УДК 681.3.06-192

В. А. Смагин, докт. техн. наук*Кафедра метрологического обеспечения,**Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург*

ПОНЯТИЕ ОБРАТНОГО ОПТИМАЛЬНОГО В СМЫСЛЕ ЗАПОЛНЕНИЯ КВАНТОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ

Известно оптимальное в смысле заполнения квантование информации, предполагающее для заданного распределения вероятностей нахождение оптимального временного кванта информации и минимальной величины математического ожидания времени для него – при условии, что кванты между собой разделяются постоянными заданными пробелами. В статье предлагается обратное квантование к данному, называемому нами прямым. В нем кванты фиксированы, известны заранее, а величины пробелов между квантами случайны, характеризуются распределением вероятностей. Сами кванты могут носить любой объектовый вид, не только информационный. Для формализации предложенного замысла исследуется пример обратного квантования для «тяжелого» распределения вероятностей – равномерного распределения. Рассмотрены парциальные составляющие квантования: информация, пробелы и количество циклов. Изучаются два варианта: при отсутствии и при наличии ошибок элементов квантов. Сделано заключение в пользу обратного квантования. Оно может найти более широкое применение на практике.

Квант, квантование, прямое и обратное, затраты, информация, пробел, минимум математического ожидания, распределение вероятностей

DOI: 10.20295/2412-9186-2021-7-1-57-66

Введение

Процесс представления определенного количества информации в виде совокупности квантов называется квантованием информации. Первые основополагающие результаты решения класса задач оптимального квантования случайной величины получены в [1, 2]. В статье [1] решена задача теории ценности информации с учетом ее стоимости. Оптимальное в смысле заполнения квантование информации в математической форме представлено в виде [2]:

$$M(x) = (x + c) \int_0^{\infty} \left(E\left(\frac{z}{x}\right) + 1\right) f(z) dz, \quad (1)$$

где c — установленный постоянный пробел между квантами; x — величина кванта, E — наибольшая целая часть числа с недостатком; $f(x)$ — плотность вероятности случайного количества квантуемой информации Z . Данное квантование будет называться в дальнейшем прямым информационным квантованием. Оно производится с целью определения такой величины x_0 , при которой математическое ожидание $M(x_0)$ достигает минимального значения. Такое квантование отличается от [3, 4] и имеет другой смысл и приложение.

В отличие от прямого информационного квантования (1), вводится обратное оптимальное в смысле заполнения квантование информации. В математической форме оно имеет вид:

$$M(y) = (x_3 + y) \cdot \int_0^{\infty} \left(E\left(\frac{z}{y}\right) + 1\right) \cdot g(z) dz, \quad (2)$$

где $M(y)$ — математическое ожидание квантованной случайной величины $\dot{Y}$; определяемой плотностью вероятности величины пробела между квантами $g(y)$ при заранее заданной величине кванта информации x_3 .

Физическая интерпретация (1) авторами [2] была связана с информационным представлением плотности $f(x)$. В нашем понимании его можно трактовать более широко, в связи с некоторым продуктом, и лишь в частном случае — с информацией. Физическую интерпретацию (2) представим промежутком — пробелом между фиксированными заранее определенными величинами кванта продукта или информации.

В случае (1) величина пробела c задана из тактических, технических, организационных и других соображений. Она представлена фиксированной величиной.

В случае (2) необходима плотность вероятности величины пробела, при которой можно оптимальным образом удовлетворить требования минимума математического ожидания при квантовании. Отыскание или определение этой плотности не рассматривается в данной статье и должно разумно подбираться из практических соображений.

Примеры необходимости обратного квантования многочисленны и достаточно очевидны. Мы живем в период интенсификации дискретной математики. Продукты, явления, информация количественно нами представляются ограниченными рамками. Товары помещают в контейнеры и ящики, информацию — в книги, фильмы, файлы и т. д.

С таким представлением этих объектов мы связаны в жизни и науке. Наряду с объектовым, информационным квантованием при определенных или заданных пробелах между различными в более широком понимании «квантами» необходимо ввести квантование по величине промежутков, пропусков, пробелов между заданными величинами «квантов». Это поможет достичь наиболее выгодных, экономичных, безопасных и др. показателей качества. Для сравнения прямого и обратного квантования выбирается представление информационного процесса «тяжелым» для квантования вероятностным равномерным распределением.

1. Пример исследования с прямым и обратным квантованием

Объектовый случайный процесс задается равномерной плотностью вероятности:

$$f(x) = \text{dunif}(x, a, d), a = 0, b = 100 \text{ ед.}$$

Требуется выполнить **прямое квантование** с пробелами между квантами $c = 5$ ед.

Рис. 1. Плотность вероятности квантованной случайной величины

Рис. 2. Математическое ожидание квантованной случайной величины

На рисунке 1 представлена плотность вероятности, на рисунке 2 — математическое ожидание квантованной случайной величины. Математическое ожидание рассчитано по формуле (1). Оптимальная величина кванта и величина затрат видны из равенства $M(28) = 64.956$.

Используя выражение (1), определим парциальные затраты квантования по частным формулам из (1) при $c=5$:

$$\text{по информации } 28 \cdot \int_0^{100} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{28}\right) + 1 \right) \cdot f(z) dz = 64.856,$$

$$\text{для пробелов } 5 \cdot \int_0^{100} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{28}\right) + 1 \right) dz = 11.599,$$

$$\text{для циклов } \int_0^{100} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{28}\right) + 1 \right) \cdot f(z) dz = 2.32.$$

Расчет количества циклов можно округлить до целого числа и не принимать во внимание. Число циклов — это число квантов в интеграле плюс дополнительный квант для непринятой информации в остатке квантования.

Поступая таким же образом и меняя величину пробела от 0 до 60, получим следующие значения для пробелов c , для оптимального кванта x_0 , для величины информации I , для величины пробелов Π , для количества циклов Π . Для работы с ними числовые данные сведены в таблицу 1.

Изучая данные таблицы, остановимся на последней строке и получим нужные затраты:

$$\text{по информации } 100 \cdot \int_0^{100} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{100}\right) + 1 \right) \cdot f(z) dz = 100,$$

по пробелам $60 \cdot \int_0^{100} \left(\text{trunc} \left(\frac{z}{100} \right) + 1 \right) \cdot f(z) dz = 60,$

по числу циклов $\int_0^{100} \left(\text{trunc} \left(\frac{z}{100} \right) + 1 \right) \cdot f(z) dz = 1.$

Итого: $100 + 60 = 160.$

При помощи MathCAD 12 [5] построим график зависимости величины оптимального кванта от величины пробела между квантами. График приведен на рисунке 3.

$A(t) = \text{linterp}(t, x, y).$

$\underline{x} := (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 60)^T,$

$y := (0 \ 10 \ 12 \ 20 \ 25 \ 28 \ 32 \ 33 \ 33 \ 33.3 \ 50 \ 100)^T *$

Рис. 3. Зависимость величины оптимального кванта от величины пробела между квантами

Таблица 1. Значение квантованной случайной величины

c	x_0	И	П	Ц
0	0	0	0	0
1	10	55	5.5	5.5
3	20	60	9	3
4	25	62.5	10	2.5
5	28	64.956	11.599	2.32
6	32	66.55	12.478	2.08
7	33	66.663	14.141	2.02
8	33	66.663	16.161	2.02
9	33	66.663	18.181	2.02
10	33.3	66.6	20	2.02
20	50	69.126	30	1.5
30	50	75	45	1.5
50	50	75	75	1.5
60	60	100	100	1

Предельная величина пробела равна 60.

Она отвечает нашему заключению. Если принять $c = 60$, то можно выполнить один цикл с оптимальным квантом 100 единиц и потратить в нем на пробел 60 единиц. Задача квантования будет решена за один цикл.

Решение задачи обратным квантованием

Принимаем следующие данные:

$x_0 = 20$ ед., $y = 0, 1 \dots 100$, $n = 9$ ед., $\delta = 3$ ед., $g(y) = \text{dnorm}(y, n, \delta)$, $d = 9$. Выражение для решения задачи принимает вид:

$$N(y) = (x_0 + d) \cdot \int_0^{20} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{y}\right) + 1 \right) \cdot g(z) dz. \quad (3)$$

На рисунках 4 и 5 представлены плотность вероятности и функция, обратная квантования.

Рис. 4. Плотность вероятности, обратной квантованию

Рис. 5. Функция вероятности, обратной квантованию

$$N(19.9) = 28.958, N(20) = 28.957, N(100) = 28.957.$$

За минимальное значение кванта примем $y_0 = 20$ ед и вычислим парциальные затраты:

по информации $20 \cdot \int_0^{20} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{20}\right) + 1 \right) \cdot g(z) dz = 19.971,$

по пробелам $\int_0^{20} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{20}\right) + 1 \right) \cdot g(z) dz = 0.999,$

по числу циклов $\int_0^{20} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{20}\right) + 1 \right) \cdot g(z) dz = 0.999.$

Итого за одну пересылку кванта $x_0 = 20$ ед. имеем $19.991 + 8.987 = 28.958$. На полную пересылку требуется 5 квантов $x_0 = 20$ ед., поэтому $28.958 \times 5 = 144.79$.

Сравнивая обратное квантование с прямым, на основе выполненного исследования получаем: $160 - 145 = 15$. Это значит, что в данном случае обратное квантование выгоднее прямого квантования на 15 единиц.

2. Сравнение затрат прямого и обратного квантования в случае, когда элементы квантов могут подвергаться внешнему воздействию и получать искажения, приводящие к их ошибкам

Примем вероятность ошибки элемента кванта $q = 0.2$, среднее время устранения ошибки в кванте $\tau = 2$ часа. Закон распределения ошибок биномиальный. Среднее время исправления всех ошибок в кванте определяется выражением:

$$T = \tau \cdot \sum_{k=0}^{x_0} \frac{k \cdot x_0! \cdot q^k \cdot (1-q)^{x_0-k}}{k! \cdot (x_0-k)!}. \quad (4)$$

Определим среднее время исправления ошибочных элементов по формуле (4), т. к. для прямого квантования и 100 элементов оно составит 40 h , а для обратного квантования и 20 элементов — 8 h . Это определенное время нужно прибавить к соответствующему времени пробелов при прямом и обратном квантовании.

Так, для прямого квантования получаем:

$$a = 0, b = 100, f(x) = \text{dunif}(x, a, b), c1 = 60,$$

$$M1(x) = (x + c1 + 40) \cdot \int_0^{100} (\text{trunc}(\frac{z}{x}) + 1) \cdot f(z) dz, \quad (5)$$

для обратного квантования:

$$y = 0, 1..100, n = 9, \delta = 3, g(y) = \text{dnorm}(y, n, \delta), x_0 = 20,$$

Рис. 6. Функции прямого квантования

Рис. 7. Функции обратного квантования

$$N1(y) = (x_0 + d + 8) \cdot \int_0^{20} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{y}\right) + 1 \right) \cdot g(z) dz. \quad (6)$$

На рисунке 6 для сравнения представлены функции прямого квантования без ошибок и с ошибками. Без ошибок: $x_0 = 100, M(100) = 160$, с ошибками: $x_0 = 100, M1(100) = 200$. Циклы по 1.

Без ошибок:

$$100 \cdot \int_0^{100} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{100}\right) + 1 \right) \cdot f(z) dz = 100$$

$$60 \cdot \int_0^{100} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{100}\right) + 1 \right) \cdot f(z) dz = 60$$

$$\int_0^{100} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{100}\right) + 1 \right) \cdot f(z) dz = 1$$

Итого: $100+60=160$.

С ошибками:

$$100 \cdot \int_0^{100} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{100}\right) + 1 \right) \cdot f(z) dz = 100$$

$$(60 + 40) \cdot \int_0^{100} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{100}\right) + 1 \right) \cdot f(z) dz = 100$$

$$\int_0^{100} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{100}\right) + 1 \right) \cdot f(z) dz = 1$$

Итого: $100+100=200$.

На рисунке 7 для сравнения представлены функции, обратные квантованию без ошибок и с ошибками $d1 = 17$. Без ошибок на одну посылку в 20 элементов $x_0 = 20, N1(20) = 28.958$. На пять посылок $28.958 \times 5 = 144.79$. С ошибками на одну посылку $N1(20) = 36.946$. На пять посылок $36.946 \times 5 = 184.73$.

Без ошибок:

$$20 \cdot \int_0^{20} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{20}\right) + 1 \right) \cdot g(z) dz = 19.971$$

$$9 \cdot \int_0^{20} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{20}\right) + 1 \right) \cdot g(z) dz = 8.987$$

$$\int_0^{20} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{20}\right) + 1 \right) \cdot g(z) dz = 0.999$$

Итого: $19.971+8.987=28.958$.

На 5 посылок 145, т. е.

меньше, чем 160 при прямом квантовании на 15 ед.

С ошибками:

$$20 \cdot \int_0^{20} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{36.946}\right) + 1 \right) \cdot g(z) dz = 19.971$$

$$17 \cdot \int_0^{20} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{36.946}\right) + 1 \right) \cdot g(z) dz = 16.975$$

$$\int_0^{20} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{36.946}\right) + 1 \right) \cdot g(z) dz = 0.999$$

Итого: $19.971+16.975=36.946$.

На 5 посылок 184.73, т. е.

меньше, чем 200 при прямом квантовании на 15.054 ед.

Общий вывод: коррекция ошибок при обратном квантовании выгоднее, чем при прямом.

Заключение

При порче продуктов, искажении ошибками информации необходимо восстановить их в уже введенных ограничительных рамках. К сожалению, и в условиях пандемии необходимо решать задачи, связанные с сохранением безопасности, работоспособности, здоровья, качества перемещения, лечения и профилактики групп людей, личного состава, методами дискретной математики с привлечением вероятностных и нечетких методов. Это объясняется тем, что многие предметы, явления и информация в действительности представлены фиксированными количествами [6–8]. Поэтому наряду с известной моделью квантования информации, которое мы называем прямым, в статье представлена новая модель, именуемая обратной моделью квантования.

Выводы, полученные здесь, нуждаются в дальнейшей проверке при других распределениях вероятностей. В прикладных исследованиях необходимо учитывать стоимостные, временные и другие затраты, которые будут усиливать эффективность обратного квантования. Это тема будущих прикладных исследований. Она связана с вопросами пересылки объектов, продуктов, безопасности людей, противостояния конфликтующих сторон, противодействия вредным факторам, в частности пандемии. В научном плане объемное квантование целесообразно связывать, на наш взгляд, с функциями концентрации вероятностных и нечетких процессов [9], а также с эффектами при наличии рисков.

Библиографический список

1. Гришанин Б. А. Учет ценности информации в теории ценности информации/Б. А. Гришанов//Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1967. – № 2.
2. Андронов А. М. Оптимальное в смысле заполнения квантование информации/А. М. Андронов, Т. Н. Бокоев//Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1979. – № 3. – С. 154–158.
3. Смагин В. А. Математическая модель детерминированных и случайных процессов в виде последовательного гиперфрактального распределения/В. А. Смагин, В. П. Бубнов//Автоматика на транспорте. – 2019. – № 2. – С. 145–159.
4. Smagin V.A. Optimum likelihood quantization of the information in space with restriction of zones of influence of quanta/V.A. Smagin//B. V. Gnedenko, RT&A #01 (31). – March 2014. – Vol.9. – Pp. 92–97.
5. Кирьянов Д. В. MathCAD 12. – СПб: БХВ-Петербург, 2005, 557 с.
6. Брюханов Ю. А. Эффекты квантования сигналов с амплитудной манипуляцией/Ю. А. Брюханов, Ю. А. Лукашевич//Радиотехника. 2020. – Т. 84. – № 1 (1). – С. 42–48.
7. Сай С. В. Способ управления качеством передачи мелких структур изображений в стандарте JPEG2000/С. В. Сай, А. Г. Шоберг//Компьютерная оптика. – 2020. – Т. 44. – № 3. – С. 401–408.

8. Gorobey N. N. Symmetry transformation parameters as classical dynamic variables in the gauge theory/N. N. Gorobey, A. S. Lukyanenko, A. V. Goltsev//St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. – 2020. – T. 13. – № 3. – С. 130–135.
9. Smagin V. A. Application of the concentration function in fuzzy sets theory/V. A. Smagin, E. M. Shurygin//Интеллектуальные технологии на транспорте. – 2020. – № 1 (21). – С. 16–23.

Smagin Vladimir A.

A. F. Mozhaysky Military Space Academy, Department of Metrological Support, St. Petersburg

CONCEPT OF RETURN OPTIMUM IN SENSE OF FILLING OF QUANTIZATION OF INFORMATION

We know the optimal quantization of information in the sense of filling, which implies finding the optimal time quantum of information for a given probability distribution and the minimum value of the mathematical expectation of time for it, provided that the quanta are separated by constant specified spaces. In this paper, we propose an inverse quantization to this quantization, which we call direct. In it, the quanta are fixed, known in advance, and the values of the gaps between the quanta are random, characterized by a probability distribution. The quanta themselves can have any object type, not just information. To formalize the proposed idea, the article examines an example of reverse quantization for a “heavy” probability distribution – a uniform distribution. Partial components of quantization are considered: information, spaces, and the number of cycles. Two variants are studied in the absence of errors and in the presence of errors of quantum elements. The conclusion is made in favor of reverse quantization. It can be applied more widely in practice.

Quantum, quantization, direct and return, expenses, the information, a blank, a population mean minimum, distribution of probabilities.

DOI: 10.20295/2412-9186-2021-7-1- 57-66

References

1. Grishanin B. A. (1967) [Accounting for the value of information in the theory of the value of information]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika* [Bulletin of the USSR Academy of Sciences. Technical cybernetics], no 2.
2. Andronov A. M., Bokaev T. N. (1979) [Optimal quantization of information in the sense of filling]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika* [Bulletin of the USSR Academy of Sciences. Technical cybernetics], no. 3, pp. 154–158.
3. Smagin V. A., Bubnov V. P. (2019) [Mathematical model of deterministic and random processes in the form of sequential hyper fractal distribution]. *Avtomatika na transporte* [Automation on transport], no. 2, pp. 145–159.
4. Smagin V. A. (2014) [Article Optimum likelihood quantization of the information in space with restriction of zones of influence of quanta]. *Forum B. V. Gnedenko, RT&A*, no. 01 (31), March, vol. 9, pp. 92–97.
5. Kiryanov D. V. (2005) [Mathcad 12]. Saint Petersburg, “BHV-Petersburg” Publ.
6. Bryukhanov Yu. A., Lukashevich Yu. A. (2020) [Effects of quantization of signals with amplitude manipulation]. *Radio engineering*, vol. 84, no. 1 (1), pp. 42–48.

7. Sai S. V., Shoberg A. G. (2020) [A method for managing the quality of transmission of small image structures in the JPEG2000 standard]. *Computer optics*, vol. 44, no. 3, pp. 401–408.
8. Gorobey N. N., Lukyanenko A. S., Goltsev A. V. (2020) [Symmetry transformation parameters as classical dynamic variables in the gauge theory]. *St. Petersburg State Polytechnical Universit Journal. Physics and Mathematics*, vol. 13, no. 3, pp. 130–135.
9. Smagin V. A., Shurygin E. M. (2020) [Application of the concentration function in fuzzy sets theory]. *Intelligent transport technologies*, no. 1 (21), pp. 16–23.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии профессором
В. В. Сапожниковым
Поступила в редакцию 13.10.2020, принята к публикации 02.11.2020*

СМАГИН Владимир Александрович — заслуженный деятель науки Российской Федерации, доктор технических наук, профессор кафедры метрологического обеспечения Военно-космической академии им. А. Ф. Можайского
e-mail: va_smagin@mail.ru

© Смагин В. В., 2021