ИЗ ОПЫТА ПРЕПОДАВАНИЯ. I. СИММЕТРИЯ — ДИССИММЕТРИЯ — АНТИСИММЕТРИЯ

Ю. Л. Войтеховский¹, Д. Г. Степенщиков²

¹Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург; *Voytekhovskiy_YuL@pers.spmi.ru*

²Геологический институт ФИЦ КНЦ РАН, Апатиты; *stepen@geoksc.apatity.ru*

Статья посвящена обсуждению логической связи концепций симметрии, диссимметрии и антисимметрии в университетском курсе кристаллографии. Связь симметрии и диссимметрии довольно наглядна, чего нельзя сказать о связи диссимметрии и антисимметрии. На примере выпуклых полиэдров авторы определяют антисимметрию как радикальную диссимметрию, т. е. перевод всех граней полиэдра вдоль нормалей по другую сторону от начала координат. Этот методический приём связывает все три концепции и ведёт к дальнейшему развитию теории.

Ключевые слова: симметрия, диссимметрия, антисимметрия.

The 350th anniversary of the book by N. Stenon and the 90th anniversary of the article by H. Heesh

FROM TEACHING EXPERIENCE. I. SYMMETRY — DISSYMMETRY — ANTISYMMETRY

Yu. L. Voytekhovskiy¹, D. G. Stepenshchikov²

¹Saint-Petersburg Mining University, Saint-Petersburg

²Geological Institute KSC RAS, Apatity

The article is devoted to the discussion of the logical connection of the concepts of symmetry, dissymmetry and antisymmetry in the university course of crystallography. The link between symmetry and dissymmetry is quite obvious, which cannot be said about the link between dissymmetry and antisymmetry. On the example of convex polyhedra, antisymmetry is defined as radical dissymmetry, i. e. translation of all faces of the polyhedron along the normals on the other side of the origin. This methodical technique unites the three concepts and leads to the further development of the theory.

Keywords: symmetry, dissymmetry, antisymmetry.

Введение

В 1993—1999 гг. в «Записках ВМО» были опубликованы 16 статей Д. П. Григорьева под названием «Из опыта преподавания минералогии», 15 из них изданы Н. П. Юшкиным отдельной книгой [2] в издательстве «Гео-принт». Значение этого цикла, написанного одним из создателей современной минералогии, трудно переоценить, поскольку в нём обсуждаются наработанные десятилетиями методические приёмы преподавания. Авторы статьи призывают коллег продолжить цикл Д. П. Григорьева под более общим названием — «Из опыта преподавания», имея в виду все дисциплины, уместные на страницах «Вестника института геологии Коми НЦ УрО РАН».

«Одним из существенных условий прогресса знаний является объединение и совместное изучение всех тех явлений, которые явно имеют в себе общую сторону. Изучая их именно с этой стороны, мы, несмотря на несхожесть их в других отношениях, сливаем их в один объект знания <...>. Только прогрессируя в таком объединении знания, мы при нашем ограниченном уме, продолжительности жизни и других несовершенствах нашей природы, можем в единичном интеллекте совместить знания, которые при индивидуальном исследовании явлений представлялись бы неизмеримыми, необъятными и даже прямо безграничными. <...> Мы явно шли бы навстречу полному разъединению и непониманию друг друга, если бы познание основных начал сходства знаний самого разнообразного рода <...> не облегчало бы схватывания интеллектом всё большего умственного материала в связи с более совершенной организацией этого материала» [6, с. 3].

В указанном аспекте далее обсуждаются концепции симметрии, диссимметрии и антисимметрии. Связь первых двух достаточна наглядна, чего нельзя сказать о третьей. Диссимметрия (по П. Кюри) — исчезновение некоторых элементов симметрии [3, 7, 10]. Но антисимметрия определяется как симметрия плюс «перекрашивание», то есть радикальное изменение физического свойства тела [9, 11]. Физическое свойство возникает здесь неожиданно. Авторы предлагают иной логический приём, не выводящий за рамки геометрической кристаллографии, «сливающий в один объект знания» все три концепции и допускающий развитие теории.

Ровно 350 лет назад Н. Стенон впервые сформулировал закон постоянства углов между соответственными гранями кристаллов — один из краеугольных камней кристаллографии [5, 12]. Но подоплёка этого закона — видимое искажение формы кристалла при движении граней вдоль нормалей, о чём и идёт речь в статье. В следующем году исполнится 90 лет с выхода в свет основополагающей статьи Г. Хееша об антисимметрии. Авторы определяют её, используя всё то же движение граней вдоль нормалей. Так связываются две концепции, отстоящие в истории кристаллографии на 260 лет. Это побудило авторов посвятить статью обеим датам.

Симметрия — диссимметрия

Концепция диссимметрии вводится в университетском учебнике [4, с. 135—138] как понижение симметрии кристалла (выпадение некоторых её элементов), если его точечная группа симметрии (т.г.с.) не вкладывается, с учётом ориентировок элементов симметрии, в предельную

группу симметрии среды. Здесь следует подчеркнуть, что искажение идеальной формы кристалла определено различным развитием граней простой формы, а последнее — различной скоростью их роста. Высшее достижение в анализе искажённых простых форм — полное перечисление ложных простых форм 1-го рода (подформ) в каждом из 32 классов симметрии [8]. Принцип перечисления — систематическая декомпозиция каждой идеальной простой формы в совокупность таковых с меньшим числом граней.

Авторы подошли к решению той же проблемы иначе. В статьях [13, 14] дано определение реальной кристаллографической простой формы (р.к.п.ф.) как выпуклого полиэдра, ограниченного некоторыми гранями исходной простой формы, находящимися в правильной ориентации, но на любом расстоянии от начала координат. Компьютерное перечисление р.к.п.ф. для любых простых форм и их комбинаций дало инструмент для описания полного разнообразия диссимметричных кристаллов [1]. Так, октаэдр порождает 33 комбинаторно различных р.к.п.ф., ромбодекаэдр — 625, комбинация куба и октаэдра — 77657. В целом число р.к.п.ф. растёт с числом непараллельных граней и различных межгранных углов в исходной простой форме. Это огромное, но исчислимое разнообразие форм — тот ресурс, из которого природа выбирает реализации, соотносясь с физической целесообразностью. В указанных случаях все р.к.п.ф. по необходимости относятся к подгруппам предельно высокой т.г.с. $m\bar{3}m$. В общем случае вопрос о соотношениях т.г.с. исходной простой формы (их комбинации) и её р.к.п.ф. не изучен.

Диссимметрия — антисимметрия

Концепция антисимметрии вводится в учебнике [4, с. 187—188] как композиция симметрии и «перекрашивания» (например, отображение одного индивида на другой при описании двойников, переход от «положительного» кристалла к «отрицательному» и т. д.). Покажем, как она вытекает из концепции диссимметрии.

При генерировании р.к.п.ф. движение граней вдоль нормалей допускалось лишь вовне, что моделировало анизотропный рост кристалла. Но что будет, если переместить все грани вдоль нормалей на другую сторону от начала координат (назовём это радикальной диссимметризацией), для определённости — на то же расстояние? Если исходный полиэдр не содержит элементов симметрии 2-го рода, то полученный полиэдр энантиоморфен исходному. А с учётом изменения ориентировок нормалей к граням на противоположные он даже антисимметричен исходному (эвертирован, от англ. *to evert* — «выворачивать наизнанку»). В противном случае полученный полиэдр геометрически совместим с исходным, но «перекрашен», по А. В. Шубникову (рис. 1).

Подчёркнём, что эверсия не тождественна инверсии: эвертированный полиэдр отличен от инвертированного противоположными ориентировками нормалей к граням. Таким образом, концепция антисимметрии логично следует из диссимметрии, не требуя привлечения «цвета» как физического свойства. Его роль играет ориентировка нормалей к грани полиэдра, оставляя рассуждение в рамках геометрической кристаллографии.

Частично эвертированные полиэдры

Усложним задачу, разрешив перемещать на другую сторону от начала координат любое число граней исходного полиэдра на любые расстояния. Полученные полиэдры назовём частично эвертированными. Для примера

рассмотрим те же тригональные трапецеэдр (32) и дипирамиду ($\bar{6}m2$). Первый имеет лишь элементы симметрии 1-го рода, второй — 1-го и 2-го рода. Из тригонального трапецеэдра получим 63 комбинаторно различных полиэдра: один с шубниковской т.г.с. m' , остальные классические 1 и 2. Из тригональной дипирамиды получим 36 комбинаторно различных полиэдров: три с шубниковскими т.г.с. $2'2'2$, $2'$ и $mm'2'$, остальные — классические 1, 2 и m . Изображения всех полиэдров даны в статье [15], с шубниковскими т.г.с. — на рис. 2. Как связаны т.г.с. полученных антисимметричных и исходных полиэдров?

Комбинированные полиэдры

Очевидно, одна часть граней антисимметричных полиэдров взята из граней исходного, другая — из граней эвертированного полиэдра. В целом антисимметричные полиэдры составлены из граней комбинированного (исходный плюс эвертированный) полиэдра, обладающего инверсионной шубниковской т.г.с. При этом исходный и эвертированный полиэдры гемиедричны по отношению к комбинированному. Теперь ясно, что m' — подгруппа шубниковской т.г.с. тригонального скаленоэдра ($3'm'$), порождаемого тригональным трапецеэдром, а $2'2'2$, $2'$ и $mm'2'$ — подгруппы шубниковской т.г.с. гексагональной дипирамиды ($6'/mm'2'$), порождаемой тригональной дипирамидой (рис. 3).

Закключение

Таким образом, концепция антисимметрии выводится не только из концепции симметрии добавлением цвета (физического свойства) фигуры, но и из концепции диссимметрии, где роль цвета играет ориентировка нормалей к грани полиэдра. Такая трактовка интересна тем, что не выводит рассуждение о симметрии, диссимметрии и антисимметрии из области геометрической кристаллографии, позволяя ограничиться движениями граней вдоль

Рис. 1. Антисимметричный тригональный трапецеэдр (слева) и перекрашенная тригональная дипирамида (справа). Внутренние нормали показаны чёрными (на передних гранях) и белыми (на задних гранях) кружками, внешние нормали не показаны

Fig. 1. Antisymmetric trigonal trapezohedron (left) and trigonal dipyramid painted the opposite color (right). The internal normals are marked black (on front facets) and white (on back facets) circles, the external normals are not marked

Рис. 2. Антисимметричные полиэдры, полученные из тригонального трапецеэдра (слева, m') и тригональной дипирамиды (справа, $2'2'2$, $2'$, $mm'2'$). Плоскости и оси антисимметрии показаны красным цветом

Fig. 2. Antisymmetric polyhedra derived from a trigonal trapezohedron (left, m') and a trigonal dipyramid (right, $2'2'2$, $2'$, $mm'2'$). The planes and axes of antisymmetry are marked red

Рис. 3. Исходные, эвертированные и комбинированные выпуклые полиэдры на стереографических проекциях. Тригональный трапецоэдр (т.г.с. 32) порождает дитригональный скаленоедр (т.г.с. $3m'$, слева), тригональная дипирамида (т.г.с. $6m2$) порождает гексагональную дипирамиду (т.г.с. $6/mmm'$, справа). Грани даны чёрными (исходные) и красными (эвертированные) крестиками (передняя полусфера) и кружками (задняя полусфера). Оси симметрии ($2, 3, 6$) и антисимметрии ($2, 3, 6$) показаны чёрными и красными цифрами, плоскости симметрии и антисимметрии — синими и красными линиями соответственно

Fig. 3. The initial, everted and combined convex polyhedra in the stereographic projections. A trigonal trapezohedron (s.p.g. 32) generates a ditrigonal scalenohedron (s.p.g. $3m'$, left), a trigonal dipyrmaid (s.p.g. $6m2$) generates a hexagonal dipyrmaid (s.p.g. $6/mmm'$, right). The facets are indicated by black (initial) and red (everted) crosses (front hemisphere) and circles (back hemisphere). The axes of symmetry ($2, 3, 6$) and antisymmetry ($2, 3, 6$) are marked black and red figures, while the planes of symmetry and antisymmetry are marked blue and red respectively

нормалей. Рассуждения потребовали введения новых понятий: радикальной диссимметризации, (частично) эвертированного и комбинированного полиэдров, предлагаемых к обсуждению.

Авторы благодарят рецензентов за высокопрофессиональные замечания, способствующие развитию темы.

Работа частично выполнена в рамках темы НИР 0226-2019-0052 Геологического института КНЦ РАН.

Литература

1. Войтеховский Ю. Л., Степенищikov Д. Г. Реальные кристаллографические простые формы // Зап. ВМО. 2004. № 2. С. 112—120.
2. Григорьев Д. П. Рассуждения о минералогии. Сыктывкар: Геопринт, 1998. 88 с.
3. Кюри П. О симметрии в физических явлениях: симметрия электрического и магнитного полей // Избр. труды. М.: Наука, 1966. С. 95—113.
4. Попов Г. М., Шафрановский И. И. Кристаллография. М.: Высшая школа, 1964. 370 с.
5. Стенон Н. О твёрдом, естественно содержащемся в твёрдом. Л.: Изд-во АН СССР, 1957. 152 с.
6. Фёдоров Е. С. Новая геометрия как основа черчения. СПб.: Экон. типолитография, 1907. 135 с.
7. Шафрановский И. И. Внешняя симметрия реальных кристаллов и симметрия питающей среды // Зап. ВМО. 1954. № 3. С. 198—211.
8. Шафрановский И. И., Шафрановский Г. И. Таблицы ложных простых форм искажённых кристаллов // Зап. ЛГИ. 1977. Т. 74. Вып. 2. С. 15—65.
9. Шубников А. В. Симметрия и антисимметрия конечных фигур. М.: Изд-во АН СССР, 1951. 172 с.
10. Curie P. Sur la symetrie dans les phenomenes physiques, symetrie dun champ electrique et dun champ magnetique. J. de Physique, 1894, V. 3, No. 3, pp. 393—416.
11. Heesch H. Über die vierdimensionalen Gruppen des dreidimensionalen Raumes. Z. Krist. 1930, Bd. 73, S. 325—345.
12. Scherz G. Pionier der Wissenschaft. Niels Stensen in seinen Schriften. Copenhagen: Munksgaard, 1963, 348 pp.
13. Voytekhovskiy Y. L. On the real crystal octahedra. Acta Cryst., 2002, A58, pp. 622—623.
14. Voytekhovskiy Y. L., Stepenshchikov D. G. On the real crystal rhombododecahedra. Acta Cryst., 2004, A60, pp. 582—584.
15. Voytekhovskiy Y. L., Stepenshchikov D. G. Etudes on convex polyhedra. Novel evidence of antisymmetry // Mathematical investigations in natural sciences. Proc. XIV All-Rus. Sci. School. Apatity, Oct. 23rd, 2017 г. Apatity: K & M, 2018, pp. 45—50.

References

1. Voytekhovskiy Y. L., Stepenshchikov D. G. *Real'nyye kristallograficheskiye prostyye formy* (Real crystal simple forms). Zap. VMO. (Proc. Rus. Miner. Soc.). 2004, No. 2, pp. 112—120.
2. Grigoriev D. P. *Rassuzhdeniya o mineralogii* (Discourses on mineralogy). Syktyvkar: Geoprint, 1998, 88 pp.
3. Curie P. *O simmetrii v fizicheskikh yavleniyakh: simmetriya elektricheskogo i magnitnogo poley* (On the symmetry in physical phenomena: symmetry of electric and magnetic fields). Selected works. Moscow: Nauka, 1966, pp. 95—113.
4. Popov G. M., Shafranovskiy I. I. *Kristallografiya* (Crystallography). Moscow: Vyshaya shkola, 1964, 370 pp.
5. Stenon N. *O tvordom, yestestvenno soderzhashchemsya v tvordom* (About solid naturally contained in solid). Leningrad: Acad. Sci. USSR, 1957, 152 pp.
6. Fedorov E. S. *Novaya geometriya kak osnova cherecheniya* (New geometry as the basis for drawing). St.Petersburg: Econ. typolithography, 1907, 135 pp.
7. Shafranovskiy I. I. *Vneshnyaya simmetriya real'nykh kristallov i simmetriya pitayushchey sredy* (External symmetry of real crystals and symmetry of the supply medium). Zap. VMO (Proc. Rus. Miner. Soc.), 1954, No. 3, pp. 198—211.
8. Shafranovskiy I. I., Shafranovskiy G. I. *Tablitsy lozhnykh prostykh form iskazhonnykh kristallov* (Tables of false simple shapes of distorted crystals). Zap. LGI (Proc. St.Petersburg Mining Institute), 1977, V. 74, No. 2, pp. 15—65.
9. Shubnikov A. V. *Simmetriya i antisimmetriya konechnykh figur* (Symmetry and antisymmetry of finite figures). Moscow: Acad. Sci. USSR, 1951, 172 pp.
10. Curie P. Sur la symetrie dans les phenomenes physiques, symetrie dun champ electrique et dun champ magnetique. J. de Physique, 1894, V. 3, No. 3, pp. 393—416.
11. Heesch H. Über die vierdimensionalen Gruppen des dreidimensionalen Raumes. Z. Krist. 1930, Bd. 73, S. 325—345.
12. Scherz G. Pionier der Wissenschaft. Niels Stensen in seinen Schriften. Copenhagen: Munksgaard, 1963, 348 pp.
13. Voytekhovskiy Y. L. On the real crystal octahedra. Acta Cryst., 2002, A58, pp. 622—623.
14. Voytekhovskiy Y. L., Stepenshchikov D. G. On the real crystal rhombododecahedra. Acta Cryst., 2004, A60, pp. 582—584.
15. Voytekhovskiy Y. L., Stepenshchikov D. G. Etudes on convex polyhedra. Novel evidence of antisymmetry. In: Mathematical investigations in natural sciences. Proc. XIV All-Rus. Sci. School. Apatity, Oct. 23rd, 2017 г. Apatity: K & M, 2018, pp. 45—50.