Из опыта преподавания. VIII. Сетчатые орнаменты

Ю. Л. Войтеховский

Геологический институт ФИЦ КНЦ РАН, Апатиты
Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург
Voytekhovskiy_YuL@pers.spmi.ru

После 7 групп симметрии бордюров, 17 групп симметрии сетчатых орнаментов – следующий шаг на пути к 230 пространственным группам симметрии в университетском курсе кристаллографии. Предложен простой вывод сетчатых орнаментов, сочетающий получение 10 плоских кластеров и их трансляции в 5 параллелограммных сетках. Анализ сетчатых орнаментов в городском ландшафте (художественные мозаики, облицовки стен, укладки полов и т. д.) обращает студентов к актуальной проблеме распространенности 230 пространственных групп симметрии в минералах.

Ключевые слова: сетчатый орнамент, кластер, параллелограммная сетка, группа симметрии.

From teaching experience. VIII. Grid ornaments

Yu. L. Voytekhovsky

Geological Institute of FRC KSC RAS, Apatity
Saint Petersburg Mining University, Saint-Petersburg

After 7 symmetry groups of borders, 17 symmetry groups of grid ornaments are the next step on the way to 230 space symmetry groups in the university course of crystallography. A simple derivation of grid ornaments is proposed, combining the search for 10 flat clusters and their translations in 5 parallelogram grids. Analysis of grid ornaments in the urban landscape (artistic mosaics, wall claddings, floorings, etc.) draws students to the actual problem of the prevalence of 230 space symmetry groups in minerals.

Keywords: grid ornament, cluster, parallelogram grid, symmetry group.

Введение

Ранее автором рассмотрены 7 типов бордюров [2] и их композиции в решетках [3] как первый шаг на пути от 32 точечных групп симметрии (т. г. с.) к 230 пространственным (федоровским) группам. Далее предлагается закономерный второй шаг – вывод 17 сетчатых орнаментов (с. о.), т. е. фигур без особенных (неподвижных) точек с полярной плоскостью (т. е. плоскостью листа, у которого нас интересует лишь лицевая сторона) и двумя направлениями трансляций. Именно этой логике следует А. И. Китайгородский в курсе органической кристаллохимии [4]. Об этом же говорит Н. В. Белов в предисловии к учебнику кристаллографии И. Костова: «Чтобы эти объекты [решетки Бравэ и федоровские группы – Ю. В.] преподавать надлежащим образом, нужен специальный курс, в учебнике же более элементарной кристаллографии они всегда выглядят куцыми. <...> 17 плоских групп должны предшествовать 230 пространственным, чтобы на них была изучена симметрия бесконечных мотивов на обоях и тканях, обобщением которых будут все структурные мотивы трехмерных кристаллов. <...> На обойных группах [группах с. о. – Ю. В.] была бы изучена такая важная характеристика центрированных групп, как всегдашнее «чередование» элементов симметрии двух сортов: плоскостей зеркальных с плоскостями скольжения <...>. Что-то об этом, очевидно, должно быть сказано в элементарном курсе...» [5, с. 9–10].

Перечень с. о. дан А. В. Шубниковым [6]. С краткими комментариями они приведены в современном издании [1]. Для чтения последнего нужна серьезная математическая подготовка. А в книге [6], ставшей библиографической редкостью, в силу ее краткости и прикладного характера не акцентированы важные методические нюансы. Так, при выводе с. о. в качестве строительных блоков использованы ранее найденные бордюры, которые транслируются в другом (отличном от оси бордюра) направлении. На первый взгляд, такое блочное строительство рационально, но так получаются не все с. о. (13 из 17). Поэтому в рассуждении закономерно возникают, снова без пояснений, кластеры с осями симметрии 3, 4 и 6, транслируемые в параллелограммных сетках (п. с.) для получения недостающих с. о. Нам представляется, что в университетском курсе кристаллографии для геологов важно дать лаконичное (умещающееся в лекцию), но последовательное (без логических пропусков) изложение темы. Далее приведен опробованный автором метод, состоящий из четырех шагов: 1) перечисление кластеров для трансляционно (решетчато) упорядоченных систем фигур на плоскости; 2) вывод п. с.; 3) вывод с. о.; 4) номенклатура с. о., согласованная с методом вывода.

Кластеры

Подобно тому, как бордюры строились из кластеров, симметрия которых (1, 2, m , $mm2$) вкладывалась в

Для цитирования: Войтеховский Ю. Л. Из опыта преподавания. VIII. Сетчатые орнаменты // Вестник геонаук. 2021. 7(319). С. 13–18. DOI: 10.19110/geov.2021.7.2.

For citation: Voytekhovsky Yu. L. From teaching experience. VIII. Grid ornaments. Vestnik of Geosciences, 2021, 7(319), pp. 13–18, doi: 10.19110/geov.2021.7.2.

Рис. 1. Кластеры, разрешенные в сетчатых орнаментах

Fig. 1. The clusters allowed in grid ornaments

симметрию бесконечного бордюра [2], здесь следует начать с перечисления кластеров, согласованных с трансляционно упорядоченными на плоскости системами фигур. Очевидно, для них разрешены лишь поворотные оси порядков 1, 2, 3, 4 и 6, ортогональные плоскости рисунка. Эти т. г. с. называются примитивными. Инверсионные (переворачивающие) оси невозможны, т. к. плоскость рисунка полярна. Добавляя к осям плоскости симметрии, получим планальные т. г. с. m , $mm2$, $3m$, $4mm$ и $6mm$. В совокупности — 10 плоских т. г. с. Соответствующие кластеры даны на рис. 1. Черным показан асимметричный элемент, размножаемый соответствующей т. г. с.

Как и в случае бордюров [2, 3], преподавание легко иллюстрировать объектами из мира природы, архитектуры, искусства. Выдающийся пример — книга [6], переизданная в расширенном виде [7]. Кластеры плоских т. г. с. нетрудно найти в городском ландшафте. Четыре из них 1, 2, m и $mm2$ порождают разнообразие бордюров и обсуждались в статье [2]. Кластеры 3, 4, 6, $3m$, $4mm$ и $6mm$ можно видеть в дисках автомобилей (рис. 2). Наиболее часты диски $6mm$ и 6, редки $4mm$ и 4, очень редки $3m$ и 3. Здесь уместно напомнить студентам, что неравномерная встречаемость п. г. с. в природных кристаллах — актуальная проблема минералогической кристаллографии. Можно заметить и то, что примитивные диски (без плоскостей симметрии) подчеркивают вращательное движение лучше, чем планальные. В этом — несомненный эстетический заряд кристаллографии.¹

¹ Предоставляем читателю убедиться, что в современных автомобилях преобладают планальные и примитивные диски с осями 5 и 7, не относящиеся к нашему рассмотрению. Вероятно, дизайнеры автомобильной промышленности подсознательно тяготеют к «биологическим» осям симметрии, присущим морским звездам и офиурам. Но если диски с т. г. с. 3, $3m$ и 6 прикручены 5 болтами (рис. 2) — это в любом случае говорит об отсутствии эстетического чувства и понимания того, что кристаллографическая дисгармония не может сочетаться с хорошей механикой. Кристаллограф такое колесо не купит!

Рис. 2. Кластеры 3, 4, 6 (вверху), $3m$, $4mm$, $6mm$ (внизу) в колесах автомобилей. Фото автора

Fig. 2. Clusters 3, 4, 6 (top), $3m$, $4mm$, $6mm$ (bottom) in car wheels. Author's photo

Сетки

А. В. Шубников перечисляет 5 п. с. без вывода [6, с. 99–100]. В лекции следует получить их непрерывной деформацией квадратной п. с. (ведь квадрат — самый симметричный из параллелограммов) независимо по двум параметрам — углу между направлениями трансляции ($\alpha = \pi/2 \rightarrow \alpha \neq \pi/2$) и шагу трансляции ($a = b \rightarrow a \neq b$). Казалось бы, это дает 4 варианта на фоне понижения симметрии ячейки: 1) квадрат ($\alpha = \pi/2$, $a = b$, т. г. с. $4mm$) $\rightarrow$ 2) прямоугольник ($\alpha = \pi/2$, $a \neq b$, $mm2$) или 3) ромб ($\alpha \neq \pi/2$, $a = b$, $mm2$) $\rightarrow$ 4) параллелограмм общего вида ($\alpha \neq \pi/2$, $a \neq b$, 2). И здесь важно не пропустить вариант 5) при $\alpha = \pi/3$ и $a = b$ возникает п. с. с осями симметрии 6 и 3 (рис. 3). Результат неожиданный, ведь эта гексагональная п. с. симметричнее исходной квадратной. Обращение к городским ландшафтам и здесь может оживить лекцию. Все типы п. с. легко иллюстрируются примерами оконных и балконных решеток, оград, стенных и половых покрытий и т. д. (рис. 4). А мысль о том, что дизайнеры интуитивно нашли все п. с., побуждает студентов к их самостоятельному выводу.

Рис. 3. Схема вывода 5 параллелограммных сеток
Fig. 3. The scheme for derivation of 5 parallelogram grids

Рис. 4. Параллелограммные сетки в дизайнерских решениях. Сетка № 5 — в двух вариантах. Фото автора
Fig. 4. Parallelogram grids in design solutions. The grid No. 5 — in two versions. Author's photo

Принципы композиции

Вывод сетчатых орнаментов представляет собой, по сути, перебор всевозможных композиций кластеров (рис. 1) и п. с. (рис. 3). Важный момент, на который надо обратить внимание студентов, состоит в том, что п. с. изначально не задана как канва для инкрустации кластерами, но рождается при их трансляции согласно заданному правилу. Это позволяет помещать кластеры в узлы воображаемой п. с. При этом некоторые кластеры могут быть ориентированы в одной п. с. по-разному, а трансляции по одному или обоим направлениям могут быть со скользящим отражением. Грубая оценка дает не менее сотни вариантов, что обескураживает. Студентов следует ориентировать на поиск рационального алгоритма, который состоит в следующем.

При композиции кластера и п. с. (табл. 1) группа симметрии полученного с. о. есть общая подгруппа их групп симметрии. Кластер именно такой т. г. с. и нужно совмещать с данной п. с. Оказалось, он всегда есть в нашем реестре (рис. 1). Проще говоря, нет смысла совмещать высокосимметричный кластер с низкосимметричной п. с. Аналогично, не нужно совмещать низкосимметричный кластер с высокосимметричной п. с. Эта догадка легко иллюстрируется примерами из городского ландшафта (рис. 5). Укажем процедуру композиции знаком «+», перед ним — тип кластера, после него — тип п. с. (рамки рисунка), после знака «=» — результат: 1) $1 + mm2 = 1$, 2) $2 + 4mm = 2$, 3) $2 + mm2 = 2$,

Таблица 1. Композиции кластеров и параллелограммных сеток
Table 1. Compositions of clusters and parallelogram grids

	a/a 6mm	$a:a$ 4mm	a/a mm2	$a:b$ mm2	a/b 2
6mm	+				
6	+				
3m	++				
3	+				
4mm		+			
4		+			
mm2			+	+	
m			+	+	
2					+
1					+

Примечание: левый столбец — т. г. с. кластеров (рис. 1); верхняя строка — п. с. (рис. 3, 4) и т. г. с. узлов. Использованы символы А. В. Шубникова [6]: двоеточие — прямой угол, косая черта — косой угол между направлениями трансляции; первая буква (a) — шаг трансляции в горизонтальном направлении, вторая (a или b) — в другом направлении, разные буквы — разные шаги; к букве добавлен штрих (a' или b'), если трансляция со скользящим отражением.

Note: left column — p. s. g. of clusters (Fig. 1); upper line — p. g. (Figs. 3, 4) and p. s. g. of nodes, symbols of A. V. Shubnikov were used [6]: colon — right angle, slash — oblique angle between translation directions, the first letter (a) — translation step in the horizontal direction, the second (a or b) — in the other direction, different letters — different steps, a stroke is added to the letter (a' or b') if the translation is with a sliding reflection.

Рис. 5. Композиции кластеров и сеток. Фото автора
Fig. 5. Compositions of clusters and grids. Author's photo

4) $3m + mm2 = m$ (здесь совмещены две различные ячейки с симметрией $mm2$ — ромбическая a/a и прямоугольная $a:b$), 5) $4 + 4mm = 4$, 6) $4mm + mm2 (a/a) = mm2$, 7) $4mm + mm2 (a:b) = mm2$, 8) $6mm + 4mm = mm2$, 9) $m + 4mm = m$.

Варианты, которые остается проверить, даны в табл. 1. Дополнительная характеристика п. с. — группа симметрии узла. По сути, она нужна для различения лишь двух п. с. типа a/a : с $\alpha = \pi/6$ ($6mm$) и $\alpha \neq \pi/6$ ($2mm$). Два плюса в одной из ячеек указывают на два с. о. с разной ориентацией кластера $3m$ в п. с. a/a . Указанными приемами получаются 13 с. о. Далее используем скользящие отражения в п. с. a/a и $a:b$ с ортогональными направлениями трансляции.² И здесь возможен рациональный подход. Из рассмотрения можно исключить кластеры $6mm$, $4mm$ и $2mm$ с двумя ортогональными плоскостями симметрии, т. к. при скользящем отражении они самосовмещаются, лишь вдвое уменьшая шаг трансляции по одному или обоим направлениям. По изложенным выше соображениям кластер 4 достаточно рассмотреть в п. с. a/a ; кластеры $3m$, 6 и 3 — в п. с. $a:b$, где они понижают свою симметрию до m , 2 и 1, соответственно. При этом кластер m имеет смысл транслировать со скользящим отражением лишь в одном направлении — перпендику-

лярном его плоскости симметрии. Перебор 7 вариантов дает 4 новых с. о. (табл. 2). Три композиции дают уже известные с. о.: $4 + a':a = 1 + a':b' = 2 + a':b; 2 + a':b' = mm2 + a/a$.

Сетчатые орнаменты

Все с. о., как результат всевозможных композиций кластеров и п. с. с учетом простых трансляций и плоскостей скользящего отражения, даны на рис. 6. Исходные сетки показаны тонкими линиями, результирующие элементы симметрии с. о. предоставляем читателям найти самостоятельно. Они почти очевидны, за исключением разве что плоскостей скользящего отражения. Это полезно сделать, чтобы увидеть «всегдашнее „чередование“ элементов симметрии двух сортов: плоскостей зеркальных с плоскостями скольжения» [5, с. 10].

С. о. $2 + a':b$ (рис. 6, № 16), полученный также как $4 + a':a$ и $1 + a':b'$, требует обсуждения в связи с его описанием А. В. Шубниковым. «Этот орнамент состоит из ромбов, заштрихованных по двум направлениям [рис. 7 — Ю. В.]. В горизонтальный бордюр входят только одинаково заштрихованные ромбы, расположенные цепочкой. Весь орнамент строится скользящим переносом этой цепочки по вертикали. Двойные оси располагаются в центрах ромбов, в их вершинах и в серединах сторон [последнее не верно — Ю. В.]. Плоскости скользящего отражения проходят через середины смежных сторон ромбов по горизонтальным и по вертикальным направлениям» [6, с. 104].

На рис. 7 (в центре) дано наше изображение этого с. о. К исходной п. с. $a:b$ $mm2$ добавлены прямые, проходящие через центры пустых прямоугольников, расположенных в шахматном порядке, и образующие п. с. a/a $mm2$. Обе п. с. гармонично совмещены в дизайне главного офиса компании ЦДС, Санкт-Петербург, пр. Добролюбова, 8 (рис. 8). Плоскости симметрии обеих п. с. не совпадают, но согласованы по направлениям. Ячейки производной п. с. — те ромбы, о которых сказано выше. Двойные оси располагаются в серединах сторон ромбов для этой п. с., но не для орнамента в целом. Плоскостями скользящего отражения для ромбов служат плоскости симметрии исходной п. с., что запутывает объяснение. Как показано выше, всякий с. о. следует выводить из исходного асимметричного элемента, из которого плоскими т. г. с. строятся 10 кластеров (рис. 1), размножающиеся в 17 с. о. (рис. 6) с помощью 5 п. с. (рис. 3, 4). Во избежание ошибок, объяснения должны следовать этой логике.

Таблица 2. Композиции кластеров и п. с. со скользящими отражениями
Table 2. Compositions of clusters and parallelogram grids with sliding reflections

Кластеры / Clusters	П. с. со скользящими отражениями P. g. with sliding reflections	
4	$a':a'$	$a':a$
$3m \rightarrow m$	—	$a':b$
$6 \rightarrow 2$	$a':b'$	$a':b$
$3 \rightarrow 1$	$a':b'$	$a':b$

² Ортогональность трансляций обычно не поясняется. При ее отсутствии бордюр, получаемый при скользящем отражении относительно 2-го направления, пересекается с исходным, полученным вдоль 1-го направления (независимо от того, использовалось ли вдоль него скользящее отражение). Анализ полученной картины, особенно при иррациональном отношении $a : b$ трансляций, выходит за рамки стандартной теории.

Рис. 6. Сетчатые орнаменты

Fig. 6. Grid ornaments

Рис. 7. Сетчатый орнамент № 16 (рис. 6). Слева — по [6, с. 105, рис. 119], в центре — наша версия, справа — коврик (кафе на наб. Фонтанки, Санкт-Петербург, фото автора)

Fig. 7. Grid ornament No. 16 (Fig. 6). Left — according to [6, p. 105, Fig. 119], centre — our version, right — a mat (café on the Fontanka Emb., St. Petersburg, author's photo)

Номенклатура

Далее предлагается номенклатура с. о., строго следующая использованному алгоритму. Для каждого с. о. сначала указана т. г. с. кластера (рис. 1), далее — тип п. с. (рис. 3, 4), знак «+» для краткости опущен. При этом п. с. $a:a$, $a:b$ и a/b однозначно определяют т. г. с. узлов $4mm$, $mm2$, 2 и в их указании не нуждаются. Две п. с. — a/a с т. г. с. $6mm$ и $mm2$ — различаются тем, что с первой сочетаются только кластеры $6mm$, 6, $3m$ и 3, со второй — $mm2$ и m (табл. 1). Осталось различить два с. о.

типа $3m a/a$ (рис. 6, №№ 3, 4). Но в № 3 заполнена лишь половина ячеек, что отражено знаком $\frac{1}{2}$ в символе. Этот нюанс надо запомнить. Любой другой с. о. прямо выводится из символа.

Предлагаемая номенклатура проще таковой по А. В. Шубникову (номера соответствуют рис. 6): 1) $6mm a/a$ [6, с. 114, № 17], 2) $6 a/a$ [6, с. 114, № 16], 3) $3m a/a \frac{1}{2}$ [6, с. 114, № 15], 4) $3m a/a$ [6, с. 112, № 14], 5) $3 a/a$ [6, с. 112, № 13], 6) $4mm a:a$ [6, с. 110, № 12], 7) $4 a:a$ [6, с. 109, № 10], 8) $mm2 a:b$ [6, с. 109, № 9], 9) $mm2 a/a$ [6, с. 107,

Рис. 8. Совмещение сетей $a:b$ и $a/a\ mm2$ в дизайне здания. Фото автора

Fig. 8. Combining $a:b$ and $a/a\ mm2$ grids in building design. Author's photo

№ 8], 10) $m\ a:b$ [6, с. 107, № 7], 11) $m\ a/a$ [6, с. 106, № 6], 12) $2\ a/b$ [6, с. 102, № 3], 13) $1\ a/b$ [6, с. 100, № 1], 14) $4\ a':a'$ [6, с. 110, № 11], 15) $m\ a':b$ [6, с. 105, № 5], 16) $2\ a':b$ [6, с. 104, № 4], 17) $1\ a':b$ [6, с. 101, № 2].

Заключение

В статье предложен простейший вывод 17 сетчатых орнаментов, как второй (после 7 бордюров) шаг на пути освоения 230 пространственных групп симметрии кристаллов — трехмерных орнаментов из атомов и их группировок. По ходу вывода использованы 10 плоских групп симметрии, 5 параллелограммных сеток, пересечения групп симметрии кластеров и сеток. Лаконичность вывода сетчатых орнаментов обеспечена именно сочетанием этих теоретико-групповых концепций.

Усваивать теорию легче, если изложение сопровождается наглядными примерами. Их неистощимый источник — городской ландшафт: решетки и архитектурные украшения зданий, а также ковры, рисунчатые ткани и — неожиданно для автора — колеса автомобилей. Организуя жизненное пространство, человек наследует природе и неизбежно попадает в ловушку той или иной главы кристаллографии — науки об упорядоченных системах. В этом ее фундаментальное зна-

чение. Из этого следует необходимость ее преподавания в университетских естественнонаучных курсах.

Автор благодарит студентов Санкт-Петербургского горного университета С. И. Азаренко, А. А. Дирксен, А. С. Иванову, К. П. Мальцеву, Е. А. Потанину, С. В. Шовкун за помощь в сборе орнаментов и обсуждение темы, а также рецензентов за замечания, способствовавшие более ясному изложению материала.

Литература

1. Вайнштейн Б. К. Современная кристаллография. Т. 1. М.: Наука, 1979. 383 с.
2. Войтеховский Ю. Л. Из опыта преподавания. VI. Симметрия бордюров // Вестник геонаук. 2020. № 8. С. 28–31. DOI: 10.19110/geov.2020.8.4.
3. Войтеховский Ю. Л. Из опыта преподавания. VII. Соподчинение групп симметрии и кристаллографический критерий гармонии // Вестник геонаук. 2021. № 2. С. 19–22. DOI: 10.19110/geov.2021.2.4.
4. Китайгородский А. И. Органическая кристаллохимия. М.: АН СССР, 1955. 558 с.
5. Костов И. Кристаллография. М.: Мир, 1965. 528 с.
6. Шубников А. В. Симметрия. М.–Л.: АН СССР, 1940. 176 с.
7. Шубников А. В., Копцык В. А. Симметрия в науке и искусстве. Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004. 560 с.

References

1. Weinstein B. K. *Sovremennaya kristallografiya* (Modern Crystallography). Vol. 1. Moscow: Nauka, 1979, 383 pp.
2. Voytekhovsky Yu. L. From teaching experience. VI. Symmetry of borders. *Vestnik of Geosciences*, 2020, 8, pp. 28–31. DOI: 10.19110/geov.2020.8.4.
3. Voytekhovsky Yu. L. From teaching experience. VII. Subordination of symmetry groups and crystallographic criterion of harmony. *Vestnik of Geosciences*, 2021, 2, pp. 19–22. DOI: 10.19110/geov.2021.2.4.
4. Kitaygorodsky A. I. *Organicheskaya kristalloghiya* (Organic Crystal Chemistry). Moscow: Acad. Sci. USSR, 1955, 558 pp.
5. Kostov I. *Kristallografiya* (Crystallography). Moscow: Mir, 1965, 528 pp.
6. Shubnikov A. V. *Simmetriya* (Symmetry). Moscow–Leningrad: Acad. Sci. USSR, 1940, 176 pp.
7. Shubnikov A. V., Koptsyk V. A. *Simmetriya v nauke i iskusstve* (Symmetry in Science and Art). Moscow–Izhevsk: Inst. of Computer Researches, 2004, 560 pp.

Received / Поступила в редакцию 24.06.2021