The classification system of plane four bar linkages

Kiselev V.

Система классификации плоских шарнирных четырёхзвенных механизмов

Киселев В. М.

*Киселёв Вячеслав Михайлович / Kiselev Vyacheslav - кандидат технических наук, доцент,
кафедра САП и теории механизмов и машин, факультет машиноведения и управления качеством,
Московский текстильный институт им. А. Н. Косыгина, г. Москва*

Аннотация: описано взаимно-однозначное соответствие всех возможных плоских шарнирных четырёхзвенных механизмов и точек множества трёхмерного пространства подвижных звеньев механизма.

Abstract: the one-to-one conformity all possible plane four bar linkages and points of the multitude of three-dimensional space, whose dimensions - three travelling links of mechanism are described.

Ключевые слова: плоский шарнирный четырёхзвенник, вырожденный плоский шарнирный четырёхзвенник, трёхгранная призма, тетраэдр, двугранный угол, трёхгранный угол.

Keywords: plane four bar linkage, degenerate plane four bar linkage, three-edged prism, tetrahedron, dihedral angle, trihedral angle.

Рассмотрим плоский шарнирный четырёхзвенный механизм. Он может быть двухкоромысловым, двухкривошипным или однокоромысловым (то же самое, однокривошипным). Четвёртого не дано. Это следует из правила Грасгофа. Однако, несмотря на математическую точность правила Грасгофа, оно:

1. Настолько не позиционировано и условно, что различными авторами допускаются различные его формулировки.

Правильная формулировка. Если сумма наибольшего и наименьшего из звеньев меньше суммы двух остальных звеньев, и стойкой является наименьшее звено, то механизм двухкривошипный. Если неравенство выполняется, но стойкой является звено, соединённое с наименьшим, то механизм кривошипно-коромысловый. Во всех остальных случаях механизм - двухкоромысловый [2], [3], [4].

Неправильная формулировка. Наименьшее звено шарнирного четырёхзвенника является кривошипом, если сумма длин наименьшего и любого другого звена меньше суммы длин остальных двух звеньев [5].

2. Не даёт непосредственно исчерпывающей картины всех групп плоских четырёхзвенников.

Действительно, положение «во всех остальных случаях» не может не вызывать вопросов. Среди них, например - что делать со случаями, когда механизм вообще не может существовать? И многие авторы, с той или иной степенью успеха, заменяют это положение системой дополнительных условий [2], [6].

Здесь изложена эквивалентная правилу Грасгофа, но избавленная от указанных недостатков система классификации плоских шарнирных четырёхзвенных механизмов, обладающая прочими преимуществами по сравнению с правилом Ф. Грасгофа.

Определимся, исходя из [1], в терминологии. Стойка - неподвижное звено плоского четырёхзвенника; шарниры на концах стойки - опоры. Звено, связанное с какой-либо опорой - либо коромысло, либо кривошип. Звено, не связанное непосредственно ни с одной из опор - шатун. В отличие от кривошипа и шатуна, которые в процессе движения механизма могут совершать полные обороты в плоскости механизма, коромысло полного оборота совершить не может. Процесс движения механизма можно описать функциями, зависящими от одного параметра, например угла поворота выбранного звена (часто его ещё называют начальным). Это обстоятельство оправдывает вместо термина «положение механизма» использование термина «точка». Так, вместо «положение механизма, в котором определённое коромысло изменяет направление вращения на противоположное», говорят: «точка возврата данного коромысла»; вместо «положение механизма, из которого возможно дальнейшее его движение как одним образом, так и другим», говорят: «точка ветвления решения системы уравнений кинематики» и т. д. Плоский шарнирный четырёхзвенник не является частью какого-либо более сложного механизма. Т. е. здесь рассматривается плоский шарнирный четырёхзвенник в чистом виде, и, следовательно, одной из важнейших его характеристик является полный цикл движения механизма. Исходной точкой полного цикла движения плоского шарнирного четырёхзвенника может быть любое положение его, в том числе и точка ветвления решения. Все точки своего полного цикла движения проходятся механизмом только один раз, за исключением точек ветвления решения, если они есть, точку ветвления решения плоский шарнирный четырёхзвенник может проходить два раза. Полным циклом движения механизма назовём его непрерывное движение из исходной точки, проходящее через все возможные положения шатуна, и заканчивающееся в исходной точке.

Например, цикл движения равностороннего параллелограмма (двухкривошипный четырёхзвенник, у которого все стороны равны), когда шатун движется поступательно (именно это движение

параллелограммов используется во множестве их применений в технике), согласно нашему определению, не является полным циклом его движения. Полным циклом движения этого механизма будет движение, например, из положения его, когда шарнир соединения левого кривошипа с шатуном совпадает с правой опорой (правая точка ветвления), например, в положительном направлении, когда шатун движется поступательно до его совмещения с левым кривошипом (левая точка ветвления), далее шатун и левый кривошип совершают полный оборот как одно целое, далее механизм движется с поступательным движением шатуна до правой точки ветвления, далее шатун и правый кривошип совершают полный оборот как одно целое, и заканчивается полный цикл движения этого четырёхзвенника в исходной точке. Таким образом, за полный цикл движения, как он выше определён, в равностороннем параллелограмме шатун и оба кривошипа поворачиваются на угол 4π .

Заметим, что вопрос, о том, называть однокривошипный механизм кривошипно-коромысловым или коромысло-кривошипным сродни вопросу: какую систему координат принять при описании положений точек плоскости - левую или правую? И встречающееся в литературе правило: если входное звено однокривошипного механизма - коромысло, то механизм коромысло-кривошипный, если кривошип - кривошипно-коромысловый, приводит читателя в недоумение: а если входное звено этого механизма - шатун? Поэтому, выбрав в плоскости механизма правую ортогональную систему координат, поместим одну его опору в начало координат, вторую - на положительной части оси ординат. И, не умаляя общности, будем считать однокоромысловый механизм кривошипно-коромысловым, если подвижное звено, опирающееся на левую опору, - кривошип, и коромысло-кривошипным, если подвижное звено, опирающееся на левую опору, - коромысло.

Длины всех звеньев отнесём к длине стойки, расположенной, как говорилось, на оси ординат, (см. рис. 1), т. е. $l_0 := 1$.

На рис. 1а звено, примыкающее к левой опоре, коромысло: $\varphi_{\min} \leq \varphi \leq \varphi_{\max}$.

При указанном изменении угла φ , кинематика плоского шарнирного четырёхзвенника описывается уравнением:

$$l_r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} + l_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{pmatrix} - l_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Дифференцируя это векторное уравнение по φ , получаем:

$$\begin{pmatrix} -l_1 \cdot \sin(\varphi_1) & l_2 \cdot \sin(\psi) \\ l_1 \cdot \cos(\varphi_1) & -l_2 \cdot \cos(\psi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \psi' \end{pmatrix} = l_r \cdot \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Отсюда

$$\psi'(\varphi) = \frac{l_r}{l_2} \cdot \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi)}{\sin(\varphi_1 - \psi)} \quad (3)$$

Как увидим ниже, есть вполне определённые множества и двухкоромысловых, и двухкривошипных, и однокоромысловых механизмов, у которых, в процессе движения есть точки, когда все четыре звена механизма выстраиваются в одну прямую. Очевидно, в этих точках якобиан (3) не определён. Это точки ветвления решений уравнений кинематики плоского шарнирного четырёхзвенного механизма. Механизмы, укладывающиеся на линию стойки в процессе своего движения, будем называть вырожденными в отличие от всех остальных, этим свойством не обладающих. Так, равносторонний параллелограмм, речь о котором шла выше - вырожденный двухкривошипный механизм, в отличие от коромысло-кривошипного механизма на рис. 1а, двухкоромысловых механизмов на рис. 1б и рис. 1в и двухкривошипного механизма на рис. 1г.

В точках, где шатун l_1 выстраивается в одну прямую только с одним звеном l_2 , т. е. при

$\varphi_1 \rightarrow \psi \pm k \cdot \pi$, тогда $\psi'(\varphi) \rightarrow \infty$ (4).

Это точки возврата звена l_r . А само звено l_r - коромысло.

Рис. 1а

Рис.1б.

Рис. 1 в

Рис. 12

Прежде всего, рассмотрим условия существования четырёхзвенника, т. е. условия, которым должны удовлетворять величины l_r, l_1, l_2 . Так как длины звеньев - величины положительные; в трёхмерном декартовом пространстве $(0, l_r, l_1, l_2)$ нас интересуют только точки $l_r > 0, l_1 > 0, l_2 > 0$ - неотрицательного октанта. Чтобы четырёхзвенник существовал вообще необходимо выполнение системы неравенств:

$$\begin{cases} l_r + l_1 + l_2 > 1 \\ 1 + l_r + l_1 > l_2 \\ l_2 + 1 + l_r > l_1 \\ l_1 + l_2 + 1 > l_r \end{cases}_{(5)}$$

Первая из плоскостей, определяемая (5), отсекает от неотрицательного октанта трёхгранную пирамиду $o(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$. Остальные три - три трёхгранных угла с вершинами в точках $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$. А для точек, определяющих все возможные механизмы, остаётся часть неотрицательного октанта пространства вне этих пирамиды и трёхгранных углов. Остаётся только разделить это множество точек пространства $(0, l_r, l_1, l_2)$ на подмножества, точки которых определяют 1) звенья всех возможных кривошипно-коромысловых механизмов; 2) звенья всех возможных коромысло-кривошипных механизмов; 3) звенья всех возможных двухкривошипных механизмов. Точки же множества за вычетом этих трёх подмножеств с их границами определяют 4) звенья всех возможных двухкоромысловых механизмов.

Обратимся далее к вырожденным механизмам. И рассмотрим всевозможные укладки четырёхзвенника в линию стойки. А именно, всевозможные расположения на линии стойки шарнира Q соединения звена, опирающегося на левую опору и шатуна и шарнира R соединения шатуна со звеном, опирающимся на правую опору.

Оговорим сразу, что, хотя с точки зрения математики шарнирные четырёхзвенные механизмы, у которых длина одного из звеньев равна нулю или сумме остальных трёх звеньев, заслуживают внимания, с технической точки зрения они не интересны. По этой причине неравенства в системе (5) строгие, а для шарнира Q исключено из рассмотрения положение 0 и для шарнира R положения Q и 1. По этой же причине ниже будем иногда исключать из рассмотрения грани пространственных фигур в пространстве $(0, l_r, l_1, l_2)$, лишний раз не упоминая данную оговорку.

$$-\infty < R < Q \quad l_2 = 1 + l_r + l_1 \quad (5.2)$$

$$-\infty < Q < 0 \quad \begin{array}{l} Q < R < 1 \\ 1 < R < \infty \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 + l_r = l_1 + l_2 \\ l_1 = l_r + l_2 + 1 \end{array} \quad (5.3)$$

$$0 < Q < 1 \quad \begin{array}{l} -\infty < R < Q \\ Q < R < 1 \\ 1 < R < \infty \end{array} \quad \begin{array}{l} l_2 - l_1 = 1 - l_r \\ l_r + l_1 + l_2 = 1 \\ 1 + l_2 = l_r + l_1 \end{array} \quad (5.1)$$

$$1 \leq Q < \infty \quad \begin{array}{l} -\infty < R < 1 \\ 1 < R < Q \\ Q < R < \infty \end{array} \quad \begin{array}{l} l_r - 1 = l_1 - l_2 \\ 1 + l_2 + l_1 = l_r \\ 1 + l_2 = l_r + l_1 \end{array} \quad (5.4)$$

Справа здесь выписан номер неравенства системы (5), которому противоречит полученное соотношение между звеньями для данной укладки в линию стойки вырожденного шарнирного четырёхзвенника. Подводя итог, получаем, что не противоречащими системе (5) оказались три соотношения или три плоскости внутри описанной выше фигуры:

$$\begin{cases} l_r = l_1 + l_2 - 1 \\ l_1 = l_r + l_2 - 1 \\ l_2 = l_r + l_1 - 1 \end{cases} (5')$$

Изображая в пространстве (o, l_r, l_1, l_2) подвижных звеньев четырёхзвенника совместно (5) и (5'), для всех возможных плоских шарнирных четырёхзвенных механизмов получаем рис. 2. Для наглядности на этом рисунке изображено сечение получившейся фигуры плоскостью $l_r + l_1 + l_2 = C$ при $C = 4$. Понятно, что чтобы получить заключения о всех четырёхзвенниках, необходимо рассматривать полученные трёхгранные призмы, перевёрнутый тетраэдр, их грани - трапеции и треугольники и рёбра - отрезки, при $C \rightarrow \infty$. При этом призмы превращаются в полубесконечные призмы, тетраэдр в трёхгранный угол, трапеции в плоские полосы, некоторые треугольники и отрезки, соответственно, в углы и лучи, о которых и пойдёт речь ниже.

Рис.2. Во вне правильного тетраэдра **ABCD**, координаты вершин **A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1), D(1,1,1)**, исходят две трёхгранных полубесконечных призмы, опираясь, одна на грань **BCD**

с ребрами-лучами, параллельными ребру AD тетраэдра, другая на грань ABD с ребрами-лучами, параллельными ребру CD тетраэдра. Продолжая рёбра тетраэдра AD, CD и BD за точку D, получаем трёхгранный угол с вершиной в т. D, полностью расположенный в части пространства (o, l_1, l_2, l_3) , определяемого системой (5).

Систему классификации плоских четырёхзвенных механизмов удобно формулировать, опираясь на рис. 2.

Внутренние точки, и только они, первой трёхгранной полубесконечной призмы определяют все возможные кривошипно-коромысловые механизмы, опирающиеся на стойку 10.

Внутренние точки, и только они, второй трёхгранной полубесконечной призмы определяют все возможные коромыслово-кривошипные механизмы, опирающиеся на стойку 10.

Внутренние точки, и только они, трёхгранного угла, исходящего из т. D, изображённого на рис. 2, определяют все возможные двухкривошипные механизмы, опирающиеся на стойку 10.

Все точки части пространства (o, l_1, l_2, l_3) , определяемого системой (5), остающиеся за вычетом из неё описанных двух полубесконечных призм и трёхгранного угла с их гранями, и только они определяют все возможные двухкоромысловые механизмы, опирающиеся на стойку 10.

Иными словами, справедливы.

Теорема 1. Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку 10, был кривошипно-коромысловым, необходимо и достаточно, чтобы точка (l_1, l_2, l_3) была внутренней точкой трёхгранной полубесконечной призмы, опирающейся на грань BCD тетраэдра ABCD, изображённой на рис. 2. Далее будем называть её первой полубесконечной призмой.

Теорема 2. Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку 10, был коромыслово-кривошипным, необходимо и достаточно, чтобы точка (l_1, l_2, l_3) была внутренней точкой трёхгранной полубесконечной призмы, опирающейся на грань ABD тетраэдра ABCD, изображённой на рис. 2. Далее будем называть её второй полубесконечной призмой.

Теорема 3. Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку 10, был двухкривошипным, необходимо и достаточно, чтобы точка (l_1, l_2, l_3) была внутренней точкой трёхгранного угла

(трёхгранной полубесконечной пирамиды) с вершиной в точке D и рёбрами-продолжениями за эту точку рёбер AD, CD и BD тетраэдра ABCD.

Теорема 4. Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку 10, был двухкоромысловым, необходимо и достаточно, чтобы точка (1r, 11, 12) была внутренней точкой одной из следующих пяти пространственных фигур: 1) тетраэдра ABCD; 2) трёхгранной полубесконечной призмы, опирающейся на грань CAD; 3) части двухгранного угла между плоскостями-продолжениями за ребро BD граней BCD и ABD, заключённой между двумя параллельными плоскостями: продолжением грани CAD за точку D и плоскостью, определяемой третьим неравенством (5), если знак неравенства заменить знаком равенства; 4) части двухгранного угла между плоскостями-продолжениями за ребро AD граней ABD и CAD, заключённой между двумя параллельными плоскостями: продолжением грани BCD за точку D и плоскостью, определяемой четвёртым неравенством (5), если знак неравенства заменить знаком равенства; 5) части двухгранного угла между плоскостями-продолжениями за ребро CD граней CAD и BCD, заключённой между двумя параллельными плоскостями: продолжением грани ABD за точку D и плоскостью, определяемой вторым неравенством (5), если знак неравенства заменить знаком равенства.

Строго говоря, конечно, надо доказать все четыре утверждения. Однако если апеллировать к правилу Грасгофа, четвёртое утверждение является следствием трёх предыдущих.

Доказательство теоремы 1. Необходимость.

Имеем кривошипно-коромысловый механизм, опирающийся на стойку 10 = 1 (у нас длины всех звеньев отнесены к длине стойки). См. рис. 3а. О и Т - опорные шарниры.

За цикл движения механизма шарнир Q соединения кривошипа 1r с шатуном 11 проходит (неважно, в каком порядке и направлении) положения Q_Θ , Q_Ω , Q_Σ . В этих положениях звенья механизма образуют, соответственно, треугольники: $\Delta Q_\Theta R_\Theta T$, $\Delta O R_\Omega T$, $\Delta O R_\Sigma T$. Из соотношений сторон этих треугольников, получаем:

$$1r + 1 < 11 + 12 \quad (\Theta)$$

$$1r + 11 < 12 + 1 \quad (\Sigma)$$

Если заменить знак неравенства на знак равенства, - получим
зст-

Рис. 3а

Немного переставляя члены в этих трёх неравенствах и добавляя к ним очевидное $1r > 0$, получаем систему неравенств, каждое из которых определяет множество точек пространства (о, 1r, 11, 12), находящихся с определённой стороны от соответствующей плоскости:

$$\begin{cases} l_r > 0 \\ l_1 + l_2 - 1 > l_r \\ l_r + l_1 - 1 < l_2 \\ l_r + l_2 - 1 < l_1 \end{cases} \quad (6)$$

Как видим, плоскости эти являются гранями первой призмы на рис. 2. А система неравенств определяет её внутренние точки. Что и требовалось доказать.

Достаточность.

Точка (l_r, l_1, l_2) пространства (o, l_r, l_1, l_2) - внутренняя точка полубесконечной призмы, определяемой системой неравенств (6).

Заметим, что ребро призмы, являющееся пересечением двух из её граней $l_r + l_1 - 1 = l_2$ и $l_r + l_2 - 1 = l_1$, лежит в плоскости $l_r = 1$. Это значит, что для всех внутренних точек призмы (6)

$$l_r < 1 \quad (7)$$

Кроме этого вся призма находится по одну сторону от плоскости

$l_r = l_1$, именно

$$l_r < l_1 \quad (7')$$

То же самое с плоскостью $l_r = l_2$:

$$l_r < l_2$$

Два последних неравенства системы (6) можно записать таким образом:

$$l_1 - l_2 < 1 - l_r$$

$$l_2 - l_1 < 1 - l_r$$

В совокупности с (7) и очевидным, в виду первого неравенства (6),

$1 - l_r < 1 + l_r$, это даёт:

$$|l_1 - l_2| < 1 - l_r < 1 + l_r$$

Второе неравенство (6) сейчас можно переписать:

$$l_1 + l_2 > 1 + l_r$$

Два последних двойных неравенства означают, что, см. рис. 3б, в плоскости, на отрезках $Q_{\Xi}T$ длиной $1 - l_r$ и $Q_{\Theta}T$ длиной $1 + l_r$, как на основаниях можно построить $\Delta Q_{\Xi}R_{\Xi}T$ и $\Delta Q_{\Theta}R_{\Theta}T$, у которых $Q_{\Theta}R_{\Theta} = Q_{\Xi}R_{\Xi} = l_1$; $R_{\Theta}T = R_{\Xi}T = l_2$. Далее, на отрезке $Q_{\Theta}Q_{\Xi}$, как на диаметре, опишем окружность и рассмотрим произвольную её точку Q , положение которой определяется углом $TOQ = \varphi$; O - центр окружности.

При изменении угла φ от 0 до 2π , точка Q (из положения Q_{Ξ}) пробегает всю окружность (возвращаясь в положение Q_{Ξ}), при этом, как следует из теоремы косинусов для треугольника OQT , длина отрезка

$$QT(\varphi) = \sqrt{1 + l_r^2 - 2 \cdot l_r \cdot \cos(\varphi)} \quad (8)$$

Очевидно, для этой функции справедливо неравенство (в виду (7)):

$$1 - l_r = QT_{\min} = QT(0) \leq QT(\varphi) \leq QT(\pi) = QT_{\max} = 1 + l_r$$

Используя его, из двух двойных неравенств получаем:

изображённой на рис. 2.

Теорема 1.2.

Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку 10, был вырожденным кривошипно-коромысловым, укладываемым в линию стойки вторым образом (рис.3г), необходимо и достаточно, чтобы точка (1г, 11, 12), была внутренней точкой полубесконечной грани KDBM первой полубесконечной призмы.

Теорема 1.3.

Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку 10, был вырожденным кривошипно-коромысловым, укладываемым в линию стойки третьим образом (рис. 3д), необходимо и достаточно, чтобы точка (1г, 11, 12), была внутренней точкой полубесконечной грани KDCN первой полубесконечной призмы.

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательству теоремы 1. Поэтому ограничимся здесь доказательством одного из них, например, второго.

Необходимость.

Имеем вырожденный кривошипно-коромысловый механизм, опирающийся на стойку $l_0 = 1$ (у нас длины всех звеньев отнесены к длине стойки), укладываемый на линию стойки так, как изображено на рис. 3г. О и Т - опорные шарниры. За цикл своего движения, кроме положения П, изображённого на рис. 3г, шарнир Q проходит положения Q_Θ и Q_Ω , см. рис. 3га.

Рис. 3га

Непосредственно из рис. 3г и соотношений сторон треугольников $OR_\Omega T$ и $Q_\Theta R_\Theta T$, получаем систему из равенства и двух неравенств. Добавляя к этой системе очевидное, $l_r > 0$, получаем систему, состоящую из равенства и трёх неравенств:

$$\begin{cases} l_2 = l_r + l_1 - 1 & (\Pi) \\ l_r > 0 \\ l_1 > l_r + l_2 - 1 & (\Omega) \\ l_r < l_1 + l_2 - 1 & (\Theta) \end{cases} \quad (6.П)$$

Эта система полностью определяет внутренние точки грани KDBM ($DK \parallel BM$) призмы кривошипно-коромысловых четырёхзвенников.

Достаточность.

Точка (1г, 11, 12) - внутренняя точка полубесконечной грани KDBM первой призмы, определяемой системой (6.П).

Все выкладки из доказательства достаточности теоремы 1 справедливы здесь с одной небольшой поправкой, являющейся следствием того, что первым в (6.П) стоит равенство. И хотя оно является условием проворота кривошипа l_r , в итоге получаем цепочку не совсем строгих неравенств:

$$|l_1 - l_2| \leq 1 - l_r < 1 + l_r < l_1 + l_2.$$

Вводя, как и выше, функцию (8), получаем:

$$|l_1 - l_2| \leq QT(\varphi) < l_1 + l_2.$$

Запись эта хоть и отличается от той, что была получена выше, тем не менее означает, что для любого угла φ от 0 до 2π , на отрезке QT, как на основании можно построить треугольник со сторонами l_1 и l_2 .

Таким образом, над отрезком ОТ как стойкой существует плоский четырёхзвенник с кривошипом над опорой О.

Далее, в силу всё того же равенства в (6.П), последняя цепочка неравенств в доказательстве достаточности теоремы 1 может быть получена только наполовину:

$$|l_2 - 1| < l_1 - l_r < l_2 + 1.$$

Это означает, что на отрезке с длиной $l_1 - l_r$ как на основании можно построить, вообще говоря, два треугольника со сторонами l_2 и 1. Совмещая стороны этих треугольников с длиной 1 (единица) со стойкой механизма, рис. 3гб так, чтобы стороны l_2 опирались на опору Т, получаем т. н. точки возврата звена l_2 вырожденного механизма. Таким образом, l_2 - коромысло, механизм, собранный из звеньев, длины которых - внутренняя точка полубесконечной грани KDBM первой призмы - вырожденный кривошипно-коромысловый. Теорема 1.2 доказана.

Рис. 3гб

Если через середину стойки кривошипно-коромыслового механизма провести перпендикулярную линию, см., например, рис. 3а и, принимая эту линию за ось симметрии, отобразить механизм, очевидно, получим симметричный коромыслово-кривошипный механизм. Необходимо, правда, ещё сделать замену: $O \leftrightarrow T$ и $Q \leftrightarrow R$ - в рассматриваемых здесь четырёхзвенниках, всегда левая опора - О и ОQ - опирающееся на неё звено; правая опора - Т и TR - опирающееся на неё звено. Положение укладки вырожденного плоского шарнирного четырёхзвенника, как любое положение четырёхзвенника, полностью определяет этот четырёхзвенник. Схема укладки вырожденного плоского шарнирного четырёхзвенника не определяет механизм, так как на схеме нет размеров звеньев. Но при изображении схемы укладки вырожденного механизма, симметричной укладки данного вырожденного плоского четырёхзвенника, после отражения укладки относительно центра стойки необходимо выполнить замену: $O \leftrightarrow T$ и $Q \leftrightarrow R$. В пространстве (o, l_r, l_1, l_2) оси симметрии, рис. 3а, соответствует плоскость

$$l_r = l_2.$$

Вторая полубесконечная призма на рис. 2 симметрична первой относительно этой плоскости. Очевидно, что все внутренние точки этой призмы и только они определяют все возможные коромыслово-кривошипные механизмы. Это утверждение теоремы 2. Система неравенств, определяющая внутренние точки этой призмы:

$$\begin{cases} l_2 > 0 \\ l_r + l_1 - 1 > l_2 \\ l_1 + l_2 - 1 < l_r \\ l_r + l_2 - 1 < l_1 \end{cases} \quad (6')$$

Аналогично, грани BCD первой призмы симметрична грань ABD второй; грани KDBM - грань GDBF и грани KDCN - грань GDAP соответственно. Укладки на линию стойки вырожденных коромыслово-кривошипных механизмов, определяемых внутренними точками этих граней второй призмы симметричны изображенным на соответствующих рисунках 3в, 3г, 3д относительно середины стойки.

Для вырожденных коромыслово-кривошипных механизмов справедливы.

Теорема 2.1.

Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку 10, был вырожденным коромыслово-кривошипным, укладываемым в линию стойки первым образом (симметрично рис. 3в), необходимо и достаточно, чтобы точка (l_r, l_1, l_2) , была внутренней точкой треугольной грани ABD второй

полубесконечной призмы, изображённой на рис. 2.

Теорема 2.2.

Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку 10, был вырожденным коромысло-кривошипным, укладываемым в линию стойки вторым образом (симметрично рис. 3г), необходимо и достаточно, чтобы точка (1г, 11, 12) была внутренней точкой полубесконечной грани GDBF второй полубесконечной призмы.

Теорема 2.3.

Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку 10, был вырожденным коромысло-кривошипным, укладываемым в линию стойки третьим образом (симметрично рис. 3д), необходимо и достаточно, чтобы точка (1г, 11, 12) была внутренней точкой полубесконечной грани GDAP второй полубесконечной призмы.

Заметим, что все четырёхзвенники, которые мы здесь рассматриваем, опираются на стойку $10 = 1$. Поэтому и ось симметрии, и плоскость симметрии $1г = 12$ в пространстве (о, 1г, 11, 12) являются таковыми не только для однокривошипных механизмов, но и для двухкоромысловых, и для двухкривошипных. В дальнейшем, когда будем говорить об этой симметрии в строении плоских четырёхзвенников, мы будем просто говорить «плоскость симметрии в пространстве (о, 1г, 11, 12)».

Доказательство теоремы 3. Необходимость.

Имеем двухкривошипный механизм, опирающийся на стойку $10 = 1$. См. рис. 4а. О и Т - опорные шарниры.

За цикл движения механизма, шарнир Q соединения кривошипа 1г с шатуном 11 проходит положения Q_{Σ} , Q_{Θ} , Q_{Ω} . В этих положениях звенья механизма образуют, соответственно, треугольники: $\Delta TQ_{\Sigma}R_{\Sigma}$, $\Delta TQ_{\Theta}R_{\Theta}$, $\Delta TQ_{\Omega}R_{\Omega}$.

. См.рис. 4а.

Рис. 4а

Из соотношений сторон этих треугольников имеем:

$$12 < 11 + 1г - 1$$

$$1г + 1 < 11 + 12$$

$$11 < 12 - 1 + 1г$$

Если в этих неравенствах знак неравенства заменить на знак равенства, получим уравнения плоскостей, являющихся гранями трёхгранного угла на рис. 2. Сами же неравенства, будучи приведёнными в более привычный вид, в совокупности, определяют внутренние точки трёхгранного угла, являющегося отражением относительно Т. D трёхгранного угла тетраэдра ABCD при вершине D.

$$\begin{cases} 12 < 1г + 11 - 1 \\ 1г < 11 + 12 - 1 \\ 11 < 1г + 12 - 1 \end{cases} \quad (9)$$

Что и требовалось доказать.

Достаточность.

Точка (1г, 11, 12) пространства (о, 1г, 11, 12) - внутренняя точка трёхгранного угла (полубесконечного тетраэдра), определяемого системой неравенств (9). Заметим, что вследствие того, что рёбра этого угла суть продолжения рёбер тетраэдра ABCD, за точку D для внутренних точек трёхгранного угла справедливы неравенства:

$$1г > 1 \quad 11 > 1 \quad 12 > 1 \quad (10)$$

Первое и третье неравенства (9) запишем следующим образом:

$$l_2 - l_1 < l_r - 1 \quad \text{и} \quad l_1 - l_2 < l_r - 1.$$

В совокупности с первым неравенством (10) и тем фактом, что $l > 0$, отсюда получаем:

$$|l_2 - l_1| < l_r - 1 < l_r + 1.$$

Из второго неравенства (9) соответственно следует:

$$l_r - 1 < l_r + 1 < l_1 + l_2.$$

Эти два двойных неравенства означают, что, см. рис. 46, в плоскости, на отрезках $Q_\Omega T$ длиной $l_r + 1$ и TQ_Σ длиной $l_r - 1$, как на основаниях, можно построить $\Delta Q_\Omega R_\Omega T$ и $\Delta Q_\Sigma R_\Sigma T$, у которых $Q_\Omega R_\Omega = Q_\Sigma R_\Sigma = l_1$; $R_\Omega T = R_\Sigma T = l_2$. На отрезке $Q_\Omega Q_\Sigma$ как на диаметре опишем окружность и рассмотрим произвольную её точку Q , положение которой определяется углом $\angle TOQ = \varphi$; O - центр окружности.

Вводя далее, так же как при доказательстве достаточности теоремы 1, функцию (8) $QT(\varphi)$, и проводя соответствующие выкладки, получаем

$l_r - 1 = QT_{\min} = QT(0) \leq QT(\varphi) \leq QT(\pi) = QT_{\max} = l_r + 1$, и, соответственно, над отрезком OT , как стойкой, существует плоский четырёхзвенник, причём звено $OQ = l_r$ - кривошип.

Первое неравенство системы (9) можно записать ещё так:

$$l_2 + 1 < l_r + l_1.$$

Это условие проворачиваемости звена $TR = l_2$, см. рис. 46, и, следовательно, построенный плоский четырёхзвенник - двухкривошипный. Теорема 3 доказана.

Рис. 46

Внутренние точки граней трёхгранного угла определяют вырожденные двухкривошипные механизмы, укладываемые в линию стойки тремя способами. Они изображены на рисунках 4в, 4г и 4д.

Рис. 4в. Грань EDG
3-х-гранного
угла (без рёбер)

Рис. 4г. Грань KDE
3-х-гранного
угла (без рёбер)

Рис. 4д. Грань GDK
3-х-гранного
угла (без рёбер)

Для этих вырожденных двухкривошипных механизмов справедливы утверждения:

Теорема 3.1

Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку 10, был вырожденным двухкривошипным, укладываемым в линию стойки первым образом (рис. 4в), необходимо и достаточно, чтобы точка (l_r, l_1, l_2) была внутренней точкой открытого угла - грани EDG 3-х-гранного угла, изображённого на рис. 2.

Теорема 3.2.

Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку 10, был вырожденным двухкривошипным, укладываемым в линию стойки вторым образом (рис. 4г), необходимо и достаточно, чтобы точка (l_r, l_1, l_2) была внутренней точкой открытого угла - грани KDE 3-х-гранного угла KGED.

Теорема 3.3.

Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку 10, был вырожденным двухкривошипным, укладываемым в линию стойки третьим образом (рис. 4д), необходимо и достаточно, чтобы точка $(l_r,$

11, 12), была внутренней точкой открытого угла - грани GDK 3-х-гранного угла KGED. Доказательства этих утверждений аналогичны доказательству теоремы 3. Поэтому ограничимся здесь доказательством одного из них, например, третьего.

Необходимость.

Имеем вырожденный двухкривошипный механизм, опирающийся на стойку $l_0 = 1$, укладываемый на линию стойки так, как изображено на рис. 4д. О и Т - опорные шарниры. За цикл своего движения, кроме положения П, изображённого на рис. 4д, шарнир Q проходит положения Q_Θ и Q_Ω . См. рис. 4 да.

Рис. 4да

Непосредственно из рис. 4д и соотношений сторон треугольников $Q_\Omega TR_\Omega$ и $OR_\Theta Q_\Theta$, на рис. 4да получаем систему из равенства и двух неравенств.

$$\begin{cases} l_1 = l_r + l_2 - 1 & (\Pi) \\ l_r < l_1 + l_2 - 1 & (\Omega) \\ l_2 < l_r + l_1 - 1 & (\Theta) \end{cases}_{(6.П')}$$

Эта система полностью определяет внутренние точки грани GDK трёхгранного угла двухкривошипных четырёхзвенников.

Достаточность.

Точка (l_r, l_1, l_2) - внутренняя точка полубесконечной грани GDK трёхгранного угла двухкривошипных четырёхзвенников, определяемой системой (6.П').

Первое равенство этой системы означает, что, см. рис. 4да, на линии стойки (О и Т - положения опорных шарниров) шарнир Q соединения подвижного звена, опирающегося на опору О с шатуном и шарнир R соединения шатуна со звеном, опирающимся на опору Т, в процессе движения механизма могут занимать положения Q_Π и R_Π , соответствующие укладке четырёхзвенника с такими звеньями в линию стойки (как на рис. 4д). И, таким образом, определяемый внутренней точкой грани GDK четырёхзвенник - вырожденный.

Описывая, далее, вокруг т. О окружность радиусом $OQ = OQ_\Pi$ и, вводя, как и ранее, функцию (8) $QT(\varphi)$, φ - угол TOQ , используя второе и третье неравенства системы (6.П'), получим нестрогое неравенство:

$$|l_2 - l_1| \leq QT(\varphi) < l_2 + l_1.$$

Это двойное неравенство означает, что для любого φ , над стойкой $OT = 1$ строится четырёхзвенник с подвижными звеньями l_r, l_1, l_2 . Он укладывается в линию стойки, как показано на рис. 4д, а второе и третье неравенства (6.П') - суть условия проворота кривошипов l_r и l_2 соответственно. Теорема 3.3 доказана.

Здесь, на границе трёхгранного угла KGED правило перехода от граней к рёбрам вполне работает. А именно, точки каждого ребра-луча определяют вырожденные двухкривошипные четырёхзвенники, укладываемые в линию стойки двумя способами - как на одной прилегающей грани и как на другой.

Рис. 4е. Открытый луч DK
ребро пересечения
граней GDK и EDG

Рис. 4ж. Открытый луч DG
ребро пересечения
граней EDG и KDE

Рис. 4з. Открытый луч DE
ребро пересечения граней KDE и GDK

И, таким образом, для этих вырожденных двухкривошипных механизмов справедливы утверждения:
Теорема 3.4.

Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку 10, был вырожденным двухкривошипным, укладываемым в линию стойки двумя способами, изображёнными на рис. 4е, необходимо и достаточно, чтобы точка (1r, 11, 12) была внутренней точкой открытого луча - ребра DK 3-х-гранного угла, изображённого на рис. 2.

Теорема 3.5.

Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку 10, был вырожденным двухкривошипным, укладываемым в линию стойки двумя способами, изображёнными на рис. 4ж, необходимо и достаточно, чтобы точка (1r, 11, 12) была внутренней точкой открытого луча - ребра DG 3-х-гранного угла KGED.

Теорема 3.6.

Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку 10, был вырожденным двухкривошипным, укладываемым в линию стойки двумя способами, изображёнными на рис. 4з, необходимо и достаточно, чтобы точка (1r, 11, 12) была внутренней точкой открытого луча - ребра DE 3-х-гранного угла KGED.

Хотя доказательства этих утверждений ещё проще, чем предыдущих, сами механизмы, именно, их полные циклы движения, напротив, интереснее. Поэтому остановимся на них подробнее.

Доказательство теоремы 3.4.

Необходимость.

Непосредственно из двух укладок вырожденного двухкривошипного четырёхзвенника, изображённых на рис. 4е, следуют два равенства:

$$12 + 1 = 1r + 11 \quad (\Pi 1)$$

$$11 - 1r = 12 - 1 \quad (\Pi 2).$$

В процессе движения этого четырёхзвенника есть такое положение его, когда кривошип OQ встаёт на линию стойки противоположно укладкам рис. 4е. Шарнир Q₀ занимает тогда положение -1 на оси стойки, см. рис. 4еа.

Из соотношения сторон ΔTQ_0R_0 , получаем неравенство, объединяя которое с (Π1) и (Π2), приходим к системе:

$$\begin{cases} 12 = 1r + 11 - 1 & (\Pi 1) \\ 11 = 1r + 12 - 1 & (\Pi 2) \\ 1r < 11 + 12 - 1 & (\Theta) \end{cases} \quad (6.П\gg)$$

Рис. 4еа

Эта система определяет все точки открытого луча DK.

Достаточность.

Точка $(l_r, 11, 12)$ - точка открытого луча DK, т. е. её координаты удовлетворяют системе (6.П).

Из первых двух уравнений (6.П) здесь имеем

$$|12 - 11| = l_r - 1,$$

что по введению функции (8) $QT(\varphi)$, φ - угол TOQ даёт

$$|12 - 11| \leq QT(\varphi) < 12 + 11.$$

Как и всюду ранее, эта цепочка неравенств означает, что для любого угла φ над стойкой $10=1$ существует четырёхзвенник, звено l_r которого - кривошип. Конечно, точка ветвления решения уравнений кинематики может быть точкой возврата движения звена, соединённого с опорой. Здесь важно, что существует цикл движения механизма, когда звено, соединённое с опорой, совершает не менее одного полного оборота без возвратов в движении. Поэтому, от противного, допустим, что за цикл движения, звено 12, в некотором положении совершает возврат. Тогда в этом положении

$$\text{либо } 11 - l_r + 1 > 12,$$

$$\text{либо } 11 + l_r < 12 + 1.$$

Но первое неравенство противоречит второму уравнению (6.П), а второе - первому. Таким образом, звено 12 - кривошип, а четырёхзвенник, укладывающийся в силу первых двух уравнений (6.П) на линию стойки так, как изображено на рис. 4е - вырожденный двухкривошипный. Теорема 3.4 доказана.

Заметим, что из первых двух равенств (6.П) следует

$$\begin{cases} 11 = 12 \\ l_r = 1 \end{cases}$$

Таким образом, внутренние точки луча DK определяют механизмы Галловея. В части своего цикла, когда левый кривошип подвижен, эти механизмы двигаются так, что левый кривошип совершает два оборота за один оборот правого кривошипа. Но часть своего полного цикла эти механизмы двигаются так, что левый кривошип неподвижен в положении OT, а правый кривошип и шатун двигаются как одно тело.

Как видно из рис. 2, луч DG симметричен лучу DK. Это обстоятельство избавляет нас от необходимости доказывать теорему 3.5.

Внутренние точки, и только они, луча DG определяют вырожденные двухкривошипные четырёхзвенники Галловея, в которых кривошипы l_r и 12 поменяны ролями по сравнению с четырёхзвенниками луча DK.

Докажем теорему 3.6. Необходимость.

Непосредственно из двух укладок вырожденного двухкривошипного четырёхзвенника, изображённых на рис. 4д, следуют два равенства:

$$1 + l_r = 11 + 12 \quad (\Pi 1)$$

$$1 + 12 = l_r + 11 \quad (\Pi 2)$$

При движении этого четырёхзвенника с перекрещивающимися кривошипами OQ и TR из положения $\Pi 1$ в положение $\Pi 2$ шатун QR поворачивается на 2π радиан. Следовательно, между этими двумя положениями механизма должно быть положение его, Θ , когда угол между $Q_\Theta R_\Theta$ и линией стойки равен π радиан, т. е. $Q_\Theta R_\Theta \parallel OT$. Это положение механизма изображено на рис. 4да. Из соотношения сторон, получающихся таким образом треугольников, имеем:

$$1 + 11 < l_r + 12 \quad (\Theta)$$

Рис. 4аа

Приведя соотношения (П1) (П2) и (Θ) к более привычному виду, получаем систему из двух равенств и одного неравенства.

$$\begin{cases} l_r = l_1 + l_2 - 1 & (\text{П1}) \\ l_2 = l_r + l_1 - 1 & (\text{П2}) \\ l_1 < l_r + l_2 - 1 & (\Theta) \end{cases} \quad (6. \text{П}')$$

Эта система однозначно определяет точки открытого луча DE.

Достаточность.

Точка (l_r, l_1, l_2) - точка луча DE, т. е. точка, координаты которой удовлетворяют системе (6.П'). Из первых двух уравнений следует:

$$l_r = l_2$$

$$l_1 = 1.$$

Это значит, что четырёхзвенник - параллелограмм, т. е. двухкривошипный механизм. Легко увидеть, что, благодаря равенствам (П1) и (П2), параллелограмм укладывается на линию стойки двумя способами, изображёнными на рис. 4д. Таким образом, четырёхзвенник, определяемый точками луча DE, вырожденный двухкривошипный, укладывающийся на стойку как сказано в условиях теоремы 3.6. Теорема доказана.

Итак, все три вида плоских шарнирных четырёхзвенников получили конкретные области определения в пространстве (o, l_r, l_1, l_2) . Правда, тут уместен вопрос: «Что с третьей призмой, система неравенств которой,

$$\begin{cases} l_1 > 0 \\ l_r + l_2 - 1 > l_1 \\ l_1 + l_2 - 1 < l_r \\ l_r + l_1 - 1 < l_2 \end{cases} \quad (6)?$$

В полном соответствии с доказанным выше, внутренние точки этой полубесконечной призмы определяют двухкоромысловые механизмы. Только за полный цикл движения этих механизмов шатун совершает полный оборот (на угол 2π). Вследствие этого, часть своего цикла эти двухкоромысловые механизмы проходят с перекрещиванием коромысел.

Вырожденный двухкоромысловый механизм укладывается в линию стойки тремя способами. Они изображены на рисунках 5а, 5б и 5в.

Рис. 5а
Грань ACD 3-й
призмы (без рёбер)

Рис. 5б
Грань EDCH 3-й
призмы (без рёбер)

Рис. 5в
Грань EDAL 3-й
призмы (без рёбер)

Теорема 4.1.

Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку l_0 , был вырожденным двухкоромысловым, укладывающимся в линию стойки первым образом (рис. 5а), необходимо и достаточно, чтобы точка (l_r, l_1, l_2) была внутренней точкой треугольной грани CAD третьей полубесконечной призмы, изображённой на рис. 2.

Теорема 4.2.

Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку l_0 , был вырожденным двухкоромысловым, укладывающимся в линию стойки вторым образом (рис. 5б), необходимо и достаточно, чтобы точка (l_r, l_1, l_2) была внутренней точкой полубесконечной грани EDCH третьей полубесконечной призмы.

Теорема 4.3.

Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку 10, был вырожденным двухкоромысловым, укладываемым в линию стойки третьим образом (рис. 5в), необходимо и достаточно, чтобы точка (l_r , l_1 , l_2), была внутренней точкой полубесконечной грани EDAL третьей полубесконечной призмы.

Доказательство теоремы 4.1.

Необходимость.

Имеем вырожденный двухкоромысловый механизм, опирающийся на стойку $l_0 = 1$, укладываемый на линию стойки так, как изображено на рис. 5а. О и Т - опорные шарниры. За цикл своего движения, кроме положения П, изображённого на рис. 5а, шарнир Q проходит положения Q_Θ и Q_Ω возврата коромысел OQ и TR, соответственно, см. рис. 5аа.

Рис. 5аа

Из положения укладки получаем:

$$l_r - l_1 + l_2 = 1. \quad (\Pi)$$

Из соотношений сторон $\triangle OQ_\Theta T$ и $\triangle OR_\Omega T$, соответственно:

$$l_r + 1 > l_1 + l_2 \quad (\Theta)$$

$$l_2 + 1 > l_r + l_1 \quad (\Omega)$$

Приводя равенство и неравенства к более привычному виду и добавля очевидное $l_1 > 0$, получаем систему соотношений, полностью определяющую внутренние точки грани CAD.

$$\begin{cases} l_1 = l_r + l_2 - 1 & (\Pi) \\ l_r > l_1 + l_2 - 1 & (\Theta) \\ l_2 > l_r + l_1 - 1 & (\Omega) \\ l_1 > 0 \end{cases} \quad (7.П)$$

Что и требовалось доказать.

Достаточность.

Точка (l_r , l_1 , l_2) - внутренняя точка грани CAD - точка, координаты которой удовлетворяют системе (7.П).

Из первого соотношения системы следует, что для четырёхзвенника, определяемого этой точкой, выполнимо положение на линии стойки, как показано на рис. 5а. См. рис. 5аб.

Это уравнение можно записать так:

$$1 - l_r = l_2 - l_1.$$

Отсюда, в силу последнего неравенства (7.П)

$$1 - l_r < l_2 + l_1.$$

С учётом второго соотношения (7.П), отсюда следует:

$$|1 - l_r| = 1 - l_r < l_2 + l_1 < 1 + l_r.$$

Первое равенство этой цепочки является следствием того факта, что весь тетраэдр ABCD расположен внутри единичного куба пространства (o , l_r , l_1 , l_2) и, следовательно, для всех внутренних точек грани CAD справедливо: l_r , l_1 , $l_2 < 1$.

Последняя цепочка неравенств означает, что над отрезком длиной $l_1 + l_2$, как над основанием, в плоскости можно построить треугольник (нужной нам ориентации, хотя, в данном случае, это даже не обязательно) со сторонами l_r и 1.

Рис. 5а6

Из второго неравенства системы (7.П) следует, что

$$\angle Q_{\Theta} O T = \varphi_{\Theta} = \arccos \frac{1 + l_1^2 - (l_1 + l_2)^2}{2 \cdot l_1} < \pi.$$

Функция $TQ(\varphi) = \sqrt{1 + l r^2 - 2 l r \cos(\varphi)}$ - чётная с монотонной, проходящей через начало координат, производной на отрезке $[-\varphi_0, \varphi_0]$. Следовательно, для любого угла φ из этого отрезка и для любого соответствующего положения звена OQ , см. рис. 5аб, справедливо:

$$1 - 1r = 12 - 11 = \left| \frac{12 - 11}{1} \right| = TQ(0) \leq TQ(\varphi) \leq TQ(-\varphi_0) = TQ(\varphi_0) = 12 + 11$$

Эта запись означает, что для любого угла φ из отрезка $[-\varphi_0, \varphi_0]$ над стойкой ОТ можно построить четырёхзвенник с подвижными звеньями 1г, 11, 12. При этом, звено 1г, опирающееся на опору О - коромысло.

Первое равенство и следующие два неравенства системы (7.П) не изменятся, если в них поменять местами $l_1 \leftrightarrow l_2$.

Это значит, что для звена 12 можно доказать всё, что только что было доказано для звена I_1 . Таким образом, звено 12 - коромысло, а четырёхзвенник, длины подвижных звеньев которого удовлетворяют системе (7.П) - вырожденный, двухкоромысловый, укладываемый на линию стойки, как показано на рис. 5а. Теорема 4.1 доказана.

Доказательство теоремы 4.2.

Необходимость.

Имеем вырожденный двухкоромысловый механизм, опирающийся на стойку $l_0 = 1$, укладываемый на линию стойки так, как изображено на рис. 5б. О и Т - опорные шарниры. За цикл своего движения, кроме положения П, изображённого на рис. 5а, шарнир Q проходит положения Q_{Θ} и Q_{Ω} возврата коромысел OQ и TR, соответственно, см. рис. 5ба.

Рис. 56а

Из положения укладки получаем:

$$l_r + 1 = l_1 + l_2 \quad (\Pi)$$

Из соотношений сторон $\Delta OQ_\Theta T$ и $\Delta OR_\Omega T$, соответственно:

$$l_r + l_2 - l_1 > 1 \quad (\Theta)$$

$$l_2 + 1 > l_r + l_1 \quad (\Omega)$$

Приводя равенство и неравенства к более привычному виду и добавляя очевидное $l_1 > 0$, получаем систему соотношений, полностью определяющую внутренние точки грани EDCH (луч $DE \parallel$ лучу CH).

$$\begin{cases} l_1 = l_r + l_2 - 1 & (\Pi) \\ l_r > l_1 + l_2 - 1 & (\Theta) \\ l_2 > l_r + l_1 - 1 & (\Omega) \\ l_1 > 0 \end{cases} \quad (7.П')$$

Достаточность.

Точка (l_r, l_1, l_2) - внутренняя точка грани EDCH - точка, координаты которой удовлетворяют системе (7.П').

Рис. 566

Из первого соотношения системы следует, что для четырёхзвенника, определяемого этой точкой, выполнимо положение на линии стойки, как показано на рис. 5б. См. рис. 566.

Внутренние точки грани EDCH расположены по одну сторону от плоскости $l_2 = l_1$, именно, $l_2 - l_1 > 0$. Второе и третье неравенства (7.П') можно записать:

$$1 - l_r < l_2 - l_1$$

$$l_r - 1 < l_2 - l_1.$$

Отсюда, с учётом первого равенства (7.П'), получаем

$$|l_r - 1| < l_2 - l_1 < l_r + 1.$$

Это двойное неравенство означает, что в плоскости рис. 566 можно построить два несовмещаемых треугольника со сторонами l_r , $1 (=l_0)$ и $(l_2 - l_1)$. На рис. 566 эти треугольники - $\Delta TOQ_{\Theta 1}$ и $\Delta TOQ_{\Theta 2}$. Из центра O опишем дугу, радиусом l_r , проходящую через точки $Q_{\Theta 2}$, Q_{Π} , $Q_{\Theta 1}$ и рассмотрим функцию

$$TQ(\varphi) = \sqrt{1 + l_r^2 - 2 l_r \cos(\varphi)} \quad \text{на отрезке } [\varphi_{\Theta}, 2\pi - \varphi_{\Theta}]$$

$$\varphi_{\Theta} = \arccos [1 + l_r^2 - (l_2 - l_1)^2 / 2 l_r].$$

Функция $TQ(\varphi)$ непрерывна, с непрерывной и монотонной производной, проходящей через точку $(\pi, 0)$, поэтому для любого

$\varphi \in [\varphi_{\Theta}, 2\pi - \varphi_{\Theta}]$ справедливо:

$$TQ(\varphi_{\Theta}) = TQ(2\pi - \varphi_{\Theta}) = l_2 - l_1 = |l_2 - l_1| \leq TQ(\varphi) \leq l_2 + l_1 = TQ(\pi).$$

Как и ранее, эта цепочка неравенств означает, что для любого $\varphi \in [\varphi_{\Theta}, 2\pi - \varphi_{\Theta}]$ над $TQ(\varphi)$, как над основанием, существует треугольник со сторонами $QR = l_1$ и $TR = l_2$, а над стойкой $OT = l_0$ существует четырёхзвенник с подвижными звеньями l_r , l_1 , l_2 . Так как $TQ(\varphi)$ достигает своего минимума на

границах отрезка - это точки возврата звена $OQ = l_r$. На рис. 5бб изображены также ΔOTR_{Ω_1} и ΔOTR_{Ω_2} , $OR_{\Omega_1} = OR_{\Omega_2} = l_r + l_1$. TR_{Ω_1} и TR_{Ω_2} - положения возврата звена TR . Это следует из факта, доказываемого в элементарной геометрии: «у двух треугольников с одинаковыми смежными сторонами угол между ними больше тот, что лежит против большей третьей стороны».

Таким образом, четырёхзвенник с подвижными звеньями l_r , l_1 , l_2 - определяемыми внутренней точкой грани $EDCH$, вырожденный, укладывающийся на линию стойки, как изображено на рис. 5б, двухкоромысловый. Теорема 4.2 доказана. За полный цикл движения этих вырожденных механизмов шатун поворачивается на угол 4π .

Легко видеть, что положение укладки на рис. 5в симметрично относительно середины стойки положению укладки, изображённого на рис. 5б. Справедливость утверждения теоремы 4.3 следует из справедливости утверждения теоремы 4.2 в силу того, что грань $EDAL$ симметрична грани $EDCH$.

Если считать грань ABC основанием тетраэдра $ABCD$, неописанными остались только три боковых ребра - CD , AD и BD .

Рис. 5а. Открытый отрезок CD ребро пересечения граней BCD и CAD

Рис. 5б. Открытый отрезок AD ребро пересечения граней CAD и ABD

Рис. 5в. Открытый отрезок BD - ребро пересечения граней ABD и BCD

Для этих вырожденных двухкривошипных механизмов справедливы утверждения:

Теорема 5.1.

Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку l_0 , был вырожденным кривошипно-коромысловым, укладывающимся в линию стойки двумя способами, изображёнными на рис. 6а, необходимо и достаточно, чтобы точка (l_r, l_1, l_2) была внутренней точкой открытого отрезка - ребра CD тетраэдра $ABCD$, изображённого на рис. 2.

Теорема 5.2.

Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку l_0 , был вырожденным коромысло-кривошипным, укладывающимся в линию стойки двумя способами, изображёнными на рис. 6б, необходимо и достаточно, чтобы точка (l_r, l_1, l_2) была внутренней точкой открытого отрезка - ребра AD тетраэдра $ABCD$.

Теорема 5.3.

Для того чтобы четырёхзвенник, опирающийся на стойку l_0 , был вырожденным параллелограммом, укладывающимся в линию стойки двумя способами, изображёнными на рис. 6в, необходимо и достаточно, чтобы точка (l_r, l_1, l_2) была внутренней точкой открытого отрезка - ребра BD тетраэдра $ABCD$.

Заметим, что схема укладки на рис. 6в соответствует расположению точки (l_r, l_1, l_2) на ребре BD ближе к т. D , чем к т. B . Если точка (l_r, l_1, l_2) расположена на BD ближе к т. B , чем к т. D , R_{n2} и Q_{n1} расположатся на OT в обратном порядке; если точка (l_r, l_1, l_2) совпадёт с серединой BD , R_{n2} и Q_{n1} совпадут с серединой OT . Эти различия в схеме укладки не влияют на формулировку и доказательство теоремы 5.3.

Доказательство теоремы 5.1. Необходимость.

Непосредственно из двух укладок вырожденного четырёхзвенника, изображённых на рис. 6а, следуют два равенства:

$$l + l_r = l_2 + l_1 \quad (П1)$$

$$l - l_r = l_2 - l_1 \quad (П2)$$

TR_{Ω_1} и TR_{Ω_2} - положения возврата коромысла TR на рисунке 6аа. Из соотношения сторон ΔTOR_{Ω_1} имеем:

$$l_2 + l > l_r + l_1 \quad (Θ)$$

Рис. 6аа

Приводя эти соотношения к более привычному виду и добавляя к ним первое из неравенств (5) - $lr + 11 + 12 > 1$, получаем систему соотношений, полностью определяющую внутренние точки ребра CD:

$$\begin{cases} lr = 11 + 12 - 1 & (\Pi 1) \\ 11 = lr + 12 - 1 & (\Pi 2) \\ 12 > lr + 11 - 1 & (\Theta) \\ lr + 11 + 12 > 1 & (8\Pi) \end{cases}$$

Достаточность.

Точка $(lr, 11, 12)$ - точка открытого отрезка CD, т. е. её координаты удовлетворяют системе (8Π).

Из первых двух уравнений (8Π), получаем

$$12 = 1$$

$$lr = 11.$$

А такой четырёхзвенник очевидным образом укладывается в линию стойки обоими способами, рис. 6а, см. рис. 6аа. Из этого рисунка видно, что звено OQ проворачивается и, следовательно, для любого $\varphi \in [0, 2\pi]$ определена функция

$$TQ(\varphi) = \sqrt{1 + lr^2 - 2lr \cos(\varphi)}.$$

При этом, вследствие того, что открытый отрезок CD полностью расположен по одну сторону плоскости $11 = 12$, именно $12 - 11 > 0$ и второго, и первого уравнений (8Π), справедливо

$$|12 - 11| = 12 - 11 = 1 - lr = TQ(0) \leq TQ(\varphi) \leq TQ(\pi) = 1 + lr = 12 + 11.$$

Как и ранее, эта цепочка соотношений означает, что для любого $\varphi \in [0, 2\pi]$ над $TQ(\varphi)$ существует треугольник со сторонами 11 и 12, а над стойкой OT - четырёхзвенник с подвижными звеньями $lr, 11, 12$, определяемыми точками открытого отрезка CD, причём, звено lr - кривошип.

Из последнего и третьего соотношений системы (8Π) имеем

$$(0 \Rightarrow) 1 - 12 < lr + 11 < 1 + 12.$$

Это значит, что над отрезком длиной $lr + 11$ можно построить, вообще говоря, два треугольника со сторонами 1 и 12. На рис. 6аа это $\triangle OTR_{\Omega 1}$ и $\triangle OTR_{\Omega 2}$.

Из приведённого выше свойства углов и сторон треугольников из элементарной геометрии следует, что угол OTR_{Θ} - максимально возможный для данного четырёхзвенника. Таким образом, звено TR - коромысло. Теорема 5.1 доказана. Половину цикла этих вырожденных кривошипно-коромысловых механизмов коромысло 12 лежит на линии стойки, а шатун и кривошип совершают полный оборот вокруг опоры O как одно тело.

Легко видеть, что положения укладки на рис. 6б симметричны относительно середины стойки положениям укладки, изображённым на рис. 6а. Справедливость утверждения теоремы 5.2 следует из справедливости утверждения теоремы 5.1 в силу того, что ребро AD симметрично ребру CD.

Доказательство теоремы 5.3. Необходимость.

Непосредственно из двух упаковок вырожденного четырёхзвенника, изображённых на рис. 6в, следуют два равенства:

$$1r + 11 = 1 + 12 \quad (\Pi 1)$$

$$12 + 11 = 1 + lr \quad (\Pi 2)$$

На рис. 6ва изображено также положение четырёхзвенника при повороте звена, опирающегося на опору O на угол

$$\varphi_{\Theta} = 2\pi - \arccos(lr).$$

Из соотношения сторон треугольников, образованных звеньями механизма в этом положении, имеем:

$$l_1 + 1 > l_r + l_2 \quad (\Theta)$$

Добавляя к полученным трём соотношениям очевидное, например, $l_2 > 0$, получаем систему четырёх соотношений, полностью определяющую все точки открытого ребра BD тетраэдра ABCD.

Рис. 66а

Достаточность.

Ребро BD лежит в плоскости симметрии $l_r = l_2$; действительно, из первых двух равенств системы, определяющей его точки, следует:

$$\begin{cases} l_1 = 1 \\ l_r = l_2 \end{cases}$$

Подставляя это в оставшиеся два неравенства, получаем

$$\begin{cases} 0 < l_r < 1 \\ 0 < l_2 < 1 \end{cases}$$

Эти два неравенства следуют также из того, что ребро BD является диагональю грани $l_1=1$ единичного куба пространства (o, l_r, l_1, l_2) .

Легко увидеть, что определяемые последними четырьмя соотношениями параллелограммы укладываются на линию стойки так, как изображено на рисунке 6в, то есть являются вырожденными четырёхзвенниками. Теорема 5.3 доказана.

За цикл движения параллелограммов, определяемых внутренними точками ребра BD, их звенья, опирающиеся на опоры, не только совершают полные обороты вокруг своих опор, но и имеют точки возврата движения.

Замечание. Полгода назад, когда был написан предыдущий вариант этой статьи, я познакомился с работой М. Д. Ковалёва [9]. В этой работе, в частности, получена классификация типов кинематических шарнирных схем плоских шарнирных четырёхзвенников с помощью трёхмерного множества S , определяемого особыми точками рычажного отображения $F: R^4 \rightarrow R^3$. Закономерно, что это множество совпадает с изображённым на рис. 2.

Выводы

1. Описано взаимно-однозначное соответствие точек множества (5) трёхмерного пространства (o, l_r, l_1, l_2) и всех возможных плоских шарнирных четырёхзвенников.
2. Используя описанную здесь систему классификации плоских шарнирных четырёхзвенников, например при оптимальном синтезе четырёхзвенника конкретного вида, нет нужды опасаться попасть в область механизмов другого вида при [8] случайном выборе начальной точки оптимизации, а проводить оптимизацию над строго определённым множеством пространства (o, l_r, l_1, l_2) .

Литература

1. Теория механизмов и машин. Терминология. Под ред. Н. И. Левитского. М.: Наука, 1984.
2. Фролов К. В., Попов С. А., Мусатов А. К., Тимофеев Г. А., Никоноров В. А. Теория механизмов и

- механика машин: Учеб. для вузов. 5-е изд. М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.
3. *Белоконев И. М., Балан С. А., Белоконев К. И.* Теория механизмов и машин. Конспект лекций. Изд. 2-е. М. 2004.
 4. *Коловский М. З., Евграфов А. Н., Семёнов Ю. А., Слоущ А. В.* Теория механизмов и машин. Учеб. пособие для студентов вузов. 3-е изд. М.: Издательский центр «Академия», 2008.
 5. *Юдин В. А., Петрокас Л. В.* Теория механизмов и машин. Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., М.: «Высшая школа», 1977.
 6. *Озол О. Г.* Теория механизмов и машин. М. «Наука», 1984.
 7. *Борисенко Л. А.* Теория машин, механизмов и манипуляторов. Учеб. пособие, М.: ИНФРАМ, 2013.
 8. *Левитский Н. И.* Теория механизмов и машин: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
 9. *Ковалёв М. Д.* Геометрическая теория шарнирных устройств. Известия РАН. Серия математическая. Т. 58, М.: ВИНТИ, 1994. С. 45-70.