**Андрей Александрович
Радио́нов**
Andrey A. Radionov

**Алексей Дмитриевич
Чернышев**
Aleksey D. Chernyshev

Математическая модель движения автомобиля

Mathematical model of vehicle motion

Аннотация

В статье рассматривается плоскопараллельное движение автомобиля, предложено описание математической модели четырехколесного автомобиля с индивидуальным электроприводом каждого колеса, организованного на основе системы «мотор-колесо», дана структурная схема математической модели. После чего математическая модель была реализована в программе MATLAB Simulink.

Ключевые слова: математическая модель, автомобиль, плоскопараллельное движение, MATLAB Simulink, мотор-колесо.

DOI: 10.20291/2311-164X-2015-4-69-73

Summary

The article deals with plane-parallel motion of an automobile; a mathematical model of a four-wheeled vehicle with an individual electric drive for each wheel arranged according to "motor-wheel" scheme is proposed, a block diagram of the mathematical model is given. After that, the mathematical model was implemented in MATLAB Simulink.

Keywords: mathematical model, automobile, plane-parallel motion, MATLAB Simulink, motor-wheel.

DOI: 10.20291/2311-164X-2015-4-69-73

Авторы Authors

Андрей Александрович Радио́нов, профессор, доктор технических наук, проректор по учебной работе Южно-Уральского государственного университета (НИУ), Челябинск, e-mail: RadionovAA@rambler.ru | **Алексей Дмитриевич Чернышев**, аспирант базовой кафедры «Мехатроника» Южно-Уральского государственного университета (НИУ), Челябинск; e-mail: fis6en@gmail.com

Andrey Aleksandrovich Radionov, Professor, DSc in Engineering, Vice-Rector for Academic Affairs of the South Ural State University (NIU), Chelyabinsk, e-mail: RadionovAA@rambler.ru | **Aleksey Dmitrievich Chernyshev**, PhD student, Department of Mechatronics Basic Department, South Ural State University (NIU), Chelyabinsk; e-mail: fis6en@gmail.com

Введение

В настоящее время при проектировании любого сложного технического устройства разработчики создают его математическую модель, автомобиль в этом случае не является исключением. Математическая модель необходима для проверки работоспособности технического объекта и проведения его исследований. Математическая модель позволяет снизить количество ресурсов, необходимых для создания конечного продукта. Объем и качество информации зависит только от того, насколько детально проработана модель.

Описание математической модели

Движение автомобиля рассматривается как плоскопараллельное движение твердого тела по горизонтальной поверхности (рис. 1). Такое допущение сделано для упрощения системы уравнений, описывающих движение. В общем случае движение автомобиля в плоскости можно описать следующей системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{cases} \vec{a} = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^4 \vec{P}_{fi} + \sum_{i=1}^4 \vec{R}_i + \vec{P}_w \right) \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} = \sum_{i=1}^4 M_{nki} + \sum_{i=1}^4 M(\vec{R}_i) + \sum_{i=1}^4 M(\vec{P}_{fi}) \end{cases}, \quad (1)$$

где $\vec{a}$ — вектор ускорения центра масс автомобиля; m — масса автомобиля; $\vec{P}_{fi}$ — вектор силы сопротивления прямолинейному движению i -го колеса; $\vec{R}_i$ — вектор силы взаимодействия с грунтом i -го колеса; $\vec{P}_w$ — вектор силы сопротивления воздуха; J_z — момент инерции автомобиля относительно оси z ; M_{nki} — момент сопротивления повороту i -го колеса.

Ускорение точки при плоскопараллельном движении может быть определено как

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} + \omega_z \vec{V}, \quad (2)$$

где dV/dt — относительная производная скорости центра масс автомобиля.

Из рис. 1 видно, что проекции скоростей в координатах x' , y' , z' :

$$\begin{cases} V_{x'} = \frac{dy'}{dt} = V_x \cos \theta - V_y \sin \theta \\ V_{y'} = \frac{dx'}{dt} = V_x \sin \theta + V_y \cos \theta \end{cases}. \quad (3)$$

Рис. 1. Расчетная схема движения автомобиля:
 x, y, z — оси подвижной системы координат, жестко связанной с автомобилем; x', y', z' — оси неподвижной системы координат;
 θ — угол поворота автомобиля вокруг оси z' относительно оси x' ; $\vec{V}$ — вектор скорости центра автомобиля;
 ω_z — вектор угловой скорости поворота автомобиля

Учитывая, что

$$\omega_z = d\theta/dt, \quad (4)$$

при совместном рассмотрении формул (1) — (4) можно записать следующую систему уравнений в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} a_x = \frac{dV_x}{dt} - \omega_z V_y = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^4 P_{fxi} + \sum_{i=1}^4 R_{xi} + P_{wx} \right) \\ a_y = \frac{dV_y}{dt} + \omega_z V_x = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^4 P_{fyi} + \sum_{i=1}^4 R_{yi} + P_{wy} \right) \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} = \sum_{i=1}^4 M_{nki} + \sum_{i=1}^4 M(\vec{R}_i) + \sum_{i=1}^4 M(\vec{P}_{fi}) \\ V_{x'} = \frac{dy'}{dt} = V_x \cos \theta - V_y \sin \theta \\ V_{y'} = \frac{dx'}{dt} = V_x \sin \theta + V_y \cos \theta \\ \omega_z = \frac{d\theta}{dt} \end{cases}, \quad (5)$$

где a_x, a_y — проекции ускорения центра масс автомобиля на оси координат x, y, z ; $P_{fxi}, P_{fyi}, R_{xi}, R_{yi}, P_{wx}, P_{wy}$ — проекции сил действующих на автомобиль в координатах x, y, z .

Для решения данной системы уравнений необходимо определить силы, действующие на автомобиль в каждый момент времени. Для этого рассмотрим одно из колес автомобиля, изобразив расчетную схему сил

и моментов, действующих на колесо со стороны дороги (рис. 2). Для расчета сил используем зависимости, приведенные в [2].

Момент и сила сопротивления качению зависят от свойств покрышки и поверхности, по которой перемещается автомобиль, а также пропорциональны значению нормальных реакций Q_i , которые находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} Q_1 - Q_2 + Q_3 - Q_4 = 0 \\ Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = mg \\ Q_1 x_1 + Q_2 x_2 + Q_3 x_3 + Q_4 x_4 = -m a_x H_z \\ Q_1 y_1 + Q_2 y_2 + Q_3 y_3 + Q_4 y_4 = -m a_y H_z \end{cases} \quad (6)$$

где x_i, y_i — координаты i -го колеса в подвижной системе координат $x-y$; H_z — высота, на которой находится центр масс автомобиля.

Первое уравнение основано на утверждении, что концы векторов нормальных реакций лежат в одной плоскости; второе выводится из условия равенства суммы нормальных реакций и веса автомобиля; третье и четвертое — из условия равенства моментов.

Рис. 2. Расчетная схема сил и моментов, действующих на колесо со стороны опорной поверхности

Из расчетной схемы (рис. 2) можно определить силы, действующие на колесо и его линейные скорости. Вектор скорости скольжения нижней точки колеса $\vec{V}_{ск}''$ в системе координат $x''-y''$ определяется:

$$\vec{V}_{ск}'' = \vec{V}_{пер}'' + \vec{V}_{отн}'' \quad (7)$$

где $\vec{V}_{пер}''$ — вектор переносной скорости в системе координат $x''-y''$; $\vec{V}_{отн}''$ — вектор относительной скорости в системе координат $x''-y''$.

Вектор переносной скорости:

$$\vec{V}_{пер} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \quad (8)$$

где $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости подвижной системы координат относительно неподвижной системы координат; $\vec{\rho}$ — радиус-вектор, определяющий положение подвижной системы координат.

Соответственно, проекции вектора переносной скорости в $x''-y''$:

$$\begin{cases} V_{перx} = V_x - \omega_z y_k \\ V_{перy} = V_y + \omega_z x_k \end{cases} \quad (9)$$

где V_x, V_y — проекции вектора скорости автомобиля на оси $x-y$; ω_z — угловая скорость поворота автомобиля; x_k, y_k — координаты колеса в системе $x-y$.

Тогда проекции вектора переносной скорости в системе координат $x''-y''$:

$$\begin{cases} V_{перx}'' = (V_x - \omega_z y_k) \cos \theta_k + (V_y + \omega_z x_k) \sin \theta_k \\ V_{перy}'' = -(V_x - \omega_z y_k) \sin \theta_k + (V_y + \omega_z x_k) \cos \theta_k \end{cases} \quad (10)$$

где θ — угол поворота колеса относительно скорости на оси координат.

Таким образом, проекции вектора относительной скорости на $x''-y''$:

$$\begin{cases} V_{отнx}'' = \omega_k r_k \\ V_{отny}'' = 0 \end{cases} \quad (11)$$

где ω_k — угловая скорость колеса, r_k — динамический радиус колеса.

Отсюда следует, что проекции вектора скорости скольжения на $x''-y''$:

$$\begin{cases} V_x'' = (V_x - \omega_z y_k) \cos \theta_k + (V_y + \omega_z x_k) \sin \theta_k - \omega_k r_k \\ V_y'' = -(V_x - \omega_z y_k) \sin \theta_k + (V_y + \omega_z x_k) \cos \theta_k \\ V_{ск} = \sqrt{V_x''^2 + V_y''^2} \end{cases} \quad (12)$$

Коэффициент скольжения по модели «с прямоугольным отпечатком» [3] расчета взаимодействия колеса с опорной поверхностью:

$$S = \frac{V_{ск}}{\omega_k r_k} \quad (13)$$

Величина силы взаимодействия колеса с дорогой:

$$R = \mu_s Q, \quad (14)$$

где μ_s — коэффициент трения частичного скольжения [4]:

$$\mu_s = \mu_{s\alpha\max} \left(1 - e^{-\frac{S}{S_0}}\right) \left(1 + e^{-\frac{S}{S_1}}\right), \quad (15)$$

где S_0 и S_1 — постоянные, $\mu_{s\alpha\max}$ — коэффициент трения полного скольжения для угла поворота вектора скорости скольжения, относительно оси $x''\alpha$:

$$\mu_{s\alpha\max} = \frac{\mu_{sx\max}\mu_{sy\max}}{\sqrt{\mu_{sx\max}^2 \sin^2 \alpha + \mu_{sy\max}^2 \cos^2 \alpha}}, \quad (16)$$

где $\mu_{sx\max}$ и $\mu_{sy\max}$ — параметры эллипса трения, определяются опытным путем,

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{V''_{cky}}{V''_{ck}} \\ \cos \alpha = \frac{V''_{ckx}}{V''_{ck}} \end{cases} \quad (17)$$

Вектор силы взаимодействия с опорным грунтом всегда направлен противоположно вектору скорости скольжения. Его проекции на $x''-y''$:

$$\begin{cases} R''_x = -R \cos \alpha \\ R''_y = -R \sin \alpha \end{cases} \quad (18)$$

Тогда его проекции на $x-y$:

$$\begin{cases} R_x = R''_x \cos \theta_k - R''_y \sin \theta_k \\ R_y = R''_x \sin \theta_k + R''_y \cos \theta_k \end{cases} \quad (19)$$

Величина силы сопротивления прямолинейному движению:

$$P_f = fQ, \quad (20)$$

где f — коэффициент сопротивления прямолинейному движению колеса.

Вектор $\vec{P}_f$ противоположен проекции переносной скорости на x'' . Поэтому его проекции на $x-y$:

$$\begin{cases} P_{fx} = -P_f \frac{V_{\text{перх}}}{|V''_{\text{пер}}|} \cos \theta_k \\ P_{fy} = -P_f \frac{V_{\text{перх}}}{|V''_{\text{пер}}|} \sin \theta_k \end{cases} \quad (21)$$

Примем, что $\vec{P}_w$, направлен противоположно вектору скорости центра масс автомобиля, тогда:

$$P_w = c_x F q_v, \quad (22)$$

где c_x — коэффициент обтекаемости; F — лобовая площадь автомобиля;

$$F = k_{\text{лоб}} B H, \quad (23)$$

где $k_{\text{лоб}} = 0,25 \dots 0,45$ — коэффициент лобовой формы автомобиля; B и H — колея и высота машины соответственно;

$$q_v = \rho_v V^2 / 2, \quad (24)$$

где ρ_v — плотность воздуха.

Скольжение отпечатка шины обуславливает присутствие момента сопротивления повороту. Для решения поставленной задачи с допустимой точностью можно воспользоваться следующей системой уравнений для нахождения момента сопротивления повороту [5]:

$$\begin{cases} M_{nki} = \frac{M_{\text{пкmax}}}{1 + 0,15 \frac{R_{nki}}{b_k}} \\ M_{\text{пкmax}} = 0,375 \mu_{s\alpha\max} Q \sqrt{\frac{\pi l_k b_k}{4}} \end{cases} \quad (25)$$

где $M_{\text{пкmax}}$ — момент сопротивления повороту колеса стоя на месте; l_k и b_k — длина и ширина пятна контакта; R_{nki} — радиус траектории колеса.

Использование индивидуального привода каждого колеса позволяет полностью реализовать достоинства электрического привода [6]. Для питания двигателей электрической трансмиссии могут использоваться преобразователи, описанные, например, в [7, 8]. Такая трансмиссия позволит индивидуально для каждого колеса управлять тяговыми характеристиками. Что в свою очередь позволит сформировать оптимальный режим работы, минимизировать движение колеса юзом и буксом, реализовать быстродействующие системы активной безопасности.

Трансмиссия автомобиля с колесной формулой 4×4 с независимым приводом каждого колеса по принципу «мотор-колесо» описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} J_{k1} \frac{d\omega_{k1}}{dt} = M_{d1} - M_{c1} \\ J_{k2} \frac{d\omega_{k2}}{dt} = M_{d2} - M_{c2} \\ J_{k3} \frac{d\omega_{k3}}{dt} = M_{d3} - M_{c3} \\ J_{k4} \frac{d\omega_{k4}}{dt} = M_{d4} - M_{c4} \end{cases}, \quad (26)$$

где J_{ki} — момент инерции i -го мотор-колеса; M_{di} — момент, развиваемый i -м мотор-колесом, M_{ci} — момент сопротивления на i -м колесе.

Реализация математической модели

На основании (5)–(26) в программе MATLAB Simulink была создана математическая модель расчета сил и моментов, действующих на колеса автомобиля и сам автомобиль. В предложенной модели входными воздействиями являются: линейная скорость автомобиля, угловая скорость поворота автомобиля, угловые скорости вращения колес, угол поворота колес и нормальные реакции колес. Выходными координатами — значения для проекций силы взаимодействия колеса с опорной поверхностью, проекций силы сопротивления воздушной среды, проекций силы сопротивления прямолинейному движению колеса, моментов сопротивления повороту колес.

На рис. 3 представлена структурная схема математической модели автомобиля.

Рис. 3. Структурная схема математической модели автомобиля

Блок «Body» моделирует движение автомобиля в плоскости как плоскопараллельное движение твердого тела (5). Блок «Calculation of forces» производит расчет сил в каждый момент времени (6)–(25). Блок «Transmission» является математической моделью трансмиссии с индивидуальным электроприводом каждого колеса (26). Блок «Control System» является системой управления, которая осуществляет задание на формирование тяговых моментов на каждом колесе.

Заключение

Данная математическая модель используется при разработке систем автоматического управления движением автомобиля с электроприводом, в том числе систем активной безопасности. Кроме того, позволяет выполнять проверку их работоспособности. **ИТ**

Список литературы

1. Марохин С. М. Прогнозирование характеристик подвижности спецавтомобиля, оснащенного системами активной безопасности : дис. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук. — М. : ООО «ДИСА», 2005. — 146 с.
2. Смирнов Г. А. Теория движения колесных машин : учеб. для студентов машиностроительных специальностей вузов. — 2-е изд., доп. и перераб. — М. : Машиностроение, 1990. — 352 с.
3. Рождественский Ю. Л., Машков К. Ю. О формировании реакций при качении упругого колеса по недеформируемому основанию // Труды МВТУ. — 1982. — № 390. — С. 56–64.
4. Эллис Д. Р. Управляемость автомобиля / пер. с англ. — М. : Машиностроение, 1975. — 216 с.
5. Потоскуев С. В. Повышение скорости выполнения маневров автомобиля с помощью принудительного задания соотношения скоростей вращения колес // Известия высших учебных заведений. — 2011. — № 5. — С. 12–20.
6. Радионов А. А., Чернышев А. Д. Формирование технических требований к трансмиссии автомобиля // Наука и производство Урала. — 2015. — № 11. — С. 84–89.
7. Radionov A. A., Maklakov A. S., Karyakina E. A. New control method of back to back converter // International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2015 : Proceedings. — 2015. DOI: 10.1109/SIBCON.2015.7147135.
8. Maklakov A. S., Radionov A. A. EMC evaluation of three level NPC converter based on space vector PWM // Proceedings of the 2015 IEEE North West Russia Section Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conference, ElConRusNW 2015. — P. 236–240. DOI: 10.1109/ElConRusNW.2015.7102269.