К 170-летию выхода в свет мемуара О. Браве
«Замечания о симметричных многогранниках в геометрии»¹

ИЗ ОПЫТА ПРЕПОДАВАНИЯ. II. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА КРИСТАЛЛОГРАФИИ²

Ю. Л. Войтеховский

Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург

Voytekhovskiy_YuL@pers.spmi.ru

Статья посвящена основной теореме классической кристаллографии — о невозможности осей симметрии n -го порядка при $n = 5$ и $n > 6$. Она имеет фундаментальное значение в естественных науках, резко разделяя минеральные и биологические структуры. Рассмотрены доказательства теоремы в ряде академических монографий и университетских учебников за последние 170 лет. Обращено внимание на методические нюансы доказательств.

Ключевые слова: основная теорема кристаллографии, оси симметрии, кристаллическая решётка.

FROM TEACHING EXPERIENCE. II. MAIN THEOREM OF CRYSTALLOGRAPHY

Yu. L. Voytekhovsky

Saint-Petersburg Mining University, Saint-Petersburg

The article is devoted to the main theorem of classic crystallography — on the impossibility of n -fold axes of symmetry with $n = 5$ and $n > 6$. It is fundamental in the natural sciences, sharply separating mineral and biological structures. The proofs of the theorem in many academic monographs and university textbooks over the past 170 years are considered. Attention is paid to the methodological nuances of proofs of the theorem.

Keywords: the main theorem of crystallography, symmetry axes, crystalline lattice.

Введение

Основная теорема кристаллографии — о невозможности осей симметрии n -го порядка при $n = 5$ и $n > 6$ — имеет в естественно-научном образовании (по меньшей мере, в образовании геолога) мировоззренческое значение, так как радикально отделяет минеральные структуры от биологических в том смысле, что в последних указанные оси симметрии возможны. Поэтому в университетских курсах доказательства этой теоремы должны быть строгими и ясными. Исторический обзор показывает, что при небольшом разнообразии они базируются, как правило, на решётчатом (трансляционном) строении кристалла и чаще всего выполняются методом от противного: «Допустим, ось симметрии 5-го порядка в кристалле возможна» — и сводятся к противоречию. Завершаются они обычно фразой: «Невозможность осей n -го порядка при $n > 6$ можно доказать аналогично». Это плохой методический приём, приглашающий в потенциальную бесконечность и опирающийся более на интуицию, чем на логику. А ведь кристаллография — последний оплот строгого мышления в образовании геолога. Есть доказательства, получающие разрешённые порядки осей симметрии в виде решения тригонометрического уравнения. Но и в них есть важные методические нюансы, заслуживающие обсуждения.

Важное замечание касается шехтманитов — сплавов, в которых есть локальные упорядоченные области, но нет глобальной трансляционной структуры. Последнее подчёркнуто приставкой «квази» («почти») в их названии — «квазикристаллы». Они быстро вошли в сферу интересов кристаллографов. Чтобы узаконить это, в 1992 г. Международный союз кристаллографов (МСК) переопределил кристалл как конденсированное вещество, которое даёт дискретную дифракционную картину рассеяния рентгеновских лучей. Классический кристалл стал частным случаем в мире кристаллов, а основная теорема кристаллографии потеряла свой статус. Шаг, предпринятый МСК, методологически некорректен. Понятие «кристалл» подменено понятием «объект кристаллографии» или даже «объект, интересный ряду кристаллографов». Определяя природный феномен по сути, следует апеллировать к ней же, а не к физическому методу диагностики. Что касается сути, при отнесении «почти кристаллов» к миру кристаллов акцент был заинтересованно сделан на локальных порядках, несмотря на «запрещённые» для кристаллов оси симметрии. С тем же логическим основанием он мог быть сделан на «запрещённых» осях симметрии и отсутствии трансляционного порядка.

Тема заслуживает научной дискуссии именно на страницах «Вестника Института геологии Коми НЦ УрО РАН» в память об акад. Н. П. Юшкине, стремившемся

¹ Е. С. Фёдоров [12, с. 8, 10] заметил: «Браве полагает начало новому направлению, по которому кристаллография является наукой дедуктивной, имеющей математический характер. Из весьма несовершенных воззрений Гаюи на структуру кристаллов, в трудах Браве выработалась изящная дедуктивная теория, не только не встретившая возражений, но имевшая с самого начала отклик в Германии в работах Франкенгейма, независимо и одновременно с Браве пришедшего к некоторым общим с ним результатам. Кроме теории структуры кристаллов Браве положил основание и теории симметрии — одному из важнейших отделов современного учения о фигурах. <...> Это сочинение можно считать началом возобновления в новейшее время геометрического учения о фигурах <...>, так как все предшествовавшие работы этой области были слишком отрывочны и касались почти всегда лишь небольшой группы вопросов».

² Так её назвал выдающийся российский кристаллограф и кристаллофизик, новатор-педагог и популяризатор науки Ю. В. Вульф: «Следующая теорема является основной для всего учения о кристаллографической симметрии» [6, с. 176].

максимально расширить круг объектов минералогии и кристаллографии. Но в этой статье под кристаллом понимается классический кристалл, как он понимался всеми далее упомянутыми авторами. «Основная теорема кристаллографии» для автора статьи, как и для назвавшего её Ю. В. Вульфа, сохраняет свой статус.

Исторический обзор

О. Браве (1849) доказал основную теорему в «Мемуаре о системах точек, правильно расположенных на плоскости или в пространстве» [4, с. 83]. Из предшествующего текста (рис. 1): O — точка пересечения оси симметрии порядка q с плоскостью рисунка (сетки), M — узел сетки, OM — перпендикуляр к оси симметрии, $Q = 360^\circ/q = \angle MOM' = \angle M'OM''$ — элементарный угол поворота.

Рис. 1. К доказательству основной теоремы [4, с. 135, рис. 13]

Fig. 1. On the proof of the main theorem [4, p. 135, fig. 13]

«Совокупность [точек, образующих примитивную решётку — Ю. В.] может обладать только двойными, тройными, четверными и шестерными осями симметрии.

На MM' , $M'M''$ строим ромб $MM'M''m$. Точка m будет узлом совокупности. Легко находим, что $Om = OM' (1 - 4 \sin^2 Q/2)$. Если: $q = 2$, $Q = 180^\circ$, $Om = -3 OM'$; $q = 3$, $Q = 120^\circ$, $Om = -2 OM'$; $q = 4$, $Q = 90^\circ$, $Om = -OM'$; $q = 5$, $Q = 72^\circ$, $Om = -3\sqrt{5}/2 OM' \approx -0.382 OM'$; $q = 6$, $Q = 60^\circ$, $Om = 0$; $q > 6$, $Q < 60^\circ$, $Om < OM'$. Решения $q = 5$ и $q > 6$, очевидно, невозможны, ибо всегда можно предположить, что M взята на наименьшем расстоянии от оси вращения и, следовательно, неравенство $Om < OM'$ невозможно, исключая случай, когда $Om = 0$, ибо тогда O будет узлом совокупности. Следовательно, если совокупность обладает осью симметрии, то порядковый номер симметрии, свойственной этой оси, может быть равен $q = 2, 3, 4, 6$ ». Доказательство требует пояснений.

1. Характер поворотной точки O не оговорен. При $q = 6$ она совпадает с m , поэтому — узел сетки. Но это не обязательно [11, с. 38]: «В частном случае O может совпадать с одним из узлов». Нет пояснений в учебниках [13, с. 39]: «Точка L_n — выход оси симметрии n -го порядка $\langle \dots \rangle$. Точку L_n принимаем за узел кристаллической решётки». Аналогично [15, с. 83–84]: «Выберем произвольную точку A на оси симметрии, которая перпендикулярна плоскости чертежа. $\langle \dots \rangle$ Все точки A, B, C, D — узлы решётки». Как A превратилась в узел решётки? Пояснение есть [5, с. 67]: «Операции переноса t_1, t_2 совмещают между собой все трансляционно равные точки, в том числе и поворотные точки (оси), следовательно, эти точки образуют сетку».

Оно есть и у О. Браве [4, с. 84] со ссылкой на О. Коши: «Когда в совокупности существует ось сим-

метрии, не проходящая через узлы, то прямые, параллельные этой оси и проходящие через узлы, обладают той же симметрией. $\langle \dots \rangle$ Может случиться, что новая ось будет иметь более высокий порядок, который всегда должен быть кратным порядку симметрии рассматриваемой оси. $\langle \dots \rangle$ Без нарушения строгости можно ограничиться рассмотрением осей, проходящих через узлы».

2. Алгебраическое выражение для Om «легко находим» из подобия равнобедренных треугольников mMM' и MOM' с углами при основании $(180^\circ - Q)/2 = 90^\circ - Q/2$. Из пропорции $mM' / MM' = MM' / OM$ следует $mM' = (MM')^2 / OM$. Но $MM' = 2 OM \cos (90^\circ - Q/2) = 2 OM \sin Q/2$. Поэтому $mM' = 4 OM \sin^2 Q/2$. Окончательно $Om = OM' - mM' = OM' (1 - 4 \sin^2 Q/2)$, т. к. $OM = OM'$.

3. При $q = 2-5$ смущают отрицательные расстояния $Om = -3 OM'$, $-2 OM'$, $-OM'$ и $-0.382 OM'$. Они означают, что точки m и M' лежат по разные стороны от O . Но нельзя требовать от студента (нематематика) столь абстрактного мышления (более того, метафорического, поскольку отрицательное расстояние — нонсенс и в математике), каким обладал О. Браве. Исправить ситуацию можно, заключив тригонометрическую часть формулы под знак модуля. Но для случаев $q = 2-6$ рисунок 1 следует «распаковать». В данном виде он соответствует порядкам осей $q > 6$ и, конечно, доказывает их невозможность, так как при $0 < Q < 60^\circ$ имеем $Om < OM' = OM$ — противоречие с предположением об отсутствии узлов внутри круга радиуса OM .

4. Доказательство сводится к противоречию с решётчатым строением кристалла. Это понятно, ибо оно опубликовано рядом с выводом знаменитых «решёток Браве».

А. В. Гадолин (1867) дал исторически первый строгий вывод 32 кристаллических видов симметрии. Это было бы невозможно без доказательства основной теоремы. Оно дано в работе [7] в виде ряда утверждений: «Несколько возможных кристаллографических осей, направленных вдоль по рёбрам правильной пирамиды, могут существовать только тогда, если косинус центрального угла основания этой пирамиды есть рациональная величина» (с. 15). «При существовании оси совмещения угол совмещения может иметь только некоторые определённые значения, а именно $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ и 180° » (с. 17). Последнее содержит две леммы: «угол совмещения непременно составляет целую часть от 360° » (с. 17) и «в приложении В доказано, что целые части от 360° могут иметь рациональные косинусы только тогда, если эти косинусы имеют одно из значений $0, \pm 1/2, \pm 1$ » (с. 18). Заметим, что приложение В (с. 66–69) — исследование тригонометрических рядов, неподъёмное для большинства студентов-геологов. В целом доказательство А. В. Гадолина оригинально, но по сравнению с предыдущим более сложно. Оно интересно тем, что согласует разрешённые оси симметрии непосредственно с законом Р. Ж. Гаюи рационального отношения параметров, предшествовавшим результатам О. Браве.

Ю. В. Вульф (1897) дал своё доказательство основной теоремы, отметив: «Приводимое доказательство принадлежит Браве, но несколько изменено автором. Основной закон кристаллографии допускает между плоскостями симметрии только углы в $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ и 180° » [6, с. 176]. «Наиболее простое доказательство этого положения получим, исходя из понятия о кри-

сталлической однородности. <...> Одинаковые по своим свойствам точки кристаллической среды располагаются по прямым на равных расстояниях друг от друга, причём для различного направления прямых расстояния точек вообще различны» (Ibid.). Ю. В. Вульф получает соотношение, сходное с таковым О. Браве и разрешимое относительно углов между плоскостями симметрии: 0 и 180° , 30, 45, 60 и 90° . Далее использована теорема: «Мы должны принять во внимание результаты действия обеих плоскостей симметрии, т. е. вращения, величина которого будет 2α , если назвать α угол между плоскостями» (Ibid.). Удвоением получаются элементарные углы вращения, которым соответствуют порядки осей симметрии 2, 3, 4 и 6.

Акцент на плоскостях симметрии понятен. Именно Ю. В. Вульф в поисках единого основания свёл все элементы симметрии к плоскостям, показав, что две конечные (совместимо или зеркально) равные фигуры можно совместить не более чем тремя отражениями. И всё же предложенное им доказательство кажется отягощённым по сравнению с таковым О. Браве.

А. К. Болдырев (1926, 1930, 1931, 1934) в доказательстве основной теоремы полностью следует О. Браве. «При помощи теории Браве легко показать, что в кристаллах, кроме одинарных, двойных, тройных, четверных и шестерных осей, никаких других быть не может. Докажем это положение только для пятерной поворотной оси. Для семерной, восьмерной и т. д. доказательство будет аналогично. <...> Предположим, что пятерная поворотная ось симметрии существует в пространственной решётке...» [2, с. 83—84; 3, с. 72]. По-видимому, именно с учебников А. К. Болдырева началось пренебрежение формулами и апеллирование к аналогии, возможно, потому, что они написаны для рабфаковской молодёжи и инженерных специальностей.

В. В. Доливо-Добровольский (1937) принимает то же доказательство. Возможность дигиры, тригиры и тетрагиры он показывает на примере примитивной кубической, гексагиры — на примере гексагональной решётки. Это удачный приём. Остаётся доказать невозможность других гир. «Теорема 10. Кристаллические решётки, а следовательно и кристаллы, не могут обладать пентагирами. Предположим противное <...> Теорема 11. Кристаллические решётки, а следовательно и кристаллы, не могут обладать гирами наименования $n = 7, 8, 9$ и выше. Доказательство совершенно аналогично...» [10, с. 115—116].

Е. Е. Флинт (1937) ограничивается схемой доказательства, отсылая к предыдущим теоремам. «Эти положения ограничивают возможные порядки для поворотных осей симметрии всего четырьмя: L^2, L^3, L^4 и L^6 <...>. Причина этому очень простая. На основании теоремы 3 [всякая плоскость, проходящая через узел решётки перпендикулярно оси симметрии решётки, есть сетчатая плоскость — Ю. В.] всякий узел при вращении около оси симметрии должен оставить на сетчатой плоскости след в виде многоугольника, а согласно теореме 1 [всякая прямая, параллельная оси симметрии и проходящая через узел решётки, есть ось симметрии того же порядка для этой решётки — Ю. В.], вся эта сетчатая плоскость должна быть покрыта такими многоугольниками, плотно прилегающими друг к другу. Это вполне возможно в том слу-

чае, когда сетка состоит из параллелограммов (в частности, ромбов, прямоугольных четырёхугольников, квадратов) и правильных треугольников. Но из пятиугольников сетку построить уже нельзя, следовательно, L^5 в кристаллах невозможна. Невозможны также и все оси порядка выше 6 по той же причине» [14, с. 33—34].

Г. М. Попов и И. И. Шафрановский (1941, 1947, 1955, 1964, 1972) следуют А. К. Болдыреву и В. В. Доливу-Добровольскому, опуская выкладки. «В решётчатых системах, а следовательно и в кристаллах, невозможны оси пятого порядка и оси порядка выше шести. Докажем это положение для пятерной оси. Предположим, что пятерная ось в кристаллах возможна. <...> Пятерная ось противоречит расположению атомов в решётчатых системах и тем самым невозможна в кристаллах. Подобным же путём доказывалась невозможность существования в кристаллических телах осей семерного, восьмерного и выше порядков» [11, с. 38—39].

О. М. Аншелес (1952) повторяет предыдущих авторов. «Докажем, что в пространственной решётке невозможны оси симметрии пятого порядка и порядков выше шестого. <...> Применим метод доказательства, которым часто пользуются в геометрии и который называется «доказательством от противного». Предположим, что пятерная ось симметрии возможна в пространственной решётке. <...> Таким образом, существование пятерной оси симметрии противоречит свойствам пространственных решёток. <...> Таким же образом доказывалась невозможность существования в кристаллах осей симметрии n -го порядка, если $n > 6$ » [1, с. 88—90].

Б. Н. Делоне, Р. В. Галиулин и М. И. Штогрин (1974) излагают схему доказательства по О. Браве в двух предложениях. «Порядок поворотной оси, совмещающей решётку с собой, может быть только 2, 3, 4 или 6. Для доказательства примем за точку М самую близкую к оси точку решётки, лежащую в плоскости Р, перпендикулярной к оси, но не лежащую на самой оси. Для всех правильных многоугольников, кроме двуугольника, правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника, откладывая соответствующим образом вектор, соединяющий две последовательные его вершины, из какой-нибудь его вершины, можно получить точку решётки, лежащую в плоскости Р, не лежащую на оси, но лежащую к ней ближе, чем точка М, что противоречит нашему предположению о точке М» [9, с. 314; 8, с. 62].

Б. К. Вайнштейн (1979) тоже следует О. Браве (рис. 2). «Рассмотрим плоскую сетку и возможные повороты плоскости, совмещающие сетку с собой. Поворотные точки (оси), если они есть, сами являются точками этой плоскости. Операции переноса t_1, t_2 совмещают между собой все трансляционно равные точки, в том числе и поворотные точки (оси), следовательно, эти точки образуют сетку. Выберем в сетке ряд таких точек, для которого расстояние a между ними — кратчайшее, и рассмотрим действие какой-то поворотной точки N из этого ряда на две ближайшие точки N' и N''» [5, с. 67].

Далее показано, что оси $N = 2, 3, 4$ и 6 не противоречат, а оси $N = 5$ и $N > 6$ противоречат минимальности расстояния a между узлами. Но автор обходится без построения ромба, порождающего узел сетки, противо-

Рис. 2. К доказательству основной теоремы [5, с. 67, рис. 39]

Fig. 2. On the proof of the main theorem [5, p. 67, fig. 39]

речащий допущению. При $N = 5$ повороты точек N' и N'' в разных направлениях дают вершины правильного 10-угольника. При $N > 6$ достаточно поворотов одной из точек N' или N'' . Во всех этих случаях противоречие создаётся тем, что при $N > 6$ сторона правильного N -угольника меньше радиуса описанной окружности.

Е. В. Чупрунов, А. Ф. Хохлов, М. А. Фаддеев (2006) и С. К. Филатов, С. В. Кривовичев, Р. С. Бубнова (2018) приводят два сходных доказательства, интересных тем, что разрешённые порядки осей симметрии получаются из тригонометрического уравнения (рис. 3). «Одним

Рис. 3. К доказательству основной теоремы [13, с. 39–40, рис. 2.2]

Fig. 3. On the proof of the main theorem [13, p. 39–40, fig. 2.2]

из красивейших следствий решётчатого строения кристаллов является основной закон симметрии кристаллов, утверждающий, что в кристаллах возможны поворотные и инверсионные оси симметрии лишь 1, 2, 3, 4 и 6 порядков. Докажем эту теорему. На рисунке точка L_n — выход оси симметрии n -го порядка с элементарным углом поворота $360/n = \alpha$. Точку L_n принимаем за узел кристаллической решётки. Слева и справа от неё на расстоянии a расположены узлы решётки A и B . Повернём эти узлы на угол α вокруг оси симметрии: точку A по ходу часовой стрелки, точку B — против часовой стрелки (в обоих случаях решётка совместится сама с собой в соответствии с определением оси симметрии L_n). Полученные точки A' и B' лежат на прямой, параллельной трансляции a , следовательно, в кристалле между ними должно укладываться целое число трансляций na . Из рисунка следует также, что $na = A'B' = 2a \cos \alpha$, откуда $n = 2 \cos \alpha$. В правой части последнего равенства стоит целочисленная функция. Это возможно при значениях косинуса 1, $1/2$, 0, $-1/2$ и -1 , что отвечает элементарным углам поворота 0° , 60° , 90° , 120° и 180° соответственно, т. е. осям симметрии 1, 6, 4, 3 и 2 порядков» [13, с. 39–40].

Шероховатости рассуждения очевидны. 1. Точку L_n можно принять за поворотную, но за узел решётки — с пояснениями (см. выше). 2. Важно подчеркнуть, что узлы A и B — ближайшие к L_n , т. е. a — элементарная трансляция, иначе в отрезке $A'B'$ не обязательно вмещается целое число трансляций na . 3. При отрицательных значениях $\cos \alpha$ получаем отрицательное число трансляций. Следует пояснить, что при углах 120° и 180° трансляции в направлении AB противоположны трансляциям в направлении $A'B'$. 4. Следует убедиться, что для полученных углов α между образами точек A и B нет расстояний, меньших a , как это сделано у Б. К. Вайнштейна [5, с. 67].

Обсуждение

Обзор показал, что в доказательстве основной теоремы почти все авторы (кроме А. В. Гадолина) отталкиваются от решётчатого строения кристалла по О. Браве. И почти все (кроме Ю. В. Вульфа) работают прямо с осями симметрии. Часть авторов строго следуют О. Браве, получая двуединый результат: непротиворечивость порядков $n = 2, 3, 4, 6$ и, наоборот, противоречивость $n = 5$ и $n > 6$. При этом В. В. Доливо-Добровольский разрубает gordiev узел, доказывая возможность порядков $n = 2, 3, 4, 6$ предъявлением примеров (рис. 4). Заметим, что на них же удоб-

Рис. 4. Решётки с осями симметрии 6, 3, 2 (слева) и 4, 4, 2 (справа)

Fig. 4. Lattices with symmetry axes 6, 3, 2 (left) and 4, 4, 2 (right)

но пояснить теорему Коши — Браве о соотношении порядков осей симметрии, проходящих и не проходящих через узлы решётки. Невозможность порядков $n = 5$ и $n > 6$ легче всего показать по О. Браве (рис. 1) с учётом сделанных оговорок. Впрочем, последние два доказательства (рис. 3) привлекают тем, что получают разрешённые порядки осей симметрии из уравнения, не оставляя места рассуждениям о запрещённых порядках. Но и здесь важен ряд оговорок и предъявление решёток с разрешёнными осями симметрии.

Заключение

Ещё раз подчеркнём мировоззренческое значение основной теоремы кристаллографии, резко разделяющей минеральные и биологические структуры. Вспоминается метафора, приписываемая Н. В. Белову: «Жизнь защищается от кристаллизации осью пятого порядка» и рефрен И. И. Шафрановского: «Крепко запомните не бывает пятиугольных снежинок!». Что касается доказательств теоремы в университетском курсе

кристаллографии, преподаватель волен выбирать, исходя из подготовленности студентов и личных пристрастий. Лучше всего показать студентам (факультативно) весь спектр доказательств, расширяя их кругозор, прививая любовь к строгости мышления и истории науки. Мы постарались оттенить особенности разных подходов. Основная теорема кристаллографии не сложна, но не примитивна. В любом доказательстве есть целый ряд нюансов. Как всегда, «дьявол кроется в мелочах».

В связи с объективным расширением круга кристаллографических объектов профессиональному обществу следует определить принципы и предвидеть последствия. Кажется очевидным, что не относится к кристаллографии объект, в котором нет никакого порядка. Но математическое определение порядка весьма широко. Поэтому, разрешая глобальные и локальные, строгие и нестрогие, квази- и фрактальные (масштабно-инвариантные) порядки, мы закономерно придём к инвариантности произвольной характеристики объекта. Грядущий методологически последовательный результат — Земля как кристалл: в пространственной организации видим оболочки, в истории реконструируем периодические процессы... Но не слишком ли много для кристаллографии?

Выше сказано вслед многим предшественникам, что основная теорема кристаллографии резко разделяет минеральные и биологические структуры. Эта формулировка была бы ещё более корректной, если бы в биологии имела место сходная теорема, пусть не исчерпывающая вопрос, хотя бы ослабленная, запрещающая какие-либо элементы симметрии и их сочетания. Разрешённые элементы симметрии и их сочетания известны исключительно по наблюдениям в природе. Возможны ли такие теоремы для биологических объектов? Отметим эту тему для другой статьи.

Автор благодарит рецензентов за профессиональные замечания, способствовавшие более ясному изложению статьи.

Литература

1. Аншелес О. М. Начала кристаллографии. Л.: Изд-во ЛГУ, 1952. 276 с.
2. Болдырев А. К. Основы кристаллографии. Л.: Изд. КУБУЧ'а, 1926. 186 с.
3. Болдырев А. К. Кристаллография. Л.: Областлит, 1930. 331 с. (2-е изд. 1931. 331 с.; 3-е изд. 1934. 431 с.)
4. Браве О. Избранные научные труды. Кристаллографические этюды. Л.: Наука, 1974. 419 с.
5. Вайнштейн Б. К. Современная кристаллография. Т. 1. Симметрия кристаллов, методы структурной кристаллографии. М.: Наука, 1979. 384 с.
6. Вульф Ю. В. Симметрия и вывод всех её кристаллографических видов // Избранные работы по кристаллофизике и кристаллографии. М.-Л.: Гостехиздат, 1952. С. 167—191.
7. Гадолин А. В. Вывод всех кристаллографических систем и их подразделений из одного общего начала. Л.: Изд-во АН СССР, 1954. 156 с.
8. Галиулин Р. В. Кристаллографическая геометрия. М.: URSS, 2009. 136 с.
9. Делоне Б. Н., Галиулин Р. В., Штогрин М. И. Геометрический вывод результатов Браве // Браве О. Избранные научные труды. Кристаллографические этюды. Л.: Наука, 1974. С. 310—322.

10. Доливо-Добровольский В. В. Курс кристаллографии. Л.-М.: ОНТИ, 1937. 348 с.
11. Попов Г. М., Шафрановский И. И. Кристаллография. М.-Л.: Госгеолгиздат, 1941. 242 с. (2-е изд., 1947. 262 с.; 3-е изд. 1955. 296 с.; 4-е изд. 1964. 370 с.; 5-е изд. 1972. 352 с.)
12. Фёдоров Е. С. Курс кристаллографии. СПб.: Тип. П. П. Сойкина, 1897. 376 с.
13. Филатов С. К., Кривовичев С. В., Бубнова Р. С. Общая кристаллохимия. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2018. 276 с.
14. Флинт Е. Е. Практическое руководство по геометрической кристаллографии. М.-Л.: ОНТИ, 1937. 156 с.
15. Чупрунов Е. В., Хохлов А. Ф., Фаддеев М. А. Основы кристаллографии. М.: Физматлит, 2006. 500 с.

References

1. Ansheles O. M. *Nachala kristallografii* (Rudiments of crystallography). Leningrad: Leningrad State University, 1952, 276 pp.
2. Boldyrev A. K. *Osnovy kristallografii* (Crystallography basics). Leningrad: KUBUCH, 1926, 186 pp.
3. Boldyrev A. K. *Kristallografiya* (Crystallography). Leningrad: Oblastlit, 1930, 331 pp. (2nd ed., 1931, 331 pp.; 3rd ed., 1934, 431 pp.)
4. Bravais A. *Izbrannyye nauchnyye trudy. Kristallograficheskiye etyudy* (Selected scientific works. Crystallographic etudes). Leningrad: Nauka, 1974, 419 pp.
5. Weinstein B. K. *Sovremennaya kristallografiya. T. 1. Simmetriya kristallov, metody strukturnoy kristallografii* (Modern crystallography. Vol. 1. Symmetry of crystals, methods of structural crystallography). Moscow: Nauka, 1979, 384 pp.
6. Wulf Yu. V. *Simmetriya i vyvod vseh eyo kristallograficheskikh vidov. V: Izbrannyye raboty po kristallofizike i kristallografi* (Symmetry and derivation of all its crystallographic species. In: Selected works on crystal physics and crystallography). Moscow-Leningrad: Gostekhizdat, 1952, pp. 167—191.
7. Gadolin A. V. *Vyvod vseh kristallograficheskikh sistem i ikh podrazdeleniy iz odnogo obshchego nachala* (Derivation of all crystallographic systems and their divisions from one general origin). Leningrad: Acad. Sci. USSR, 1954, 156 pp.
8. Galiulin R. V. *Kristallograficheskaya geometriya* (Crystallographic geometry). Moscow: URSS, 2009, 136 pp.
9. Delaunay B. N., Galiulin R. V., Shtogrin M. I. *Geometricheskii vyvod rezul'tatov Brave. V: Brave O. Izbrannyye nauchnyye trudy. Kristallograficheskiye etyudy* (Geometric derivation of Bravais' results. In: Bravais A. Selected scientific works. Crystallographic etudes). Leningrad: Nauka, 1974, pp. 310—322.
10. Dolivo-Dobrovolsky V. V. *Kurs kristallografii* (Crystallography course). Leningrad-Moscow: ONTI, 1937, 348 pp.
11. Popov G. M., Shafranovsky I. I. *Kristallografiya* (Crystallography). Moscow-Leningrad: Gosgeolizdat, 1941, 242 pp. (2nd ed., 1947, 262 pp.; 3rd ed., 1955, 296 pp.; 4th ed., 1964, 370 pp.; 5th ed., 1972, 352 pp.)
12. Fedorov E. S. *Kurs kristallografii* (Crystallography course). Saint-Petersburg: Typ. of P. P. Soykin, 1897, 376 pp.
13. Filatov S. K., Krivovichev S. V., Bubnova R. S. *Obshchaya kristallokhimiya* (General crystal chemistry). Saint-Petersburg: Saint-Petersburg State University, 2018, 276 pp.
14. Flint E. E. *Prakticheskoye rukovodstvo po geometricheskoy kristallografi* (Practical guide to geometric crystallography). Moscow-Leningrad: ONTI, 1937, 156 pp.
15. Chuprunov E. V., Khokhlov A. F., Faddeev M. A. *Osnovy kristallografii* (Crystallography basics). Moscow: Fizmatlit, 2006, 500 pp.