ t_a \le t \le t_b\}$, $t_a < t_0 < t_N < t_b$ по телеметрическим значениям угловой скорости построены функции $\Omega_i(t)$ (см. п. 3). Модель вращательного движения станции возьмем в виде уравнений (1), (5). Реконструкцией движения на отрезке $I$, будем считать решение этих уравнений, наилучшим образом в рамках метода наименьших квадратов согласующее данные (10) с моделью МПЗ IGRF. Сначала рассмотрим ситуацию, когда матрица $B$ и смещения $\Delta_i$ известны. Например, они предварительно определены методом предыдущего пункта. В такой ситуации вместо данных (10) будем рассматривать данные (12) и минимизировать функционал

$$\Psi = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{n=0}^{N} [\tilde{H}_i^{(n)} - \hat{H}_i(t_n)]^2 - (N+1)\Delta_i^2 \right\}, \tag{13}$$

$$\Delta_i = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} [\tilde{H}_i^{(n)} - \hat{H}_i(t_n)], \quad \hat{H}_i(t) = \sum_{j=1}^{3} G_j(t) a_{ji}(t).$$

Здесь $\Delta_i$ – повторные оценки смещений в измерениях МПЗ, $G_i(t)$ – расчетные значения компонент напряженности МПЗ в системе координат $Y_1Y_2Y_3$ в момент времени $t$. Функции $G_i(t)$ строятся с использованием модели орбитального

движения станции и аналитической модели МПЗ IGRF (эти функции использовались при расчете величин $H_i^{(n)}$ в п. 5).

Функционал (13) получен преобразованием функционала метода наименьших квадратов, возникающего при уравнивании соотношений $\tilde{H}_i^{(n)} \approx \approx \hat{H}_i(t_n) + \Delta_i$ $(i = 1, 2, 3;\ n = 0, 1, 2, \ldots, N)$. Повторное оценивание смещений $\Delta_i$ введено для повышения точности реконструкции. Минимизация $\Psi$ выполняется по параметрам Родрига $z_i$, через которые выражаются (ср. (7)) начальные условия $q_j(t_a)$ уравнений (1), и параметрам $\xi_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Для простоты письма объединим величины $z_i$ и $\xi_i$ в шестимерный вектор $x = (z_1, z_2, z_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)^{\mathrm{T}}$ и будем рассматривать функционал (13) как функцию $\Psi(x)$. Минимизация $\Psi$ выполняется методом Гаусса – Ньютона [6]. На каждой итерации этого метода поправка $\Delta x$, уточняющая имеющуюся оценку $x$, определяется системой нормальных уравнений с матрицей $\| C_{ij} \|_{i,j=1}^{6}$ и правой частью $\| D_i \|_{i=1}^{6}$:

$$C_{ij} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{l=1}^{3} A_{li}(t_n) A_{lj}(t_n) - \frac{1}{N+1} \sum_{l=1}^{3} B_{li} B_{lj},$$

$$D_i = \sum_{n=0}^{N} \sum_{l=1}^{3} [\tilde{H}_l^{(n)} - \hat{H}_l(t_n)] A_{li}(t_n) - \frac{1}{N+1} \sum_{l=1}^{3} \Delta_l B_{li},$$

$$A_{1i}(t) = \hat{H}_2(t) \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial x_i} - \hat{H}_3(t) \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial x_i},$$

$$A_{2i}(t) = \hat{H}_3(t) \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial x_i} - \hat{H}_1(t) \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial x_i},$$

$$A_{3i}(t) = \hat{H}_1(t) \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial x_i} - \hat{H}_2(t) \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial x_i},$$

$$B_{li} = \sum_{n=0}^{N} A_{li}(t_n) \quad (l = 1, 2, 3;\ i, j = 1, 2, \ldots 6).$$

Здесь $x_i$ – компоненты вектора $x$, расчет псевдопроизводных $\partial \varphi_l / \partial x_i$ выполняется посредством интегрирования уравнений (8). Расчетная схема минимизации та же, что и в п. 4. В начальном приближении точки минимума $\xi_1 = \xi_2 = = \xi_3 = 0$, параметры $z_j$ соответствуют телеметрическому кватерниону на момент времени, ближайший к $t_a$.

Точность оценки $x_* = \arg\min \Psi(x)$ и ошибки аппроксимации магнитных измерений будем характеризовать, следуя методу наименьших квадратов, соответствующими стандартными отклонениями. Последние вычисляются в предположении, что ошибки в измерениях некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии, средние значения ошибок в измерениях одной и той же векторной

компоненты напряженности МПЗ равны. Такой подход выбран из соображений удобства и вида функционала (13). Стандартное отклонение $\sigma$ ошибок в данных измерений и ковариационная матрица оценки $x_*$ находятся по формулам

$$\sigma^2 = \frac{\Psi(x_*)}{3(N-2)}, \quad K_x = \sigma^2 C_*^{-1} = \| K_{ij} \|_{i,j=1}^{6}.$$

Здесь $C_*$ – матрица $\| C_{ij} \|$, вычисленная в точке $x_*$. Точность оценки $x_*$ будем характеризовать стандартными отклонениями $\sqrt{K_{ii}}$ $(i = 1, 2, \ldots 6)$. Стандартные отклонения величин $z_j^*$ и $\xi_j^*$ по-прежнему будем обозначать $\sigma_{zj}$ и $\sigma_{\xi j}$.

Результаты реконструкции движения станции по магнитным измерениям (11) на трех рассмотренных в пп. 4, 5 отрезках времени представлены на рис. 14 – 19. На рис. 14, 16 и 18 с индексом (а) представлены ошибки аппроксимации этих данных – ломаные, звенья которых соединяют соседние по времени точки $\left(t_n, \tilde{H}_i^{(n)} - \hat{H}_i(t_n)\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$. Отвечающая каждому значению $i = 1, 2, 3$ ломаная изображена в отдельной системе координат. На рис. 14, 16 и 18 с индексом (б) представлены графики отклонения решений $Q(t)$ уравнений (1), (5), аппроксимирующих измерения (12), от телеметрических значений кватерниона (2) на тех же отрезках времени. Отклонения выражены в терминах вектора бесконечно малого поворота $\Delta\boldsymbol{\varphi}_k$ (см. п. 4). Эти графики суть ломаные, звенья которых последовательно соединяют точки $\left(t'_k, \Delta\phi_i^{(k)}\right)$, где

$$\Delta\boldsymbol{\varphi}_k = \left(\Delta\phi_1^{(k)}, \Delta\phi_2^{(k)}, \Delta\phi_3^{(k)}\right) = 2\,\mathrm{Im}[Q^{-1}(t'_k) \circ (q_0^{(k)}, q_1^{(k)}, q_2^{(k)} q_3^{(k)})], \quad t'_k \in I.$$

Приведенные графики дают представление о точности построенных реконструкций движения станции. В случае режима орбитальной ориентации (рис. 14, 18) ошибки реконструкции не превышают 0.6° для каждой компоненты $\Delta\phi_i^{(k)}$ вектора бесконечно малого поворота $\Delta\boldsymbol{\varphi}_k$. В случае разворота (рис. 16) эти ошибки не превышают 0.5° для двух компонент этого вектора и 1.2° для одной компоненты.

На рис. 15, 17 и 19 построены собственно реконструкции движения станции. На рисунках с индексом (а) приведены графики функций (5); на рисунках с индексом (б) – графики углов Крылова относительно орбитальной системы координат, рассчитанные по решениям уравнений (1), (5); на рисунках с индексом (в) повторены графики (б) и в тех же осях приведены графики углов Крылова, рассчитанные по соответствующим данным (2). Рисунки 15в, 17в и 19в дают информацию, аналогичную рис. 14б, 16б и 18б, но в других углах.

Некоторые характеристики найденных реконструкций приведены в подписях к рисункам. Для двух реконструкций укажем более детальные результаты. Для реконструкции на рис. 16, 17 имеем

$$z_1 = -0.0351, \quad z_2 = 0.8689, \quad z_3 = 0.6912,$$

$$\xi_1 = -1.22\cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1},\quad \xi_2 = -7.43\cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1},\quad \xi_3 = -5.04\cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1},$$
$$\sigma_{z1} = 2.6\cdot 10^{-4},\quad \sigma_{z2} = 2.5\cdot 10^{-4},\quad \sigma_{z3} = 4.3\cdot 10^{-4},$$
$$\sigma_{\xi 1} = 4.1\cdot 10^{-7}\,\text{с}^{-1},\quad \sigma_{\xi 2} = 2.9\cdot 10^{-7}\,\text{с}^{-1},\quad \sigma_{\xi 3} = 1.4\cdot 10^{-7}\,\text{с}^{-1}.$$

Собственные числа матрицы $C_*$ составляют 75, 208, 301, 3037, 3517, 12655. Для реконструкции, представленной на рис. 18, 19, было получено

$$\sigma = 274\gamma,\quad z_1 = -0.1761,\quad z_2 = -0.1305,\quad z_3 = -0.0663,$$
$$\xi_1 = -3.94\cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1},\quad \xi_2 = 8.90\cdot 10^{-7}\,\text{с}^{-1},\quad \xi_3 = 3.66\cdot 10^{-7}\,\text{с}^{-1},$$
$$\sigma_{z1} = 7.2\cdot 10^{-5},\quad \sigma_{z2} = 9.0\cdot 10^{-5},\quad \sigma_{z3} = 8.9\cdot 10^{-5},$$
$$\sigma_{\xi 1} = 3.6\cdot 10^{-7}\,\text{с}^{-1},\quad \sigma_{\xi 2} = 2.0\cdot 10^{-7}\,\text{с}^{-1},\quad \sigma_{\xi 3} = 1.3\cdot 10^{-7}\,\text{с}^{-1}.$$

Собственные числа матрицы $C_*$ составляют 213, 684, 1384, 12901, 15670, 26498. Как видим, задача аппроксимации данных (12) решением уравнений (1), (5) является хорошо обусловленной.

Полученные результаты характеризуют предельные или близкие к предельным оценки точности реконструкции движения станции по магнитным измерениям для данного магнитометра. Они были получены в рафинированной ситуации, когда матрица $B$ перехода от строительной системы СМ к собственной системе координат магнитометра специально уточнялась для каждого обрабатываемого отрезка данных.

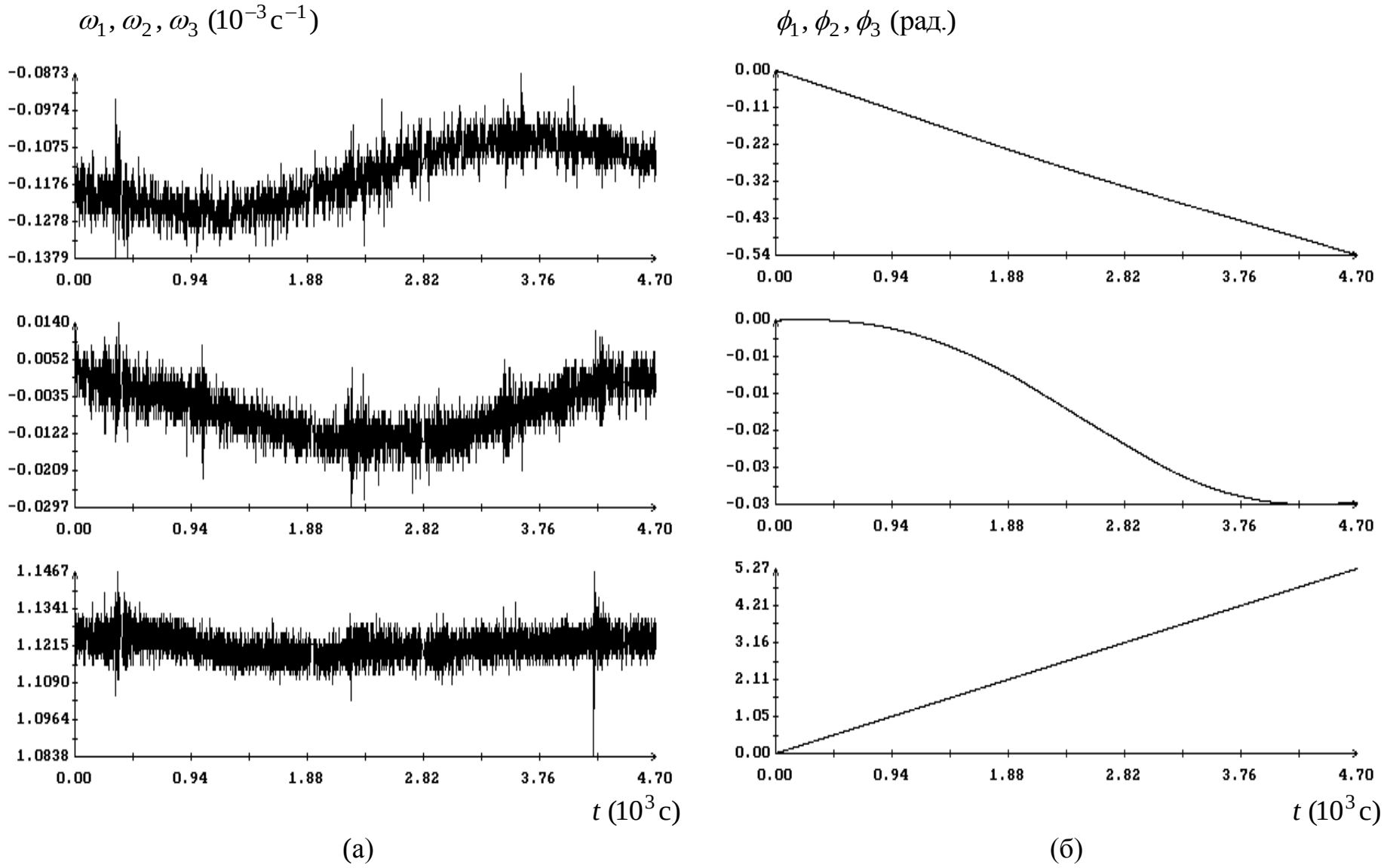
Поскольку оценки углов $\alpha, \beta, \gamma$, задающих матрицу $B^\circ$ (см. п. 5), довольно слабо варьируются от отрезка к отрезку, имеет смысл попытаться выполнить все реконструкции с единой матрицей $B^\circ$. Такие реконструкции были выполнены с матрицей, заданной углами $\alpha = -4.5°, \beta = \gamma = 0$. В этом случае формулы (12) использовались с указанной матрицей и $\Delta_1^\circ = \Delta_2^\circ = \Delta_3^\circ = 0$. Как оказалось, новые реконструкции практически не отличаются от первоначальных. Примеры новых реконструкций представлены на рис. 20, 21. На рисунках с индексом (а) приведены графики отклонения найденных решений $Q(t)$ уравнений (1), (5), аппроксимирующих данные (12), от телеметрических значений кватерниона (2) на тех же отрезках времени, на рисунках с индексом (б) приведены графики углов Крылова, рассчитанные по решениям уравнений (1), (5) и по соответствующим данным (2). Это значит, рассмотренное упрощение можно использовать на практике.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00423).

## Литература

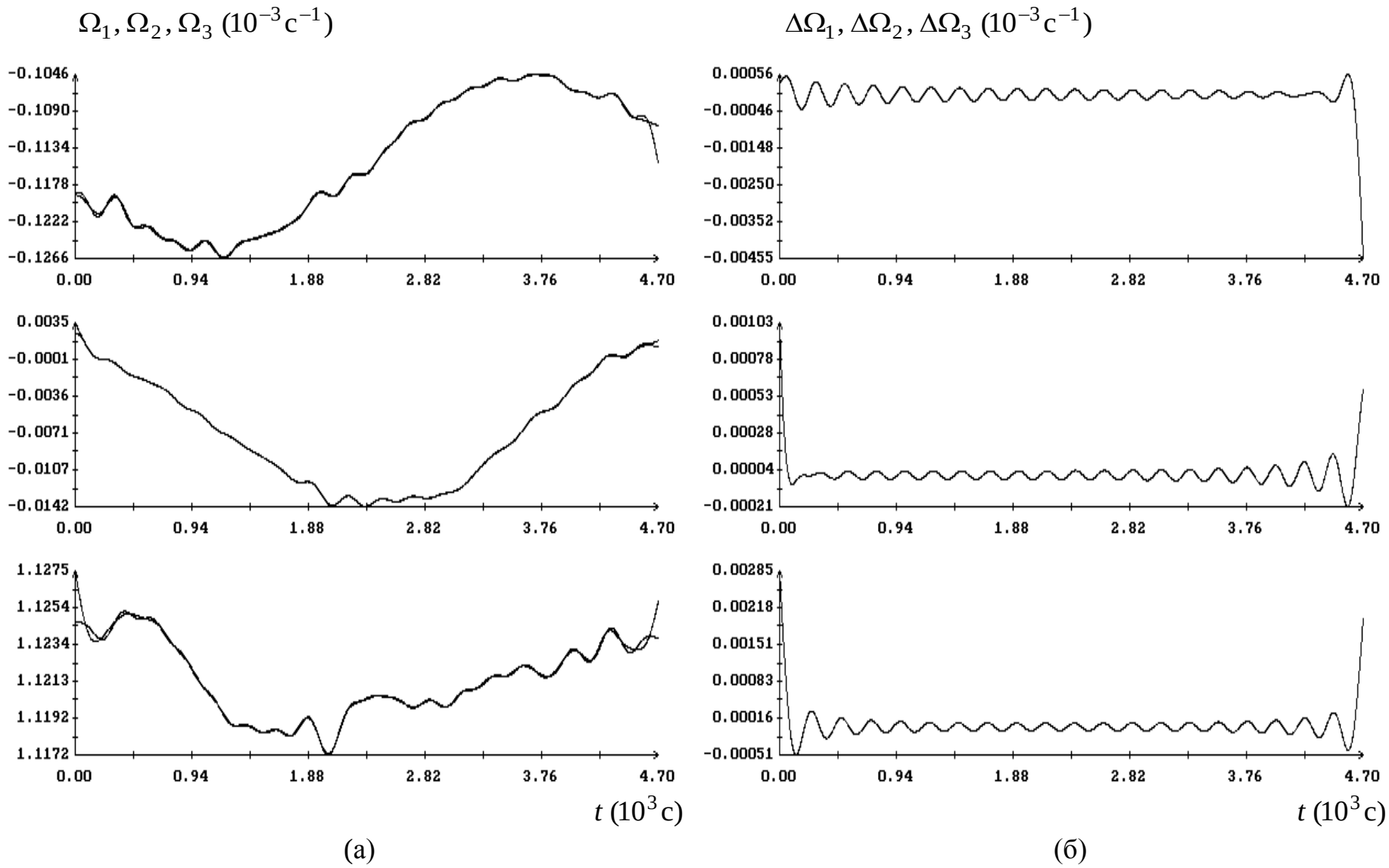
1. Абрашкин В.И., Воронов К.Е., Пияков И.В., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Определение движения спутника *Бион М-1* средствами аппаратуры ГРАВИТОН // Космические исследования. 2015. Т. 53. № 4. С. 306-319.

2. Абрашкин В.И., Воронов К.Е., Пияков И.В., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-4* // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 8.
3. Монтенбрук О., Пфлегер Т. Астрономия с персональным компьютером. М.: Мир, 1993.
4. Путин Г.Ф., Глухов А.Ф., Бабушкин И.А., Завалишин Д.А., Беляев М.Ю., Иванов А.А., Сазонов В.В. Исследование микроускорений на борту Международной космической станции с помощью датчика конвекции ДАКОН-М // Космические исследования. 2012. Т. 50. № 5. С. 373-379.
5. Беляев М.Ю., Монахов М.И., Сазонов В.В. Расчет квазистатических микроускорений, возникающих на борту Международной космической станции // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 60.
6. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.
7. Enright W.H., Jackson K.R., Norsett S.P., Thomsen P.G. Interpolants for Runge-Kutta formulas. ACM Transactions on Mathematical Software, 1986, vol. 12, No. 3, p. 193-213.
8. Беляев М.Ю., Монахов М.И., Сазонов В.В. Оценка точности показаний магнитометра, установленного на служебном модуле Международной космической станции // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 54.
9. Панкратов В.А., Сазонов В.В. Проверка согласованности данных измерений магнитометров, установленных на борту ИСЗ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. № 42.



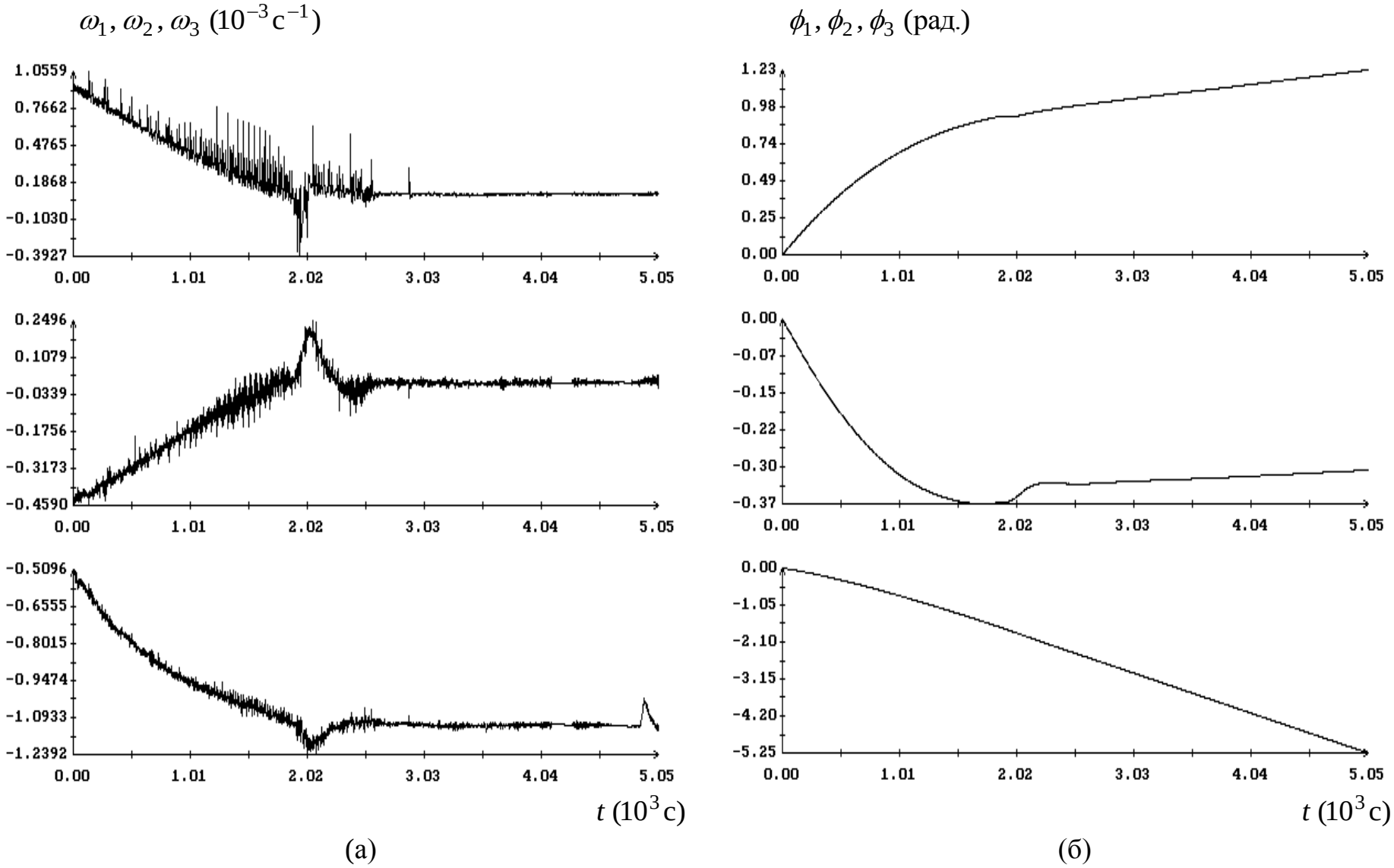

(а) (б)

Рис. 1. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 02:07:54 ДМВ 13.09.2014, $M = 4697$; (а) – телеметрические значения компонент угловой скорости, (б) – значения квазиуглов.



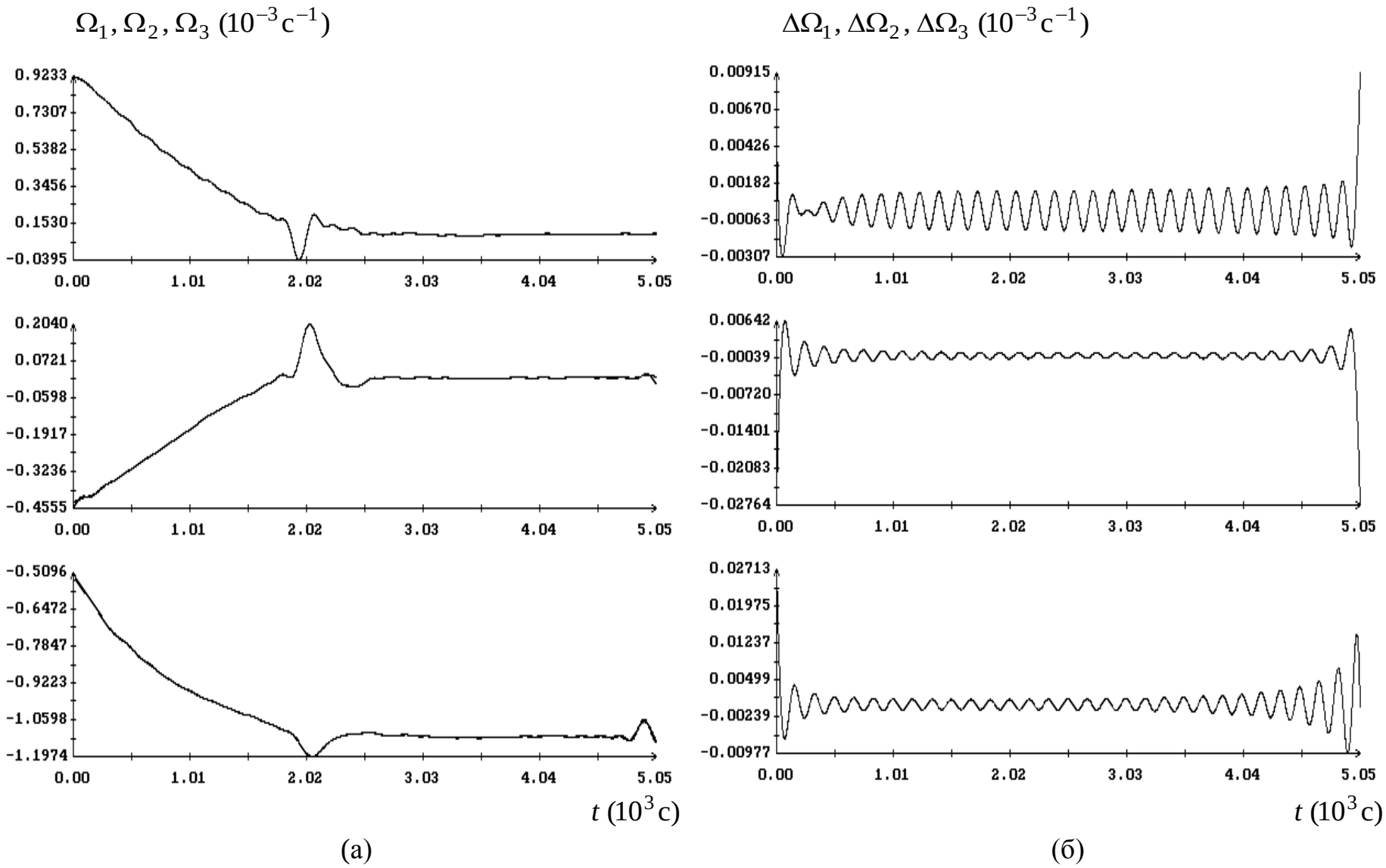

(а) (б)

Рис. 2. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 02:07:54 ДМВ 13.09.2014, $L = 40$; (а) – результаты сглаживания телеметрических значений угловой скорости двумя способами, (б) – разность этих результатов.




(а) (б)

Рис. 3. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 18:49:52 ДМВ 25.09.2014, $M = 5046$; (а) – телеметрические значения компонент угловой скорости, (б) – значения квазиуглов.




(а) (б)

Рис. 4. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 18:49:52 ДМВ 25.09.2014, $L = 60$; (а) – результаты сглаживания телеметрических значений угловой скорости двумя способами, (б) – разность этих результатов.

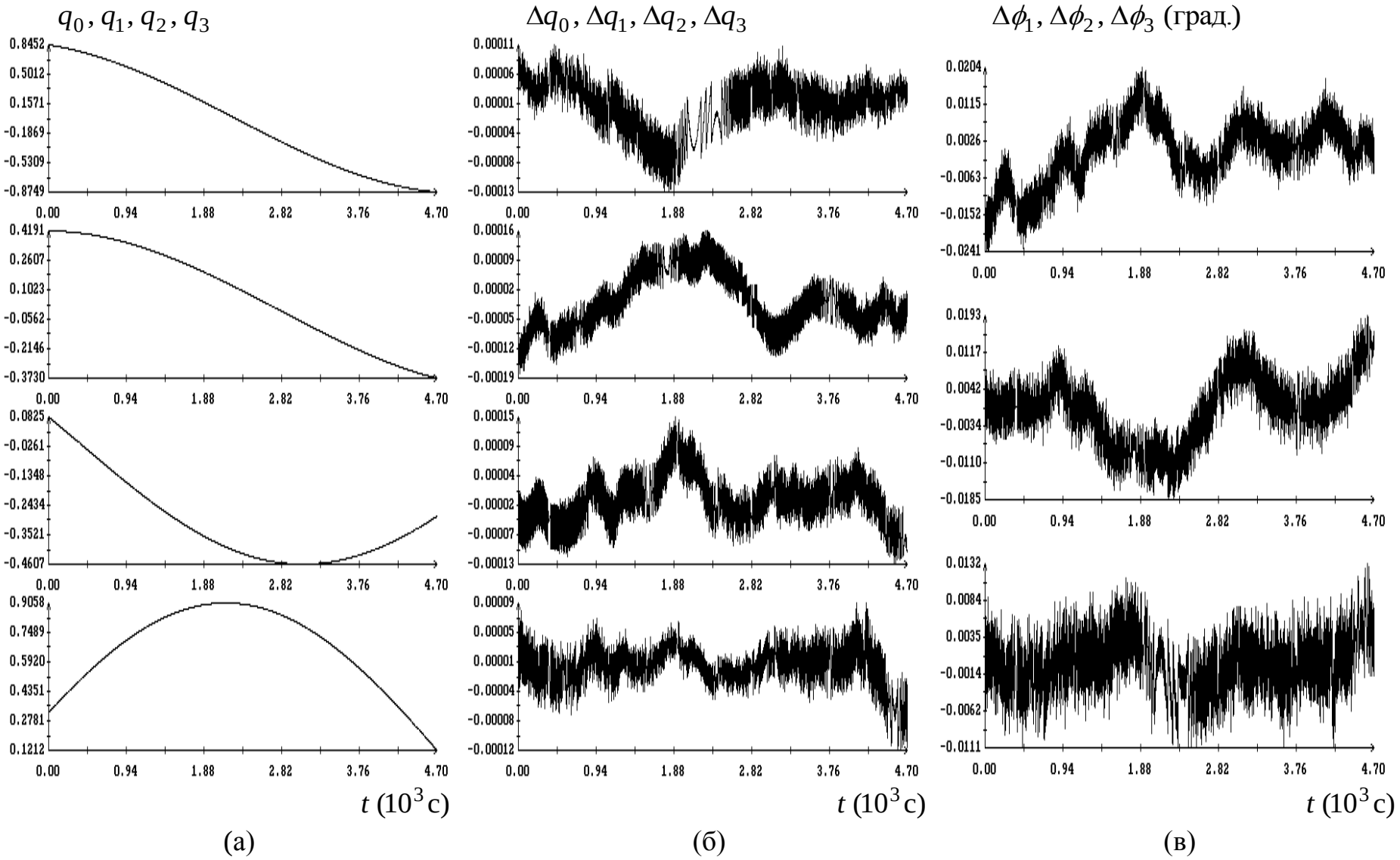
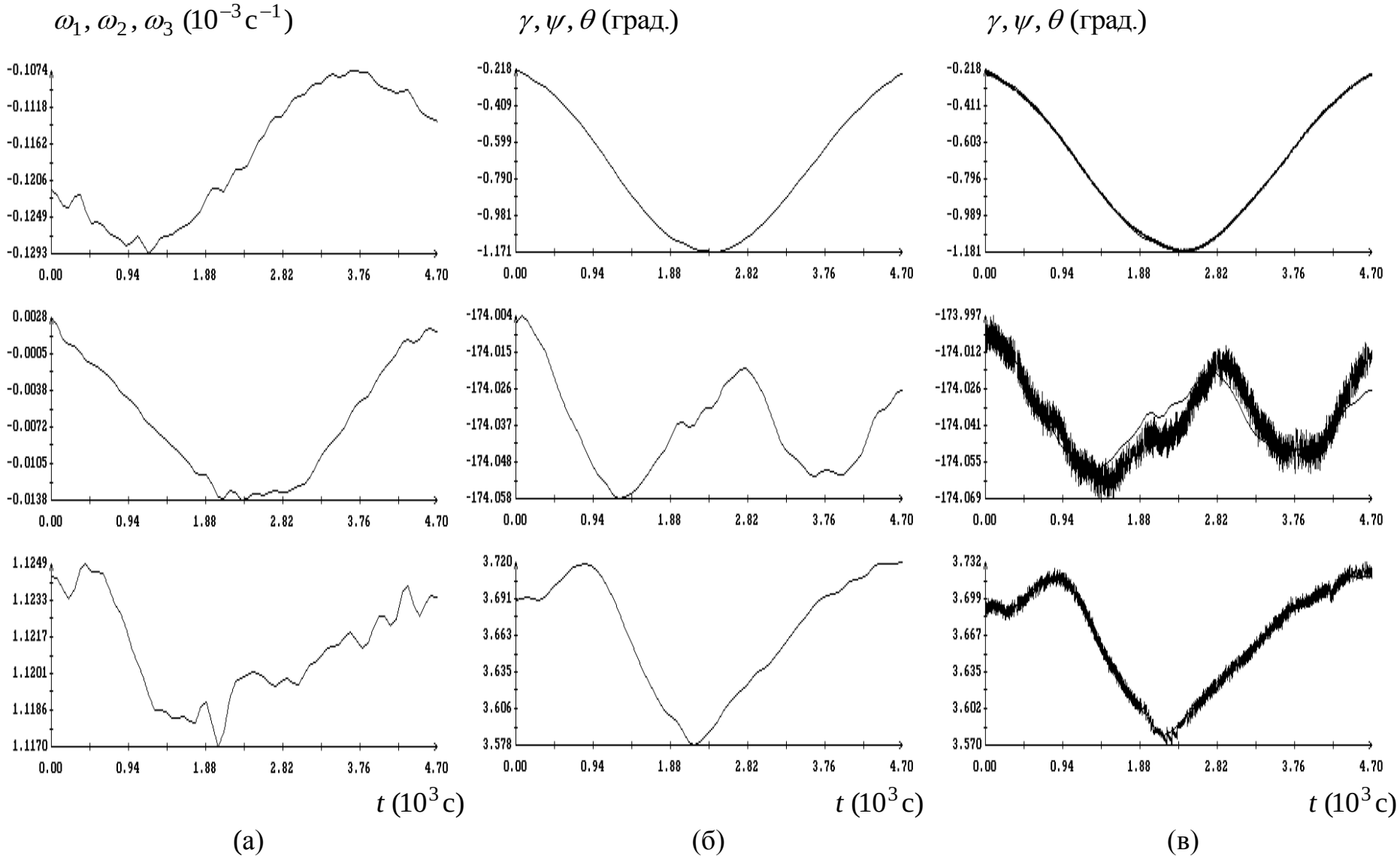



Рис. 5. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 02:07:54 ДМВ 13.09.2014, $\sigma_Q = 5.60 \cdot 10^{-5}$, (а) – телеметрические значения кватерниона и аппроксимирующее решение уравнений (1), (4); (б) и (в) – ошибка аппроксимации.




(а) (б) (в)

Рис. 6. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 02:07:54 ДМВ 13.09.2014; (а) – сглаженные телеметрические значения угловой скорости с учетом смещений, (б), (в) – углы СМ относительно орбитальной системы координат.

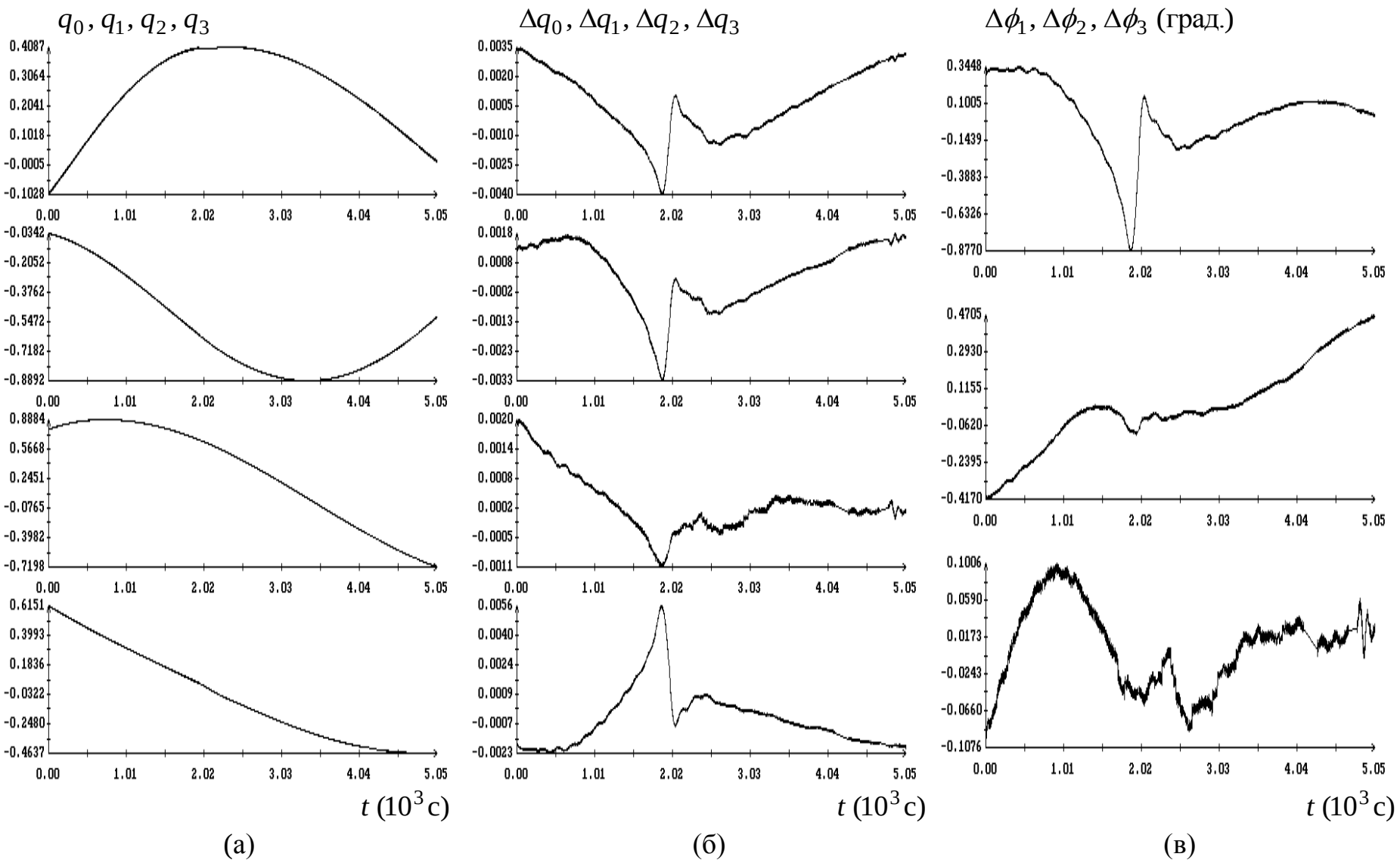
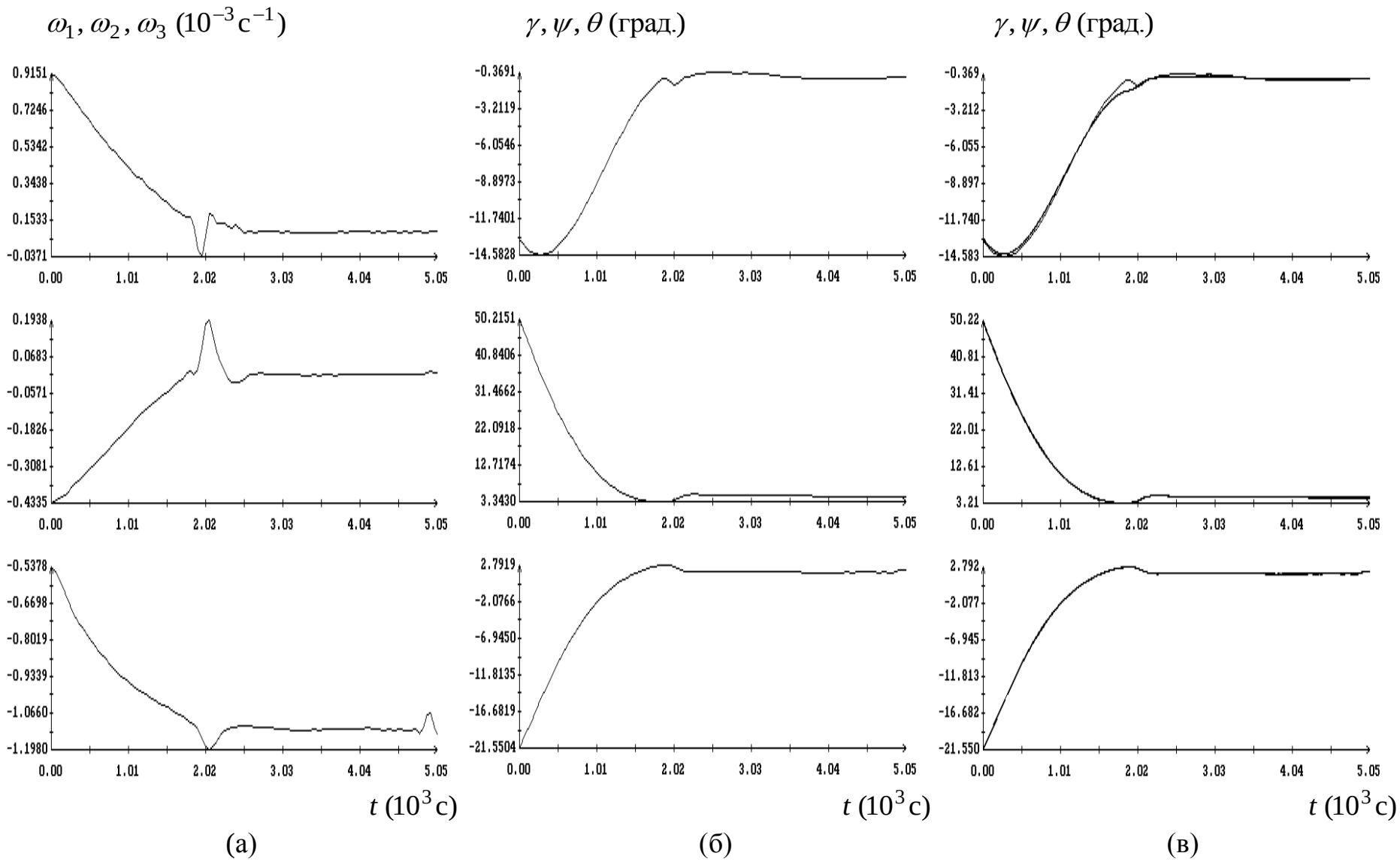



Рис. 7. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 18:49:52 ДМВ 25.09.2014, $\sigma_Q = 0.00160$, (а) – телеметрические значения кватерниона и аппроксимирующее решение уравнений (1), (4); (б) и (в) – ошибка аппроксимации.




(а) (б) (в)

Рис. 8. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 18:49:52 ДМВ 25.09.2014; (а) – сглаженные телеметрические значения угловой скорости с учетом смещений, (б), (в) – углы СМ относительно орбитальной системы координат.

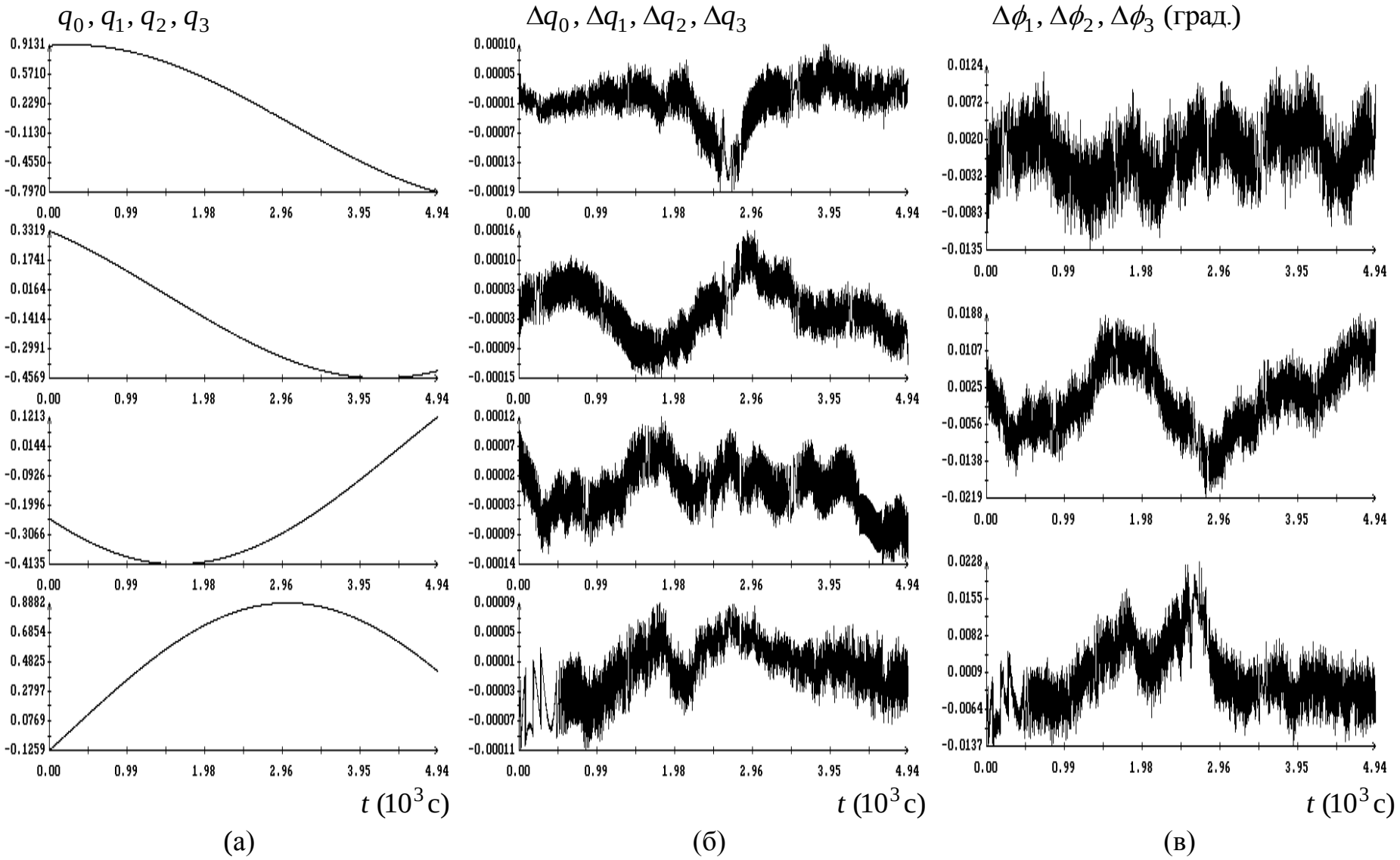
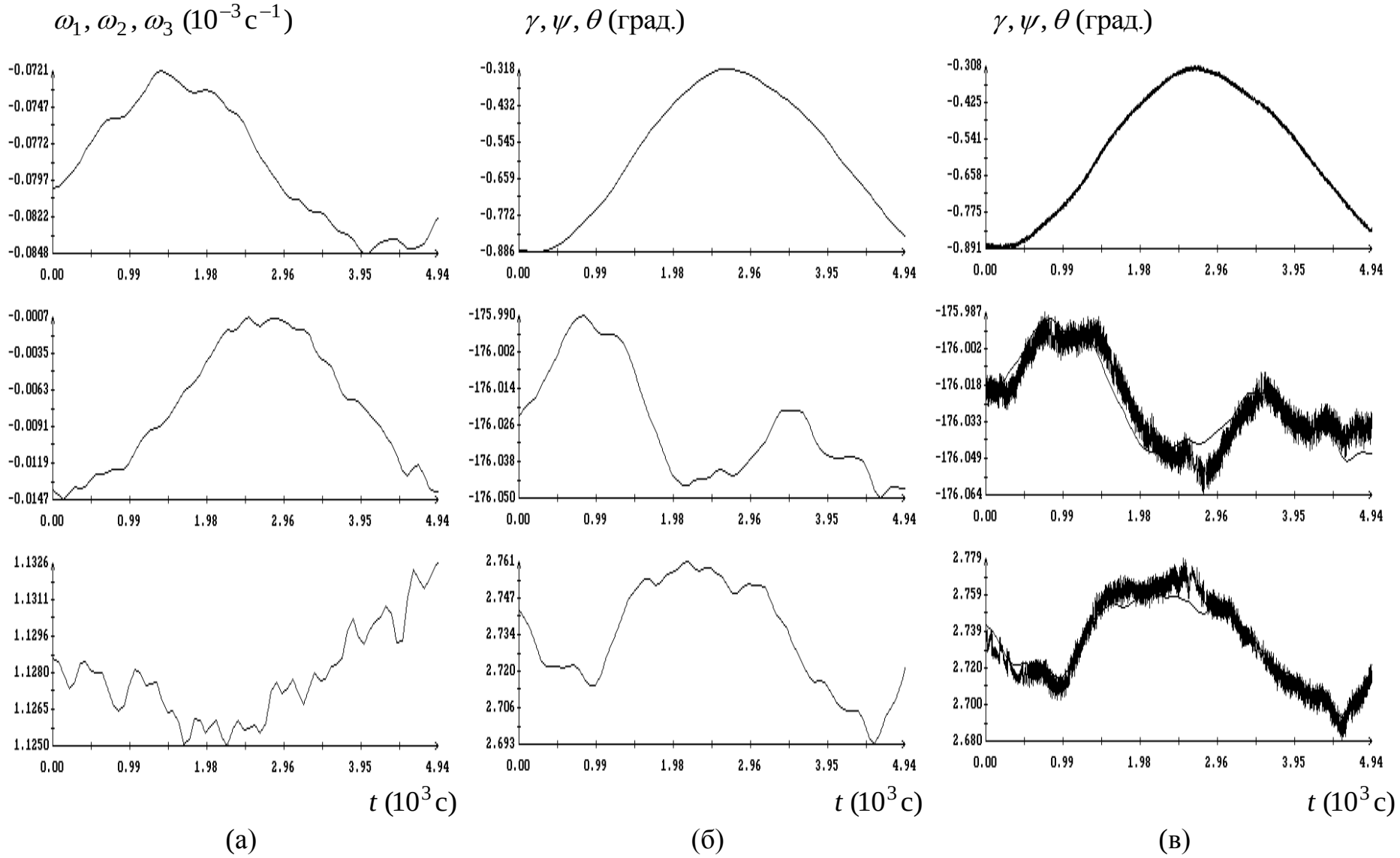
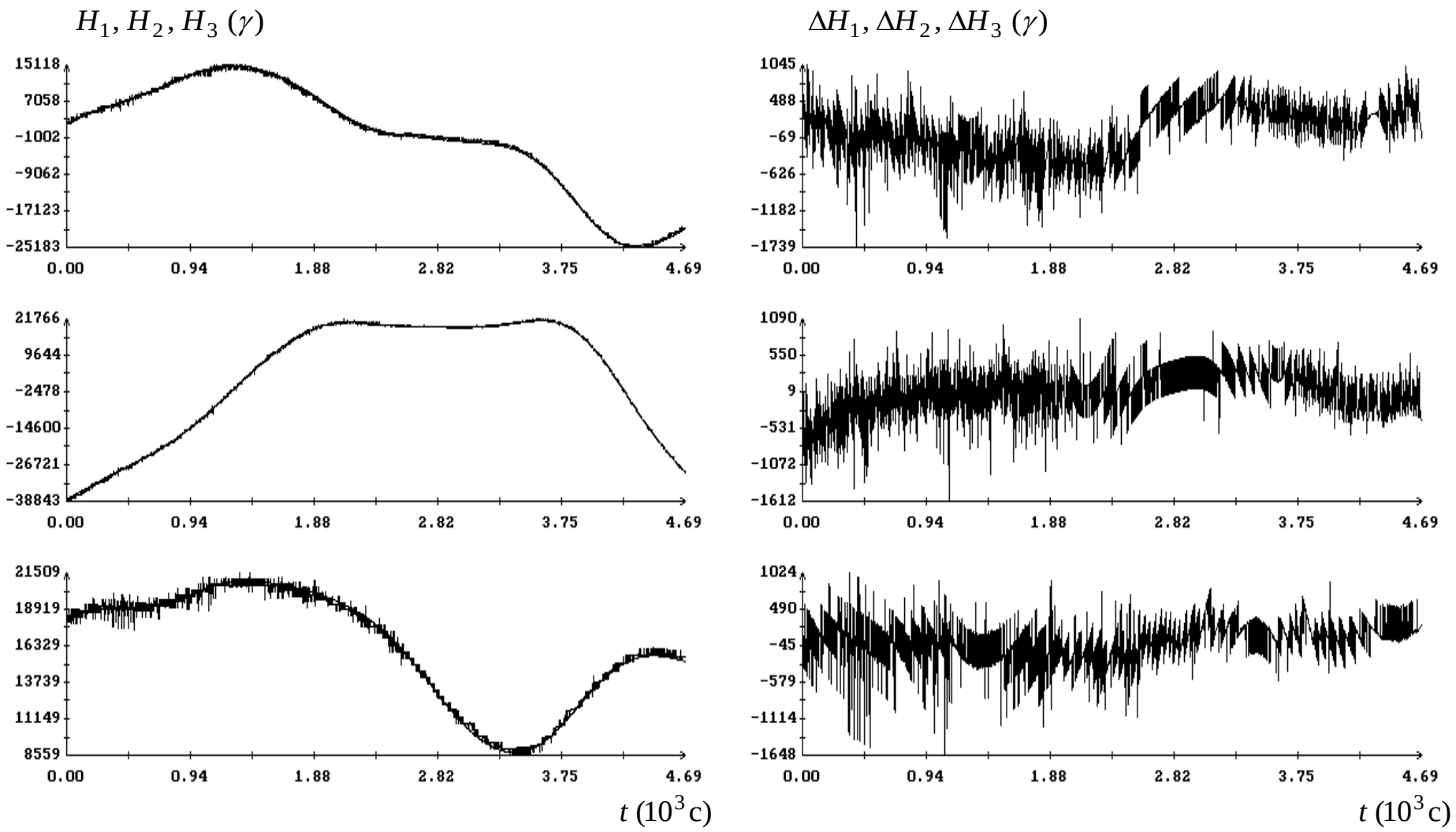



Рис. 9. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 11:44:40 ДМВ 19.02.2015, $\sigma_Q = 5.48 \cdot 10^{-5}$; (а) – телеметрические значения кватерниона и аппроксимирующее решение уравнений (1), (4); (б) и (в) – ошибка аппроксимации.



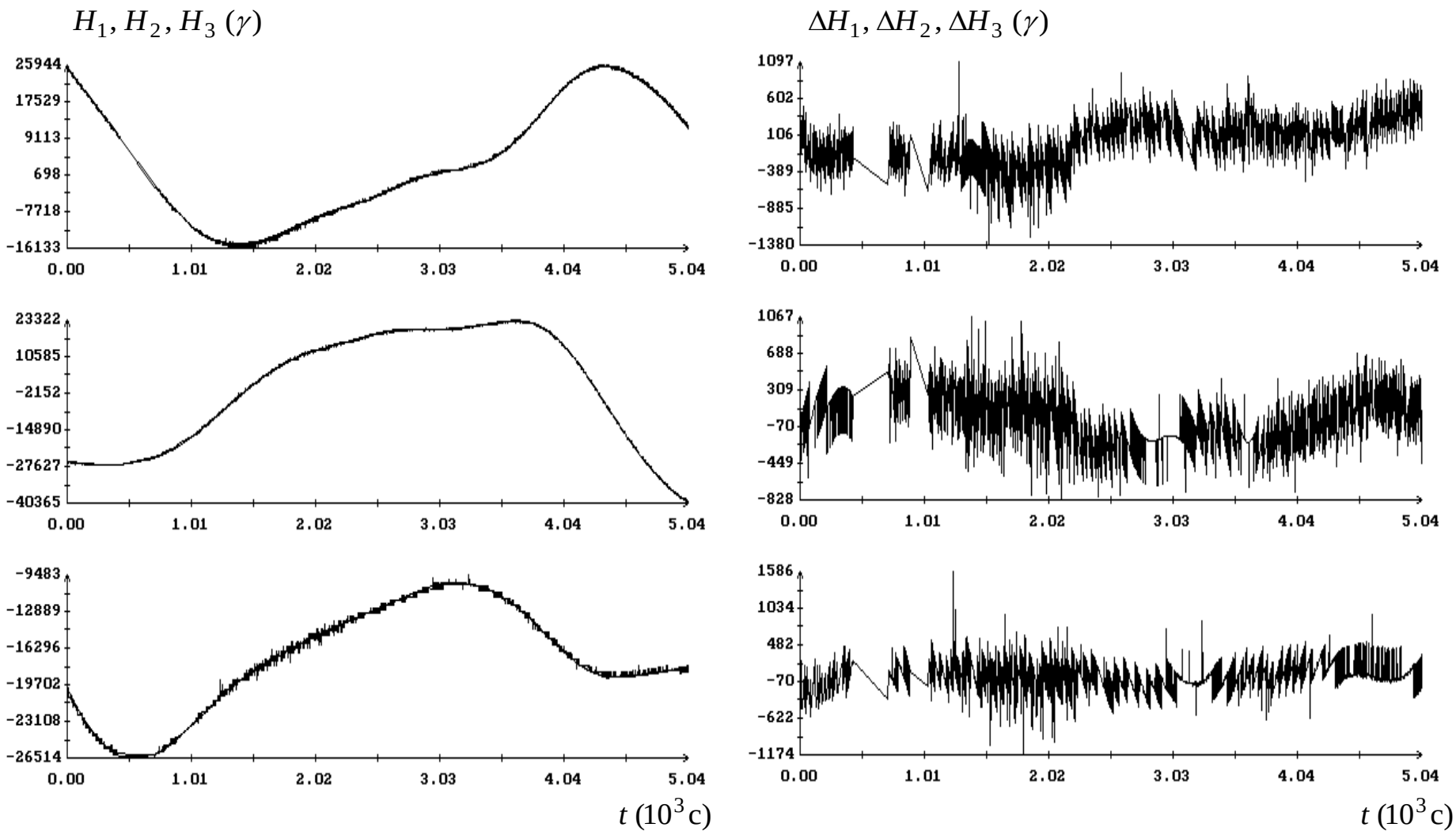

(а) (б) (в)

Рис. 10. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 11:44:40 ДМВ 19.02.2015, (а) – сглаженные телеметрические значения угловой скорости с учетом смещений, (б), (в) – углы СМ относительно орбитальной системы координат.



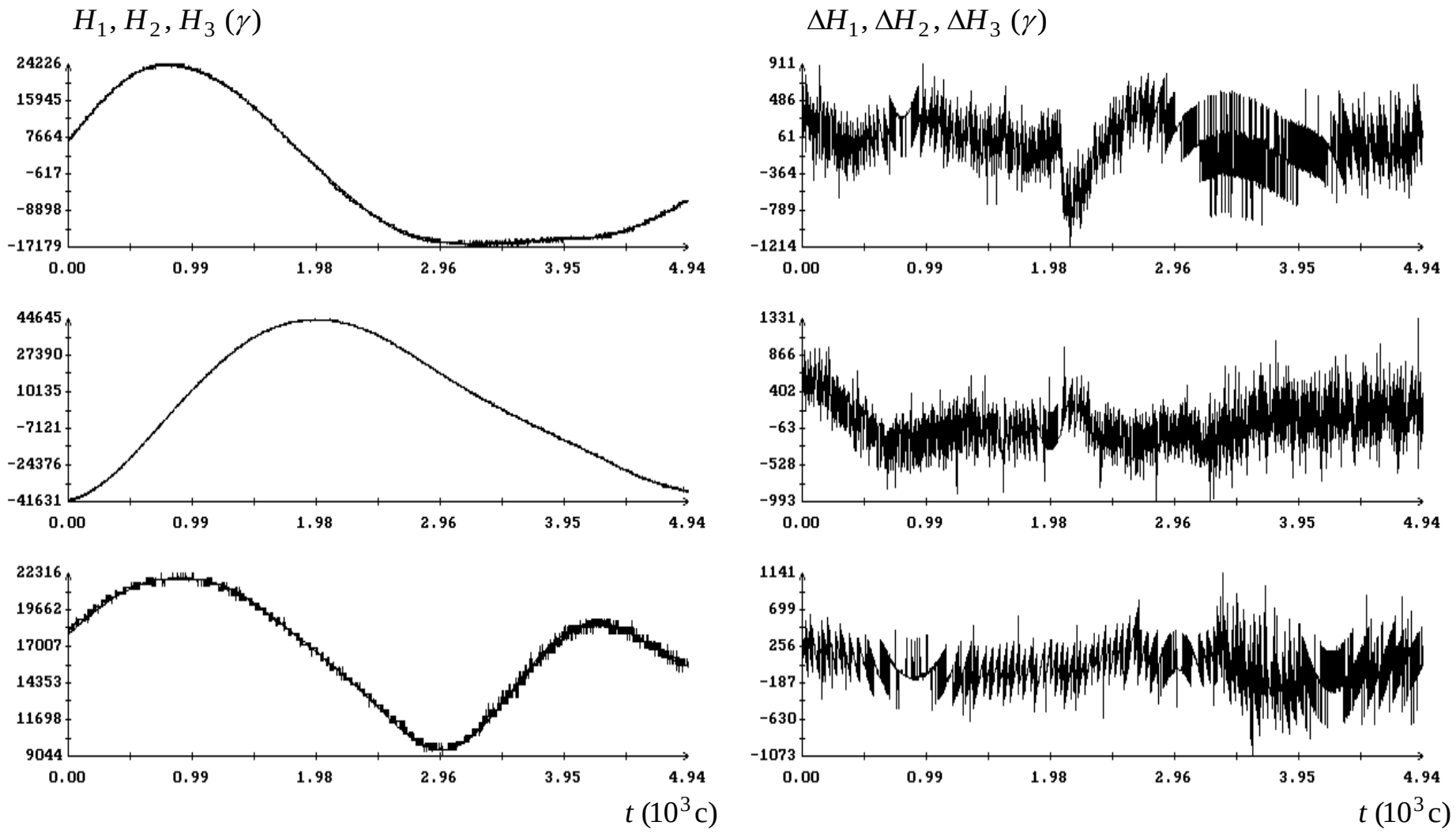

(а) (б)

Рис. 11. (а) – измерения магнитометра, пересчитанные в систему $y_1 y_2 y_3$, и их расчетные аналоги, (б) – разности измерений и расчетных аналогов; момент $t = 0$ на графиках отвечает 02:07:54 ДМВ 13.09.2014, $N = 3322$, $\tau = 2$с, $\kappa = 1.025$, $\sigma_H = 350\gamma$, $\Delta_1 = -560\gamma$, $\Delta_2 = 674\gamma$, $\Delta_3 = -713\gamma$, $\alpha = -4.397°$, $\beta = 0.354°$, $\gamma = 0.402°$.



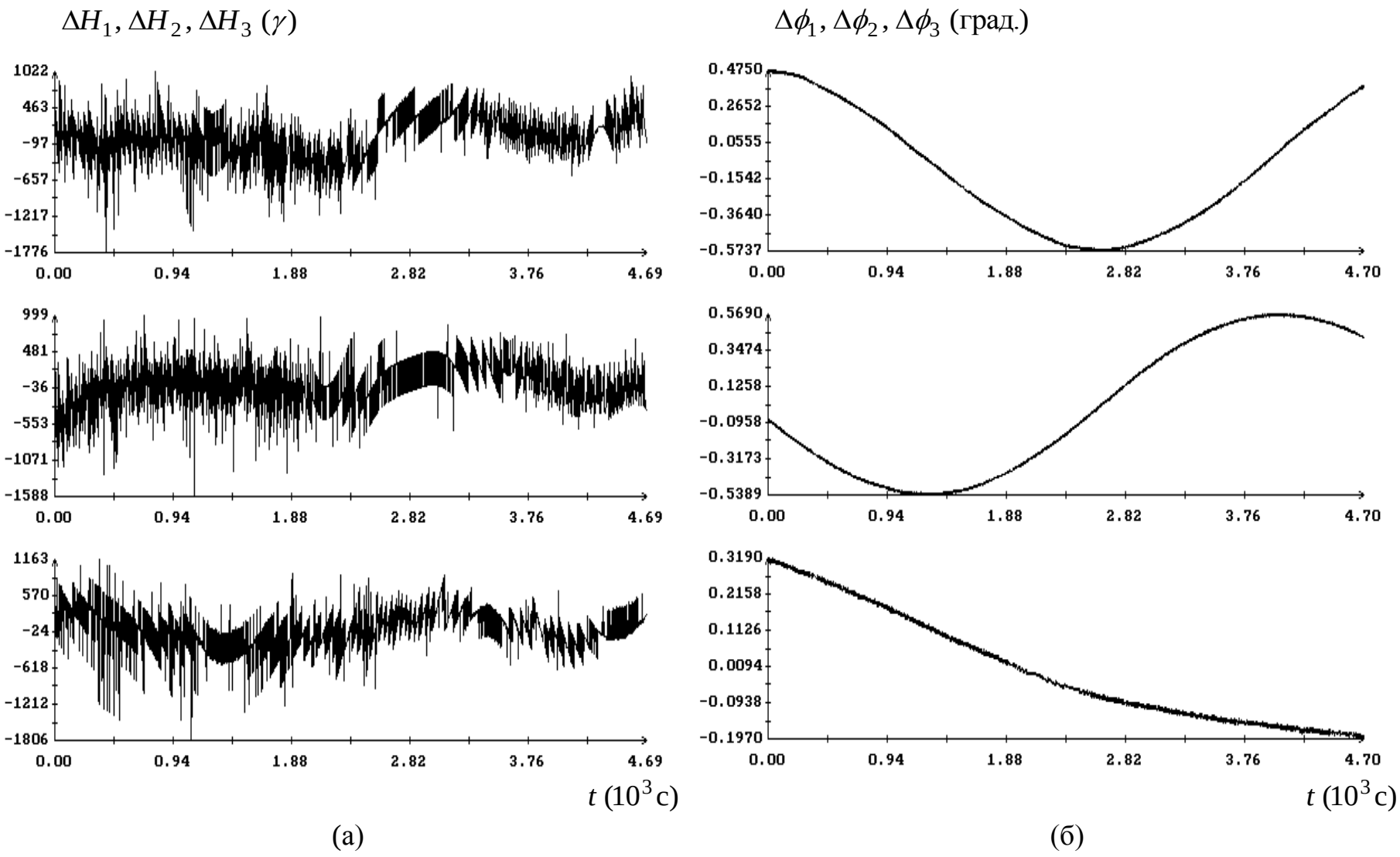

(а) (б)

Рис. 12. (а) – измерения магнитометра, пересчитанные в систему $y_1 y_2 y_3$, и их расчетные аналоги, (б) – разности измерений и расчетных аналогов; момент $t = 0$ на графиках отвечает 18:49:50 ДМВ 25.09.2014, $N = 2790$, $\tau = 2$с, $\kappa = 1.015$, $\sigma_H = 283\gamma$, $\Delta_1 = -207\gamma$, $\Delta_2 = 254\gamma$, $\Delta_3 = 687\gamma$, $\alpha = -4.888°$, $\beta = -0.263°$, $\gamma = -0.252°$.



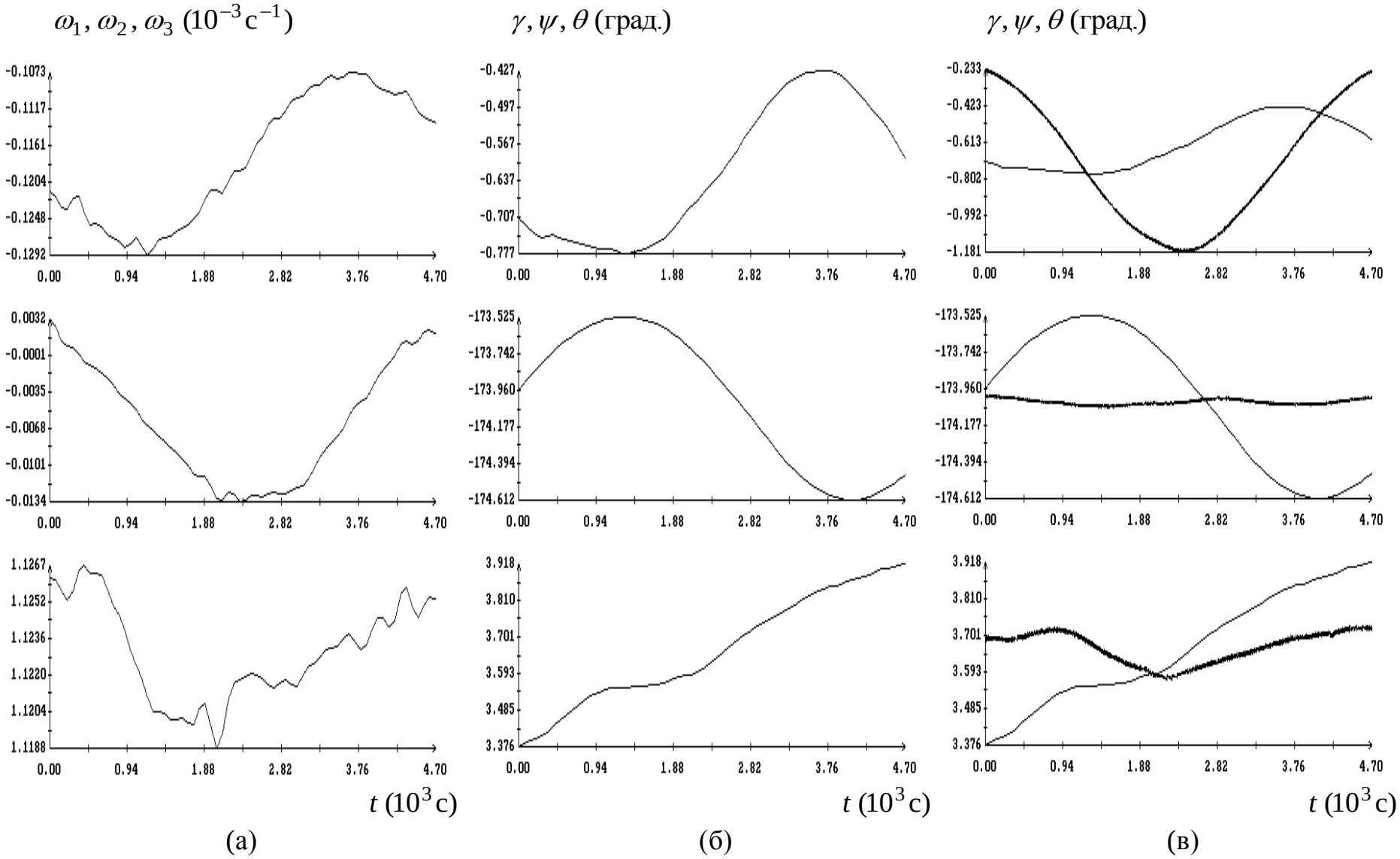

(а) (б)

Рис. 13. (а) – измерения магнитометра, пересчитанные в систему $y_1 y_2 y_3$, и их расчетные аналоги, (б) – разности измерений и расчетных аналогов; момент $t = 0$ на графиках отвечает 17:02:59 ДМВ 19.02.2015, $N = 3251$, $\tau = 3$с, $\kappa = 1.010$, $\sigma_H = 285\gamma$, $\Delta_1 = -305\gamma$, $\Delta_2 = 645\gamma$, $\Delta_3 = -654\gamma$, $\alpha = -4.464°$, $\beta = 0.204°$, $\gamma = 0.007°$.



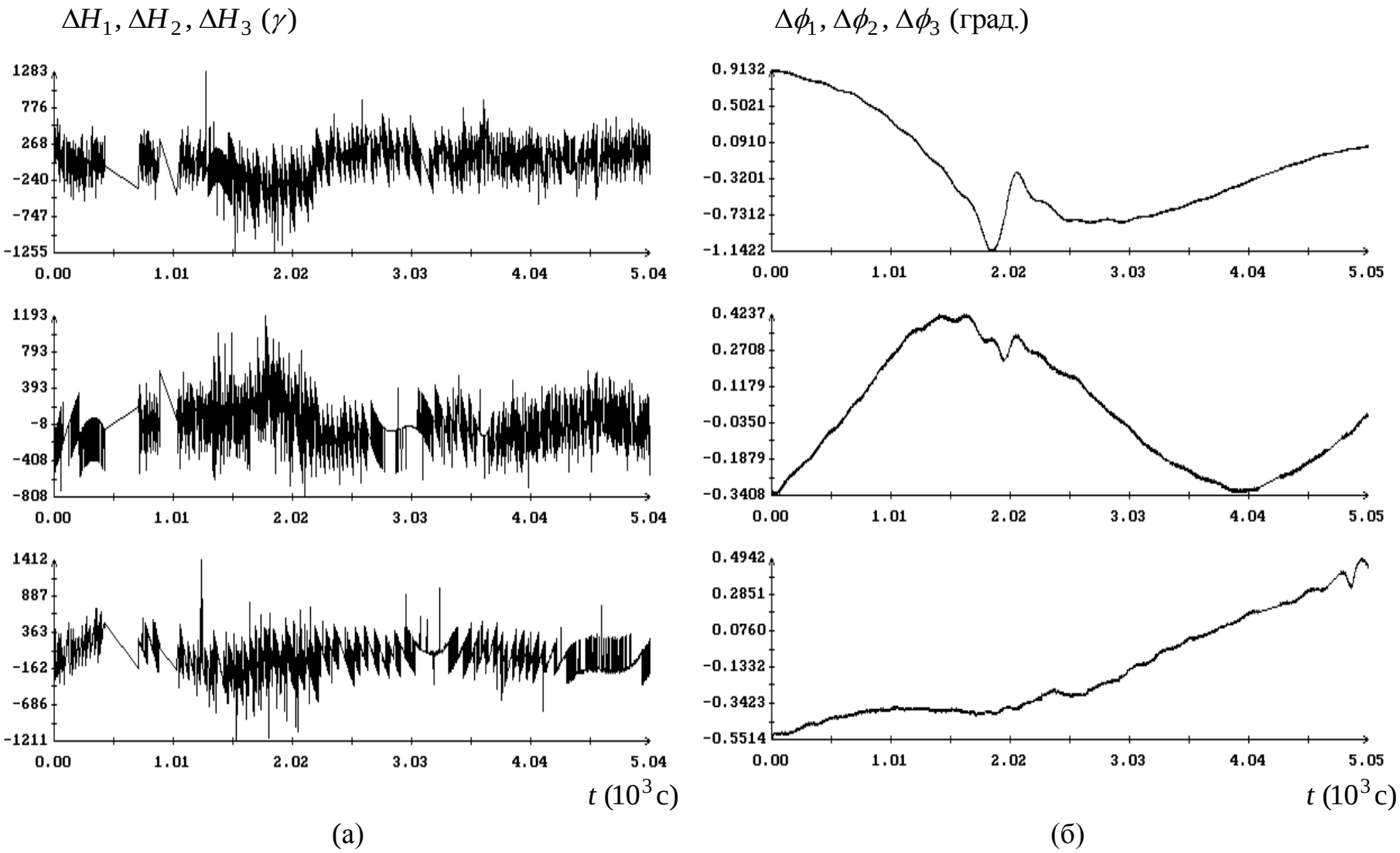

(а) (б)

Рис. 14. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 02:07:54 ДМВ 13.09.2014; (а) – ошибки аппроксимации магнитных измерений, (б) – ошибки аппроксимации телеметрических значений кватерниона; $\sigma = 328\gamma$, $\xi_1 = -2.66 \cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1}$, $\xi_2 = 7.05 \cdot 10^{-7}\,\text{с}^{-1}$, $\xi_3 = 1.57 \cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1}$, $\Delta_1 = 7.9\gamma$, $\Delta_2 = -47.4\gamma$, $\Delta_3 = 37.0\gamma$.



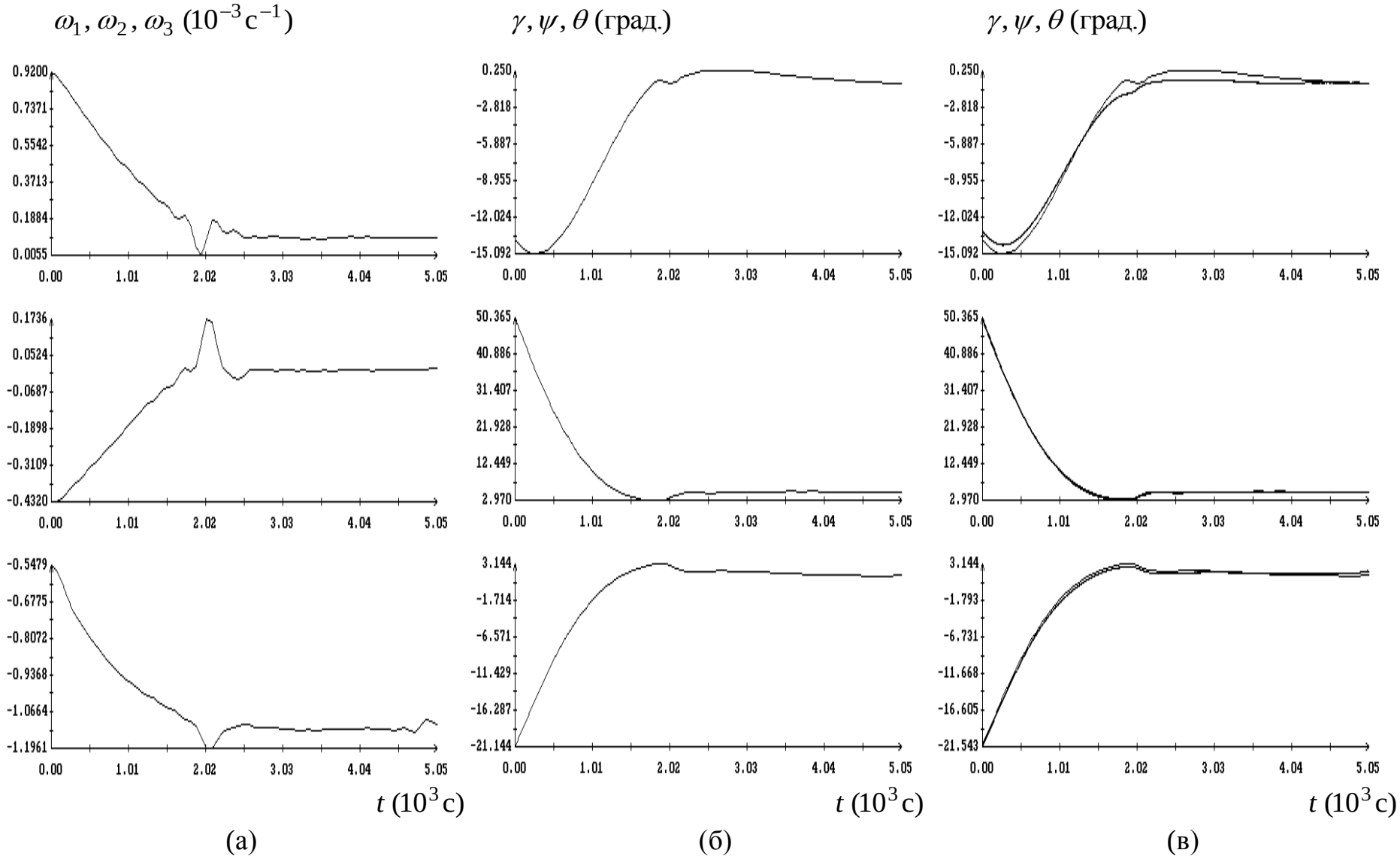

(а) (б) (в)

Рис. 15. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 02:07:54 ДМВ 13.09.2014; (а) – сглаженные телеметрические значения угловой скорости с учетом смещений, (б), (в) – углы СМ относительно орбитальной системы координат.



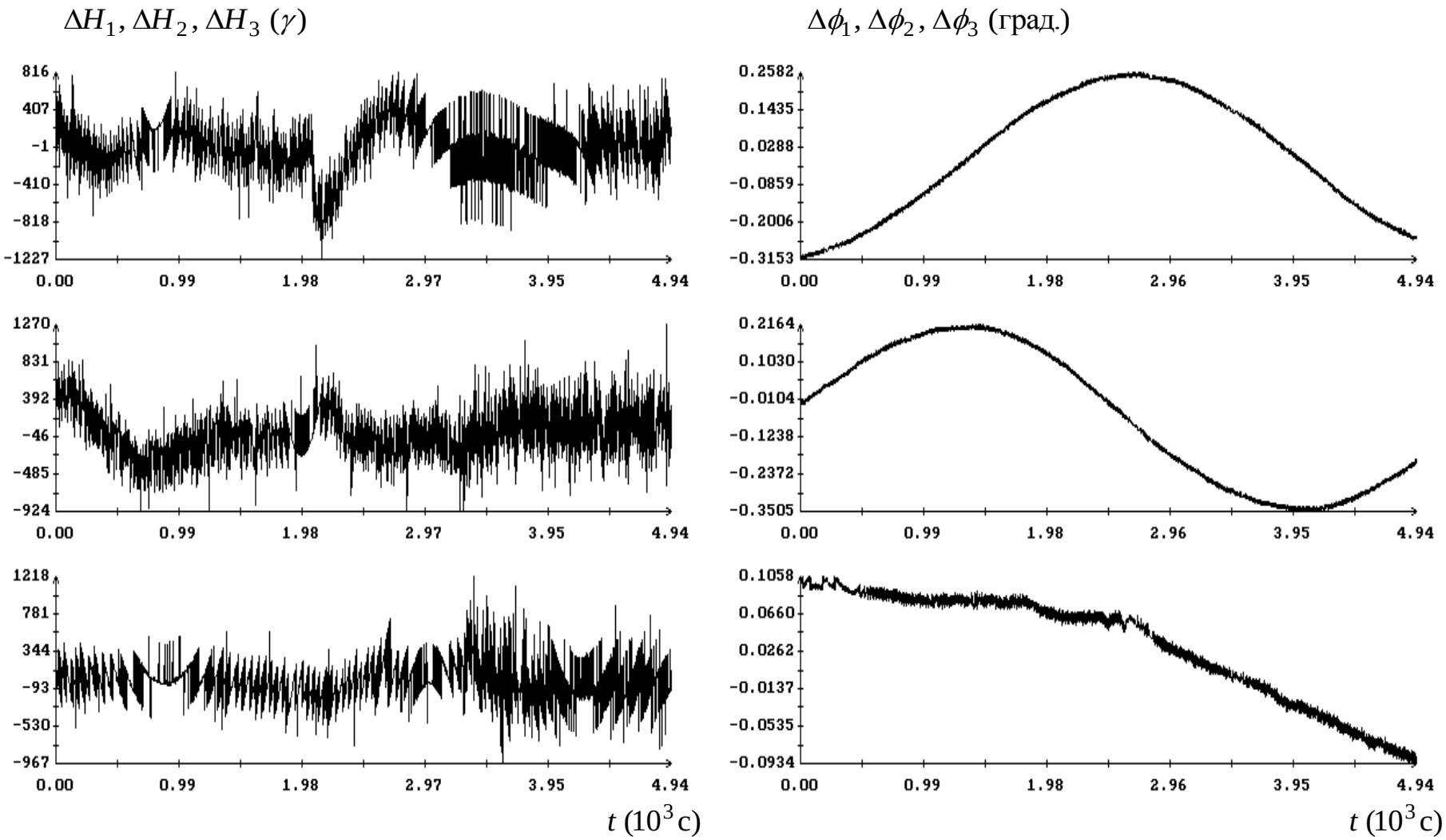

(а) (б)

Рис. 16. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 18:49:52 ДМВ 25.09.2014; (а) – ошибки аппроксимации магнитных измерений, (б) – ошибки аппроксимации телеметрических значений кватерниона; $\sigma = 258\gamma$, $\xi_1 = -1.22 \cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1}$, $\xi_2 = -7.43 \cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1}$, $\xi_3 = -5.04 \cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1}$, $\Delta_1 = -8.0\gamma$, $\Delta_2 = 15.2\gamma$, $\Delta_3 = 92.5\gamma$.




(а) (б) (в)

Рис. 17. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 18:49:52 ДМВ 25.09.2014; (а) – сглаженные телеметрические значения угловой скорости с учетом смещений, (б), (в) – углы СМ относительно орбитальной системы координат.




(а) (б)

Рис. 18. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 11:44:40 ДМВ 19.02.2015; (а) – ошибки аппроксимации магнитных измерений, (б) – ошибки аппроксимации телеметрических значений кватерниона; $\sigma = 274\gamma$, $\xi_1 = -3.94 \cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1}$, $\xi_2 = 8.90 \cdot 10^{-7}\,\text{с}^{-1}$, $\xi_3 = 3.66 \cdot 10^{-7}\,\text{с}^{-1}$, $\Delta_1 = 37.3\gamma$, $\Delta_2 = -17.5\gamma$, $\Delta_3 = -15.0\gamma$.

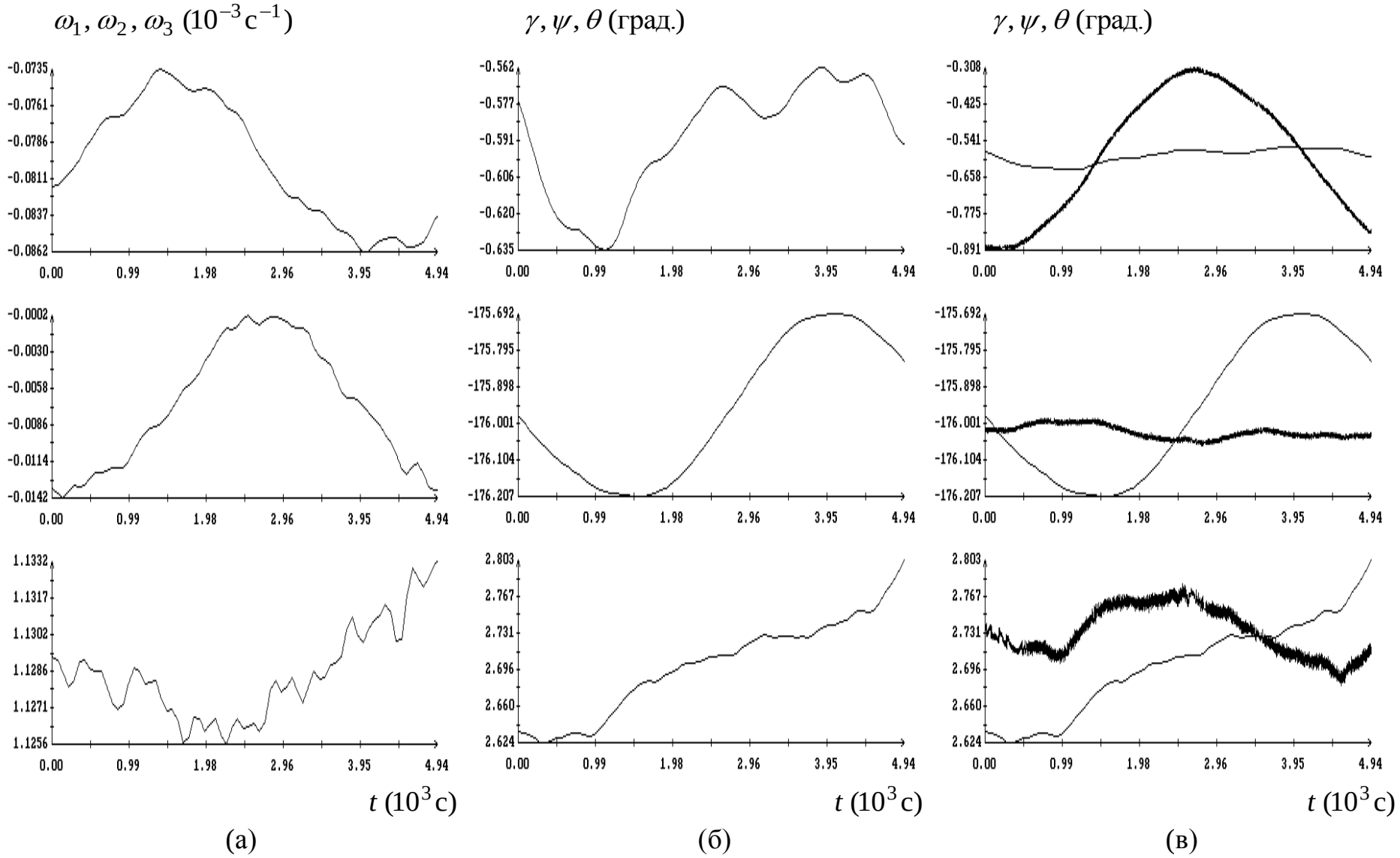
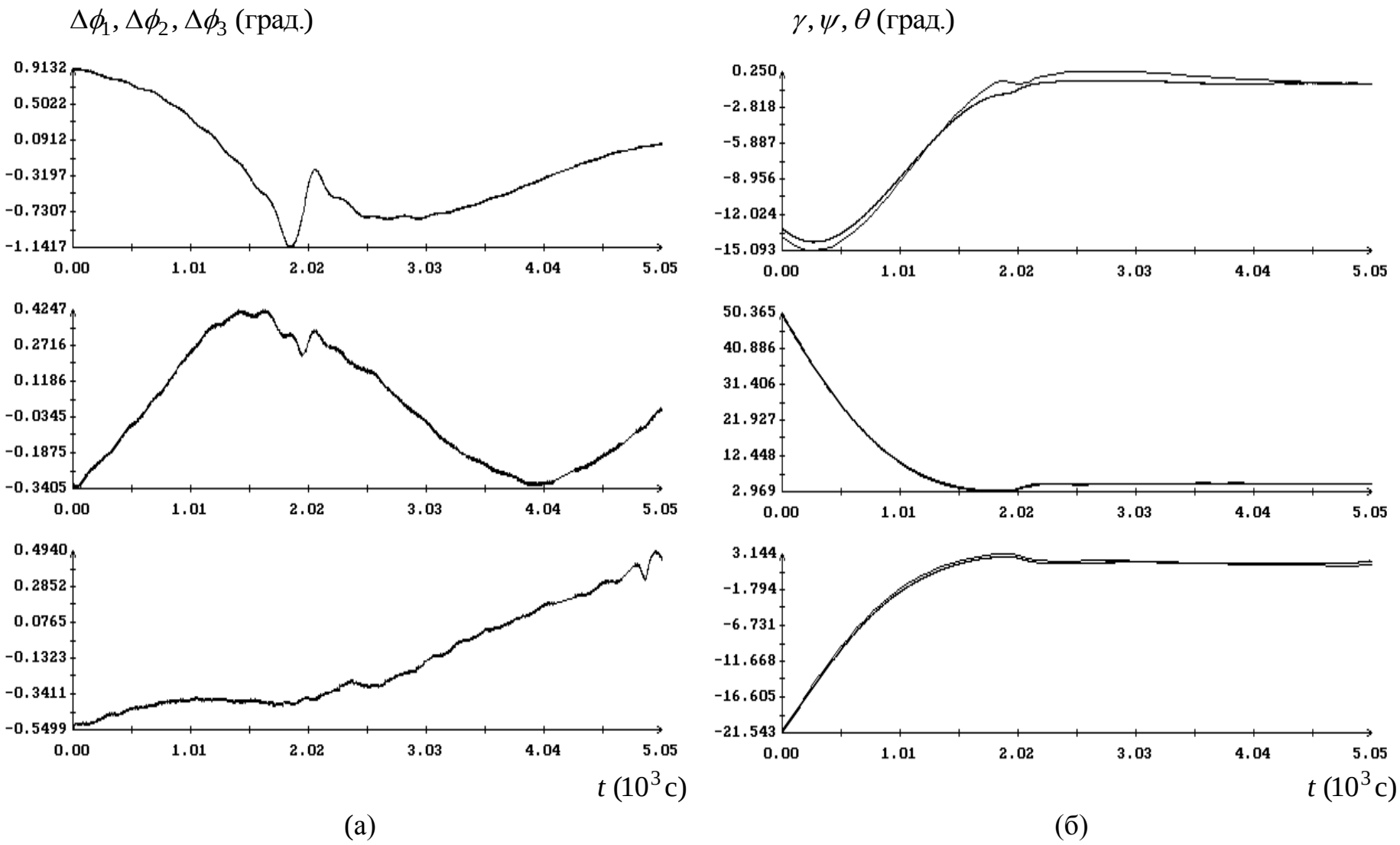
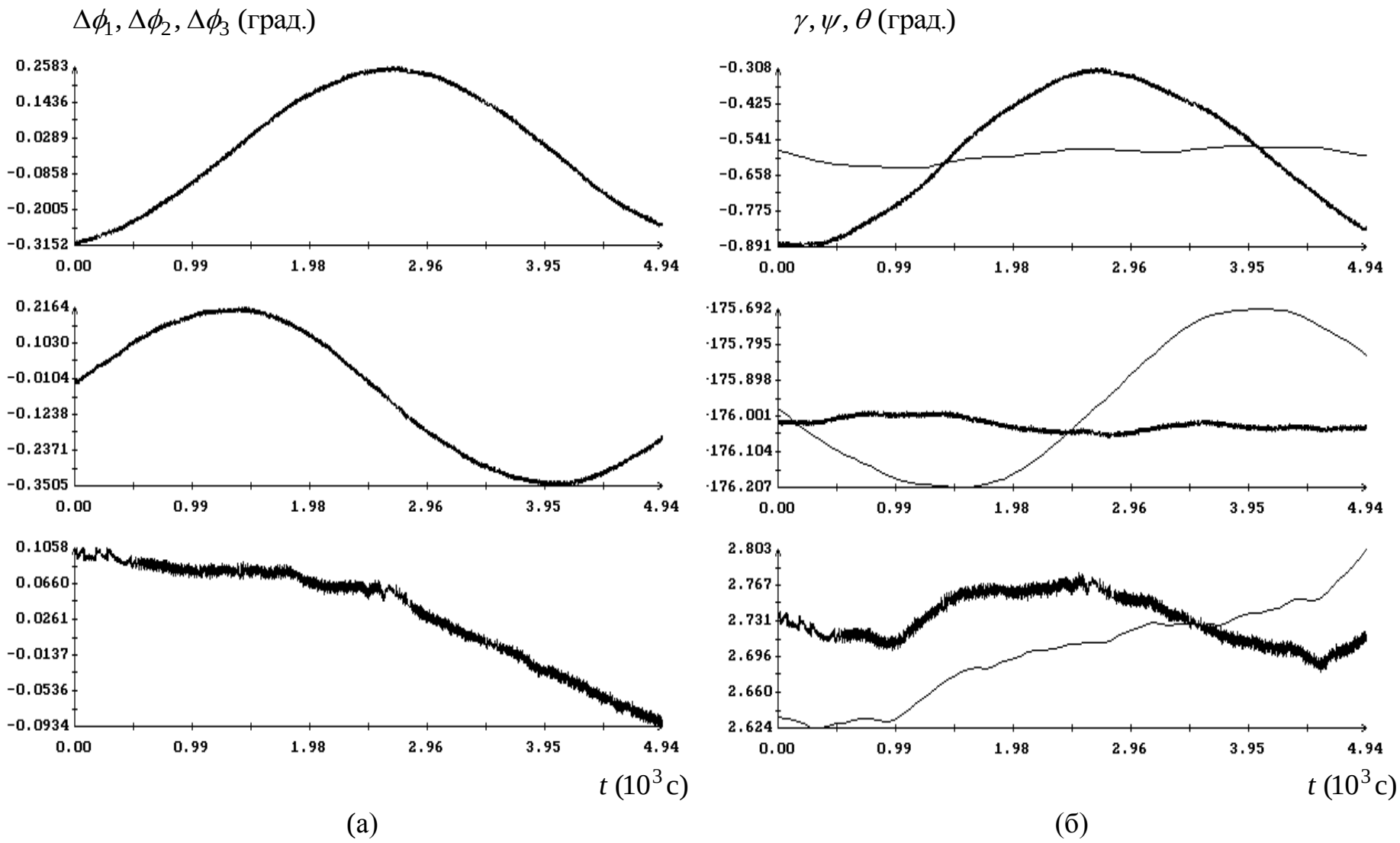



Рис. 19. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 11:44:40 ДМВ 19.02.2015; (а) – сглаженные телеметрические значения угловой скорости с учетом смещений, (б), (в) – углы СМ относительно орбитальной системы координат.




(а) (б)

Рис. 20. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 18:49:52 ДМВ 25.09.2014; (а) – ошибки аппроксимации телеметрических значений кватерниона, (б) – углы СМ относительно орбитальной системы координат; $\sigma = 258\gamma$, $\xi_1 = -1.23 \cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1}$, $\xi_2 = -7.42 \cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1}$, $\xi_3 = -5.04 \cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1}$, $\Delta_1 = -156\gamma$, $\Delta_2 = 266\gamma$, $\Delta_3 = 795\gamma$.




(а) (б)

Рис. 21. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 11:44:40 ДМВ 19.02.2015; (а) – ошибки аппроксимации телеметрических значений кватерниона, (б) – углы СМ относительно орбитальной системы координат; $\sigma = 274\gamma$, $\xi_1 = -3.94 \cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1}$, $\xi_2 = 8.89 \cdot 10^{-7}\,\text{с}^{-1}$, $\xi_3 = 3.66 \cdot 10^{-7}\,\text{с}^{-1}$, $\Delta_1 = -429\gamma$, $\Delta_2 = 553\gamma$, $\Delta_3 = -693\gamma$.