ИЗ ОПЫТА ПРЕПОДАВАНИЯ. V. ФЕДОРОВСКИЕ ПАРАЛЛЕЛОЭДРЫ

Ю. Л. Войтеховский

Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург

Voytekhovskiy_YuL@pers.spmi.ru

В статье обращено внимание на то, что есть 5 федоровских параллеледров, а не 4, как указывают некоторые авторы: трипараллеледр (куб), тетрапараллеледр (комбинация гексагональной призмы и пинакоида), два гексапараллеледра (ромбододекаэдр и «удлиненный ромбододекаэдр», т. е. комбинация тетрагональной призмы и тетрагональной дипирамиды), гептапараллеледр (специальная, с равными ребрами, комбинация куба и октаэдра). Гексапараллеледры образуют в пространстве сходным образом устроенные и расположенные «колонны» (термин Е. С. Федорова). Но они имеют разные комбинаторные типы, не получаются друг из друга однородными деформациями и должны трактоваться в курсе кристаллографии как различные.

Ключевые слова: федоровские параллеледры, комбинаторный тип выпуклого полиэдра, однородная деформация.

FROM TEACHING EXPERIENCE. V. FEDOROV'S PARALLELOHEDRA

Yu. L. Voytekhovsky

Saint-Petersburg Mining University, Saint-Petersburg

The article draws attention to the fact that there are 5 Fedorov's parallelohedra, and not 4, as some authors indicate: a triparallelohedron (cube), a tetraparallelohedron (a combination of a hexagonal prism and a pinacoid), 2 hexaparallelohedra (a rhombic dodecahedron and an «elongated rhombic dodecahedron», i. e. a combination of a tetragonal prism and a tetragonal dipyramid), a heptaparallelohedron (a special, with equal edges, combination of a cube and an octahedron). Hexaparallelohedra form in space similarly arranged and located «columns» (term of E. S. Fedorov). But they have different combinatorial types, cannot be obtained from each other by homogeneous deformations, and should be treated in the course of crystallography as different ones.

Keywords: Fedorov's parallelohedra, combinatorial type of a convex polyhedron, homogeneous deformation.

Введение

В минералогическом отделе музея Санкт-Петербургского горного университета, в витрине, посвященной достижениям Е. С. Федорова, есть экспозиция о четырех способах заполнения пространства параллеледрами. На мой вопрос, где же пятый, после проверки каталогов был дан ответ: «У такого-то мастера в 1937 г. (!) приняты четыре модели. Стало быть, все на месте»...

Тема о федоровских параллеледрах важна в преподавании кристаллографии. Ее обсуждение ждало своей очереди. Приведем отрывок одной из статей: «После этого и наступила эпоха теорий заполнения пространства выпуклыми, равными по размеру и смежными по плоскостям многогранниками, названными Евграфом Федоровым параллеледрами. Оказалось, что таких фигур может быть только четыре — куб, гексагональная призма с пинакоидом, ром(бо)дodeкаэдр (опечатка в источнике. — Ю. В.) и федоровский кубооктаэдр с 36 равными ребрами. Выяснилось, что все остальные параллеледры, описывающие реальные кристаллы, могут быть математически выведенными из этих федоровских фигур путем однородных деформаций. Вот так Е. С. Федоров и получил все типы решеток Браве...» [3, с. 38]. Вполне обозначилось противоречие, с которым следует разобраться.

Из истории вопроса

Обратимся к авторитетным мнениям. Характеризуя «Начала учения о фигурах», И. И. Шафрановский пишет: «Е. С. Федоров впервые исчерпывающе рассматривает законы выполнения пространства. Он выводит телесные фигуры (многогранники), которые всецело выполняют пространство, будучи равными, параллельно расположенными и смежными по целым граням. Называя такие фигуры параллеледрами, он устанавливает, что мыслимы только четыре типа таких многогранников: трипараллеледры (кубы и продукты их однородных деформаций), тетрапараллеледры (гексагональные призмы с пинакоидом и продукты их деформаций), гексапараллеледры (ромбододекаэдры и продукты их деформаций) и гептапараллеледры (кубооктаэдры и продукты их деформаций). Кроме того, удлиненный — растянутый — гексапараллеледр рассматривается самостоятельно как пятый тип. Под однородными деформациями подразумеваются сдвиги и растяжения» [6, с. 278].

А вот мнение Б. Н. Делоне, автора фундаментальных результатов в основаниях математической кристаллографии: «Традиция приписывает Платону открытие пяти правильных выпуклых многогранников, Архимеду — тринадцати выпуклых полуправильных многогранников, Кеплеру и Пуансо — четырех пра-

Для цитирования: Войтеховский Ю. Л. Из опыта преподавания. V. Федоровские параллеледры // Вестник геонаук. 2020. 7(307). С. 26—31. DOI: 10.19110/geov.2020.7.4.

For citation: Voytekhovsky Yu. L. From teaching experience. V. Fedorov's parallelohedra. Vestnik of Geosciences. 2020. 7(307). С. 26—31. DOI: 10.19110/geov.2020.7.4.

Рис. 1. Федоровские параллелеэдры

Fig. 1. Fedorov's parallelohedra

вильных невыпуклых многогранников, а Федоров нашёл пять параллелеэдров» [1, с. 5].

Обратимся к самому Е. С. Федорову: «Выведенное тело, удлинённый гексапараллеледр (рис. 1, № 4) не отличается от предыдущего ни по числу и расположению граней, а следовательно, и ни по расположению колонн. Представив себе, что ребра пояса, состоящего из шестиугольных граней, сократятся до нуля, мы получим предыдущий параллеледр. Таким образом, мы можем смотреть на это тело как на несущественное видоизменение предыдущего» [5, с. 59].

Казалось бы, все ясно. Е. С. Федоров вывел пять параллелеэдров, что и отмечено [1]. Но один из них — удлинённый гексапараллеледр — сводится к ромбододекаэдру «сокращением до нуля» ребер пояса гексагонов. В работах [3, 6] процедура названа однородной деформацией. Это дает повод к продолжению обсуждения.

Однородные деформации

Однородные деформации определяются в физике твердого тела через тензор напряжений. В нашем случае достаточно знать обязательное геометрическое свойство однородно деформируемого тела: прямые линии остаются прямыми. Приведение удлинённого гексапараллеледра к ромбододекаэдру состоит в «сокращении до нуля» тетрагональной призмы и соединении двух недеформированных «шапочек» (рис. 2). Отрезок с концами в них (за исключением случая, когда он лежит на оси L_4) превратится в ломаную линию. Это доказывает, что рассмотренная трансформация (и обратная ей) не является однородной деформацией.

Рис. 2. Приведение удлинённого гексапараллеледра к ромбододекаэдру

Fig. 2. Bringing the elongated hexaparallelohedron to the rhombic dodecahedron

В алгоритме генерирования полного комбинаторного многообразия выпуклых полиэдров из тетраэдра Е. С. Федоровым предусмотрена операция редукции ребра [4, с. 280—281]. В общей систематике она связа-

ла выпуклые полиэдры в серии генетически родственных форм. Вероятно, и в систематике параллелеэдров редукция ребер пояса гексагонов побудила его по аналогии назвать ромбододекаэдр «видоизменением» удлинённого гексапараллеледра. Скорее всего, именно эта вербальная неосторожность позволила затем ряду авторов сводить число параллелеэдров к четырем. Заметим, что эти авторы предпочитают ромбододекаэдр, называя второй гексапараллеледр удлинённым (вытянутым) ромбододекаэдром.

Дополнительные аргументы

Авторы статьи [3, с. 38] пишут: «Вот так Е. С. Федоров и получил все типы решеток Браве...». Речь идет о том, что, помещая в центры параллелеэдров точки, Федоров получил все сорта кристаллических решеток: для трипараллеледра — примитивную P , для тетрапараллеледра — базоцентрированную C (гексагон — основание ячейки), для одного гексапараллеледра (ромбододекаэдра) — гранецентрированную F , для гептапараллеледра — объемцентрированную I . А что для удлинённого гексапараллеледра? Растяжение гранецентрированной кубической ячейки вдоль L_4 дает такую же тетрагональную, которой среди ячеек О. Браве ... нет. Выскажем неожиданную догадку. Не для того ли Е. С. Федоров столь легко свел удлинённый гексапараллеледр к додекаэдру, чтобы уравнивать числа параллелеэдров и порождаемых ими сортов ячеек Браве (P, C, F, I)?

Подчеркнем, что оба параллелеэдра независимо выведены Е. С. Федоровым при доказательстве теоремы. Колонны, построенные из них при заполнении пространства, сходны, но все же различны: из ромбододекаэдров — прямые вдоль всех шести L_2 , из удлинённых ромбододекаэдров — прямые вдоль двух L_2 и гофрированные вдоль еще четырех направлений. При описании структуры кристалла это существенно. Приведение удлинённого гексапараллеледра к ромбододекаэдру (и наоборот) не является однородной деформацией. Топологическая процедура редукции ребра выпуклого многогранника известна только в алгоритме Е. С. Федорова и не имеет отношения к деформации в смысле физики твердого тела.

Заключение

Тема о параллелеэдрах представляется важной в университетском курсе кристаллографии. Е. С. Федоров перенес ее в главу 2 «О структуре кристаллов» учебника [5] из приложения в издании 1897 г. Ее нет в современном учебнике [2]. Но студенты увлеченно слушают историю о том, как Р. Ж. Гаюи уро-

нил скаленоэдр кальцита, как тот разбился на ромбоэдрические спайные выколки, как в этот миг родилась идея о «полиэдрических молекулах», заполняющих кристалл грань к грани, как потом возникли противоречия, приведшие его теорию в тупик [2, с. 235—236]. Общая теория строения кристаллов пошла другим путем — через решетки О. Браве к правильным системам точек и их суперпозициям.

А теория параллелоэдров интересна тем, что в измененном виде спасла и исчерпала идею Р. Ж. Гаюи. «Камень преткновения для этой теории, как известно, состоял в том факте, что имеется (например, у флюорита) спайность по октаэдру. Если бы Гаюи знал о существовании и свойствах особо притупленного октаэдра [гептапараллелоэдра], то ему не пришлось бы прибегать к натяжкам для объяснения этого факта, натяжкам, заставившим его последователей отрешиться от его первоначальной гипотезы и прибегать к помощи других» [Е. С. Федоров, цит. по: 6, с. 279]. В каком бы контексте и объеме не излагалась теория параллелоэдров, исходить надо из строгих определений и следовать им педантично. И тогда параллелоэдров — пять, а не четыре...

Кстати сказать, в связи с полуправильными многогранниками имела место аналогичная история. Полуправильным (архимедовым) называется выпуклый многогранник, ограниченный двумя или более типами правильных многоугольников; при этом для любых двух вершин есть преобразование симметрии многогранника, переводящее их друг в друга. В конце 1950-х россиянин В. Г. Ашкинзе, американец Дж. Миллер и югослав С. Билинский почти одновременно повернули на 45° шапочку ромбокубооктаэдра (уже известного полуправильного многогранника) и получили многогранник с равными многогранными углами, ныне известный как псевдоромбокубооктаэдр. Он не был известен со времен Архимеда! Но вскоре оказалось, что его можно отнести к полуправильным, только если исходить из менее строгого определения, потребовав, чтобы все многогранные углы бы-

ли равны, а все грани — правильные многоугольники. Таким образом, и здесь «дьявол скрывался в мелочах» математических определений.

Литература

1. Делоне Б. Н. Е. С. Федоров как геометр // Тр. ИИЕТ АН СССР. 1956. Т. 10. С. 5—12.
2. Попов Г. М., Шафрановский И. И. Кристаллография. М.: Высшая школа, 1964. 370 с.
3. Силаев В. И., Асхабов А. М., Хазов А. Ф., Юхтанов П. П. Янулов. К 100-летию воина и замечательного кристаллографа // Вестник геонаук. 2020. № 3. С. 33—43.
4. Федоров Е. С. Основания морфологии и систематики многогранников // Зап. Импер. С.-Петербург. минерал. об-ва. 1893. Ч. 30. С. 241—341.
5. Федоров Е. С. Курс кристаллографии. СПб.: Изд. К. Л. Риккера, 1901. 438 с.
6. Шафрановский И. И. История кристаллографии. XIX век. Л.: Наука, 1980. 324 с.

References

1. Delauney B. N. E. S. *Fedorov kak geometr* (Fedorov as a geometer). Proc. Inst. Hist. Natur. Sci. & Tech. Acad. Sci. USSR, 1956, V. 10, pp. 5—12.
2. Popov G. M., Shafranovsky I. I. *Kristallographiya* (Crystallography). Moscow: Vysshaya shkola, 1964, 370 pp.
3. Silaev V. I., Askhabov A. M., Khazov A. F., Yukhtanov P. P. Yanulov. *K 100-letiyu voina i zamechatelnogo kristallografa* (To the 100th anniversary of the warrior and the wonderful crystallographer). Vestnik of Geosciences, 2020, No. 3, pp. 33—43.
4. Fedorov E. S. *Osnovaniya morfologii i sistematiki mnogogrannikov* (Foundations of morphology and systematic of polyhedral). *Zap. Imp. SPb mineral. obshchestva* (Proc. Imp. Saint-Petersburg Mineral. Soc.) 1893, Pt. 30, pp. 241—341.
5. Fedorov E. S. *Kurs kristallographii* (Crystallography course). Saint-Petersburg: Ed. K. L. Ricker, 1901, 438 pp.
6. Shafranovsky I. I. *Istoriya kristallographii. XIX vek* (History of crystallography. XIX century). Leningrad: Nauka, 1980, 324 pp.

Поступила в редакцию / Received 25.06.2020