ИЗ ОПЫТА ПРЕПОДАВАНИЯ. IV. ТРИ ВОПРОСА ИЗ КУРСА КРИСТАЛЛОМОРФОЛОГИИ

Ю. Л. Войтеховский

Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург; *Voytekhovskiy_YuL@pers.spmi.ru*

Статья посвящена трем вопросам из курса кристалломорфологии, недостаточно подробно рассмотренным в популярном университетском учебнике кристаллографии Г. М. Попова и И. И. Шафрановского (любое издание): о таблице 32 видов симметрии (неоднозначное положение некоторых видов симметрии и значение инверсионных осей), о числе кристаллических простых форм (47 или 48), о символах простых форм в тригональной и гексагональной сингониях (сумма первых трех индексов всегда равна нулю). История кристаллографии богата поучительными сюжетами. Их использование в лекциях представляется полезным методическим приемом.

Ключевые слова: 47 кристаллических простых форм, 32 вида симметрии, символы простых форм.

FROM TEACHING EXPERIENCE. IV. THREE QUESTIONS FROM THE COURSE OF CRYSTAL MORPHOLOGY

Yu. L. Voytekhovsky

Saint-Petersburg Mining University, Saint-Petersburg; *Voytekhovskiy_YuL@pers.spmi.ru*

The article is devoted to three questions from the course of crystal morphology, which are not considered in detail in the popular university textbook of crystallography by G. M. Popov and I. I. Shafranovsky (any edition): on the table of 32 species of symmetry (ambiguous position of some species of symmetry and meaning of inversion axes), on the number of simple forms possible on crystals (47 or 48), on the symbols of simple forms in trigonal and hexagonal syngonies (the sum of the first three indices always equals zero). The history of crystallography is rich in instructive subjects. Their use in lectures seems to be a useful methodological technique.

Keywords: 47 crystal simple forms, 32 species of symmetry, symbols of simple forms.

Введение

Вопросы, рассмотренные в статье, были заданы автору во время лекций по кристалломорфологии. Первый касается некоторых условностей в структуре таблицы 32 видов симметрии (в. с.) как она дана в университетском учебнике [2, с. 92], и трудностей с выводом инверсионных видов симметрии. Последовательный разбор исторической статьи [1] ставит все на место и напоминает о плодотворной деятельности Федоровского института* в стенах Ленинградского горного института (ныне Санкт-Петербургского горного университета).

Второй вопрос вызвал в аудитории откровенно любопытные взгляды: «Вы сказали, что простых форм 47, а я прочел в Интернете, что их 48. Как же так?» Пришлось тут же извлечь из Интернета ответ — статью А. К. Болдырева «47 или 48 простых форм возможны на кристаллах?» [5] (здесь и далее перевод наш). Она замечательно показывает важность строгих определений, в данном случае — определения простой формы (п. ф.).

Третий вопрос — о символах граней тригональных и гексагональных кристаллов в их гексагональной установке. В учебнике [2] рассмотрены случаи, когда след грани в горизонтальной (то есть перпендикулярной главной оси) плоскости параллелен или перпендику-

лярен (рис. 125) одной из осей, и сделан вывод: сумма трех первых индексов всегда равна нулю. Но откуда следует, что всегда? Доказательство этой теоремы элементарно, его следует давать в лекциях.

История науки — составная часть самой науки. История кристаллографии богата поучительными сюжетами и коллизиями. Их использование в лекциях представляется полезным методическим приемом.

Таблица 32 видов симметрии

Вывод в. с. кристаллов, то есть возможных сочетаний допустимых элементов симметрии, выполняется в два этапа: для кристаллов с единичными направлениями Е (низшие и средние сингонии, 27 в. с.) и без них (кубическая сингония, 5 в. с.) [2]. Мы ограничимся лишь первым этапом. В качестве методического приема найдем возможные сочетания «очевидных» элементов симметрии (в обозначениях Федоровского института): осей L_1, L_2, L_3, L_4, L_6 , плоскости Р и центра инверсии С. Это позволяет показать, как возникает необходимость в «неочевидных» инверсионных осях и как они способствуют упорядочению таблицы 32 в. с.

Найдем сочетания единичного направления Е с элементами симметрии, сохраняющие Е. Совмещая с Е каждую из L_n , получим «примитивные» в. с.: L_1, L_2, L_3, L_4, L_6 . Помещая С на Е, получим в. с. С. Проводя Р через Е или перпендикулярно к Е (И. И. Шафрановский обозначает их Р и П, но различает лишь в оперативных

* Формально деятельность Федоровского института прекратилась после политической репрессии А. К. Болдырева. Но она не запрещена юридическим актом и, по сути, не прерывалась в трудах его учеников.

целях; при подсчетах элементов симметрии $P = \Pi$) получим в. с. P . Ось L_2 , перпендикулярная к E , также сохраняет E . Считаем этот в. с. совпадающим с примитивным (по аналогии с P и Π).

К каждой L_n добавим C . В силу известной теоремы для четных осей получим дополнительные перпендикулярные P : L_2PC , L_3C , L_4PC , L_6PC — «центральные» в. с. Те же в. с., кроме L_3P , получим, если к каждой из L_n добавим Π .

К каждой L_n добавим продольную P . В силу известной теоремы получим дополнительные P : L_22P , L_33P , L_44P , L_66P — «планальные» в. с.

К каждой L_n добавим перпендикулярную L_2 . В силу известной теоремы получим дополнительные L_2 : $3L_2$, L_33L_2 , L_44L_2 , L_66L_2 — «аксиальные» в. с.

К каждой L_n добавим C и продольную P . В силу известных теорем получим дополнительные L_2 и P : $3L_23PC$, L_33L_23PC , L_44L_25PC , L_66L_27PC — «планаксиальные» в. с.

К оси L_3 добавим P и Π , получим новый в. с. L_33L_24P .

Таким образом, сочетания L_n , P и C дают 25 из 27 в. с. (еще раз заметим, что 5 в. с. кубической сингонии здесь не рассматриваются), в том числе 5 хорошо выраженных классов (отвечающих столбцам таблицы) и стоящие отдельно в. с. L_3P и L_33L_24P . Именно анализ комбинации L_3P (а точнее $L_3\Pi$ в обозначении И. И. Шафрановского) позволяет узнать в ней новый элемент симметрии — инверсионную ось L_{i6} . Тут же встает вопрос о L_{in} других порядков*. Легко увидеть, что $L_{i1} = C$, $L_{i2} = P$, $L_{i3} = L_3C$ и что инверсионная ось L_{i4} никак не проявила себя ранее в сочетаниях «очевидных» элементов симметрии. Зато сама она и ее сочетание с P и перпендикулярной L_2 дают два новых в. с.: L_{i4} и $L_{i4}2L_22P$. Становится понятным, почему инверсионная ось L_{i4} и два последних в. с. упущены даже в «Кристаллографических этюдах» О. Браве [3, с. 124].

Итак, все виды симметрии найдены, некоторые даже повторно. В какие ячейки таблицы их поместить? Статья [1] замечательно показывает накал международной дискуссии и аргументацию разных авторов. Так, «прибегать к сложным представлениям об инверсионных осях следует только в том случае, если никакого другого более простого толкования нельзя найти» [1, с. 153]. Именно поэтому в обозначениях большинства в. с. мы сегодня пользуемся символами C и P , а не L_{i1} и L_{i2} . Но их инверсионная подоплека оказалась весьма полезной: к триклинной сингонии логично отнесены в. с., в которые входит L_1 или L_{i1} ; к моноклинной — в. с., в которые входит одна L_2 или L_{i2} . Перечислим условности в организации таблицы: $C = L_{i1}$, $P = L_{i2}$, $L_3C = L_{i3}$ можно непротиворечиво отнести к инверсионно-примитивным; L_2 — к примитивным, L_2PC — к центральным в. с. За дополнительной аргументацией отсылаем читателя к статье [1].

47 или 48 простых форм?

Поводом к написанию статьи [5] послужила вышедшая накануне статья [6], автор которой предложил свои названия для п. ф. Сотрудниками Федоровского

института эта работа была выполнена под руководством А. К. Болдырева 10 годами ранее [4]. Можно представить, какой интерес вызвала статья [6] даже не расхождением в названиях п. ф., а тем, что их оказалось 48, а не 47. А. К. Болдырев замечает, что можно иметь различные мнения относительно названий, но не числа п. ф. Полагать, что их 48, а не 47 — это не мнение, а ошибка, как и считать, например, что в. с. 33, а не 32.

Причина дискуссии — диэдр, который оказался разделенным на «дому» (планальный диэдр, в. с. m) и «сфеноид» (осевой диэдр, в. с. 2). Чтобы разрешить противоречие, А. К. Болдырев начинает с определения: две п. ф. различны, если у них различное число граней или если последние различаются формой или взаимным расположением**. В противном случае они суть одна п. ф., даже если получены из исходной грани различными операциями симметрии. Далее он показывает, что А. Ф. Роджерс в целом следует тому же определению, называя пинакоидом пару параллельных граней в любом (где он разрешен) в. с.; ромбической призмой — п. ф. $\{hk0\}$ и $\{hkl\}$ в ромбической и моноклинной сингониях; октаэдром — п. ф., полученную в центральном и аксиальном в. с. кубической сингонии с помощью разных элементов симметрии (P и C в первом случае, оси симметрии — во втором); аналогично — тетрагональные призмы разных в. с., дипирамиды разных сингоний и т. п., и только для диэдра делает исключение, различая «дому» и «сфеноид», что непоследовательно и нелогично.

По сути, этой аргументацией дискуссия вполне исчерпывается. Что касается названий 47 п. ф., то 32 из них совпадают, 15 различаются (3 — в низших, 2 — в средних, 10 — в кубической сингонии). Время показало, что конструктивный и единообразный подход (главным образом для п. ф. кубической сингонии), предложенный сотрудниками Федоровского института, оказался удобным и ныне принят большинством научных школ.

Символы простых форм

На основании теоремы синусов из малого и большого треугольников (рис. 1) имеем соотношения:

$$1/\sin(120 - \alpha) = a/\sin \alpha,$$

$$1/\sin(60 - \alpha) = b/\sin \alpha,$$

откуда следует:

$$a = \sin \alpha / \sin(120 - \alpha),$$

$$b = \sin \alpha / \sin(60 - \alpha).$$

Взяв обратные величины к длинам отрезков, отсекаемых гранью АВ на осях координат (с учетом знаков: 1, b , $-a$), и избавляясь от дробей умножением на $\sin \alpha$ (который, очевидно, не равен нулю), получаем три ее первых индекса: $\sin \alpha$, $\sin(60 - \alpha)$, $-\sin(120 - \alpha)$. С помощью тригонометрических формул находим:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin(60 - \alpha) - \sin(120 - \alpha) &= \\ = 2 \sin(\alpha - 60) \times \cos 60 + \sin(60 - \alpha) &= \\ = \sin(\alpha - 60) + \sin(60 - \alpha) &= 0. \end{aligned}$$

** А. К. Болдырев предлагает определение от противного, что не является лучшим стилем. Скорее всего, тем самым он хотел акцентировать признаки, которыми должны отличаться «дома» и «сфеноид», будь они различными п. ф.

* Здесь встает вопрос и о невозможности в кристаллах Li_5 , Li_7 , ... но он выходит за рамки статьи.

Итак, сумма равна нулю для любого α , то есть для любой грани кристалла тригональной или гексагональной сингонии.

К доказательству теоремы. При $\alpha = 60$ и 30° получим рис. 125 а, б из учебника [2]

To the proof of the theorem. For $\alpha = 60$ and 30° we get Fig. 125 a, b [2]

Заключение

Вывод 32 видов симметрии кристаллов, как правило, увлекает студентов, если подать тему с должным историко-научным экскурсом, не забыв упомянуть, что И. И. Шафрановский до конца своих дней искал тайный подтекст этого замечательного числа — пятой степени двойки. Догадка о возможности и необходимости инверсионных осей симметрии при описании кристаллических полиэдров впечатляет студентов не меньше, чем «основная теорема кристаллографии» о невозможности L_5 , L_7 и т. д. Вывод 32 видов симметрии математически несложен (особенно когда ответ известен), требует лишь внимания и знания нескольких вполне наглядных теорем. Но перебор сочетаний элементов симметрии допускает варианты, что оживляет рутинные процедуры. Неоднократное обращение к таблице 32 видов симметрии в ее современной форме способствует усвоению терминологии. Поначалу примитивные в. с. путаются с аксиальными — те и другие суть сочетания осей симметрии; некоторые центральные в. с., состоящие из осей, плоскостей и центра инверсии, путаются с планаксиальными и т. д. Наконец, классифи-

кация, номенклатура и символика 32 в. с. кристаллов, как и номенклатура 47 п. ф., — замечательные результаты российских кристаллографов, признанные в мире. Об этом уместно и необходимо упоминать в лекциях.

Автор благодарит рецензентов за профессиональные советы, способствовавшие более четкому изложению материала.

Литература

1. Болдырев А. К., Доливо-Добровольский В. В. Классификация, номенклатура и символика 32 видов симметрии кристаллографии // Зап. ЛГИ. 1934. Т. VIII. С. 145—159.
2. Попов Г. М., Шафрановский И. И. Кристаллография. М.: Высшая школа, 1964. 370 с.
3. Шафрановский И. И. История кристаллографии. XIX век. Л.: Наука, 1980. 324 с.
4. Boldyrev A. K. Die von Fedorov Institut angenommene kristallographische Nomenklatur // Zeitschr. Krist. 1925. Bd. 62. S. 145—150.
5. Boldyrev A. K. Are there 47 or 48 simple forms possible on crystals? // Amer. Miner. 1936. V. 21. No. 11. P. 731—734.
6. Rogers A. F. A tabulation of crystal forms and discussion on form names // Amer. Miner. 1935. V. 20. No. 12. P. 838—851.

References

1. Boldyrev A. K., Dolivo-Dobrovolsky V. V. Klassifikatsiya, nomenklatura i simvolika 32 vidov simmetrii kristallografi (Classification, nomenclature and symbolism of 32 symmetry species of crystallography). Zap. LGI (Proc. Leningrad Mining Inst.), 1934, Vol. VIII, pp. 145—159.
2. Popov G. M., Shafranovsky I. I. Kristallografiya (Crystallography). Moscow: Vyshaya shkola, 1964, 370 pp.
3. Shafranovsky I. I. Istoriya kristallografii. XIX vek. (History of crystallography. XIX century). Leningrad: Nauka, 1980, 324 pp.
4. Boldyrev A. K. Die von Fedorov Institut angenommene kristallographische Nomenklatur. Zeitschr. Krist. 1925. Bd. 62. S. 145—150.
5. Boldyrev A. K. Are there 47 or 48 simple forms possible on crystals? Amer. Miner., 1936, V. 21, No. 11, pp. 731—734.
6. Rogers A. F. A tabulation of crystal forms and discussion on form names. Amer. Miner., 1935, V. 20, No. 12, pp. 838—851.

Поступила в редакцию / Received 15.05.2020