ПАРНЫЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ГРУПП СИММЕТРИИ

Д. Г. Степенщиков

Геологический институт КНЦ РАН, Апатиты

stepen@geoksc.apatity.ru

Ограничение кристалла зависит не только от его внутреннего строения, но и от внешних условий, которые могут быть как изотропными (химический состав, температура и т. п.) так и анизотропными (неравномерность концентрации питающего раствора, направленные силы сжатия и т. п.). В последнем случае неоднородный характер среды можно описать, используя, например, предельные группы симметрии Кюри.

Существует более специфический случай — рост одного кристалла внутри другого, в результате чего кристалл-восток приобретает огранку, отражающую действие обеих кристаллических сред — внутренней и внешней. Задача поиска разнообразия внешней симметрии кристаллов, растущих в кристаллических средах, была впервые поставлена И. И. Шафрановским и решена им для нескольких конкретных случаев.

В работе приводится решение задачи Шафрановского. Получена полная таблица вариантов внешней симметрии кристаллических включений в монокристаллической среде.

Ключевые слова: симметрия, диссимметрия, кристалл.

PAIR INTERSECTIONS OF THE SYMMETRY POINT GROUPS

D. G. Stepenshchikov

Geological Institute KSC RAS, Apatity

stepen@geoksc.apatity.ru

The shape of the crystal depends not only on its internal structure, but also on the external conditions that can be both isotropic (chemical composition, temperature, etc.) and anisotropic (heterogeneous matrix, oriented stress, etc.). In the latter case, the inhomogeneous character of the medium can be described, for example, in terms of the Curie limit groups.

There is a more specific case — the growth of one crystal inside the other. As a result the shape of crystalline inclusion shows the action both internal medium and external one. The question of the diversity of the external symmetry of crystals growing in crystalline media was first posed and solved by I. I. Shafranovsky for several specific cases.

In this paper the solution of the Shafranovsky problem is given. The complete table of variety of external symmetry of crystalline inclusion inside monocrystalline matrix was obtained.

Keywords: symmetry, dissymmetry, crystal.

Введение

Данная статья развивает положения И. И. Шафрановского: симметрия кристаллообразующей среды влияет на внешнюю форму кристаллов, искажая их идеальную огранку, и характер искажения зависит от того, какие из элементов симметрии среды и кристалла являются общими, а какие нет (принцип диссимметрии Кюри). В «Лекциях» [10] Шафрановским была поставлена задача: «*Ложные формы кристаллов будут наблюдаться и на сростках внутри кристаллических сред с симметрией, отвечающей одному из 32 видов симметрии. Нет возможности рассмотреть все мыслимые для таких случаев комбинации. Следует лишь помнить, что кристаллический сросток сохранит из своих элементов симметрии те, которые совпадут с соответствующими элементами симметрии вмещающего кристалла*». В «Систематике» [11] приведено два примера, демонстрирующих разнообразие ложных форм для кубических кристаллов с симметрией $m\bar{3}m$, развивавшихся внутри кристалла той же симметрии, и внутри гексагонального кристалла с симметрией $6/mmm$. При этом каждой симметрии ложных форм была поставлена в соответствие относительная ориентировка обоих кристаллов.

Несмотря на давность рассматриваемой задачи, изучение влияния симметрии среды на рост кристалла, выраженного в искажении его огранки, остается актуальным научным направлением и сегодня, что отражено в ряде работ [1, 5, 6]. Полный вывод наборов точеч-

ных групп симметрии для сростков двух неэквивалентных индивидов приведен в трудах [2–4], однако имеет ряд неточностей. Для автора эта тема также не нова. Рассмотренные им суперпозиция предельных групп симметрии Кюри [7] и зависимость внешней симметрии кристаллов кубической сингонии от симметрии среды, описываемой предельными группами [8], схожи с задачей Шафрановского. А результаты, полученные при моделировании роста ромбододекаэдрических кристаллов в среде с предельной группой симметрии $\infty/m\bar{3}m$, показали, что корректное определение симметрии искаженной огранки само по себе является интересной проблемой [9].

Фраза о невозможности рассмотрения всех комбинаций сегодня неактуальна. Быстрое развитие вычислительной техники позволило решить многие задачи, связанные с большими объемами данных. В нашем случае задача сводится к построению таблицы размером 32×32 , в каждой ячейке a_{ij} которой содержится список кристаллографических точечных групп симметрии (далее — группы), являющихся результатом пересечения двух групп, соответствующих i -й строке и j -му столбцу.

Теоретическая часть

Рассмотрим схему соподчинения групп (рис. 1). Согласно ей, для любой пары групп можно опреде-

Рис. 1. Схема соподчинения 32 групп

Fig. 1. The scheme of subordination of 32 point groups

лить все их совместные подгруппы, полученные в результате пересечения исходных групп при некоторой взаимной ориентировке. Например, группы $4/m$ и $\bar{6}m2$ имеют общие подгруппы 2 , m и 1 . Ось 2 возникает при совпадении оси 4 первой группы с любой из трех осей 2 во второй группе, плоскость m — при соосном расположении осей 4 и $\bar{6}$ и тривиальный случай 1 — при полной разориентировке групп, когда не совпадает ни один элемент симметрии.

Некоторые подгруппы не могут быть результатом пересечения. Например, в «Систематике» [11] было указано, что комбинации групп с центром инверсии сохраняют его при любой ориентировке, поэтому подгруппы без центра инверсии исключаются. Другой случай — это поглощение одной подгруппы другой, более высокой. Например, пересечение групп $6/m$ и $6m2$ исключает подгруппу 3 , которая поглощается общей подгруппой $\bar{6}$. Здесь выявляется недоработка подхода, предложенного в работе [11], согласно которому «следует прежде всего найти совокупность элементов симметрии, получающуюся в том случае, когда максимальное число элементов одного кристалла параллельно максимальному числу соответственных элементов симметрии другого кристалла. В этом случае мы получим наиболее богатую элементами симметрии комбинацию... Для вывода всех остальных случаев внешней симметрии... достаточно перечислить виды более низкой симметрии, являющиеся подчиненными подгруппами по отношению к упомянутой выше, наиболее богатой элементами симметрии комбинации». В предыдущем примере «наиболее богатая комбинация» $\bar{6}$ содержит подчиненную «невозможную» подгруппу 3 . Нечёткость метода хорошо видна на собственном примере Шафрановского: пара групп с одной и той же симметрией $m\bar{3}m$, очевидно, даёт в качестве «наиболее богатой комбинации» саму себя. Но И. И. Шафрановский почему-то приводит всего 8 вариантов результирующей симметрии, хотя подчиненных подгрупп у $m\bar{3}m$ гораздо больше. Также «наиболее богатая комбинация» может быть реализована разными способами. Например, комбинация групп mmm и $\bar{4}2m$ при различных ориентировках даёт подгруппы $mm2$ и 222 , которые содержат по три совпадающих

элемента симметрии, но при этом отличаются разнообразием подчиненных подгрупп. Поэтому трудно согласиться с фразой, что «упомянутая задача решается сравнительно просто, и нет необходимости приводить полностью все возможные сочетания и случаи для всех 32 видов симметрии» [11].

В предлагаемом нами подходе элементы симметрии группы задаются векторами. Осям симметрии соответствуют параллельные им вектора, плоскостям симметрии — вектора нормали к данным плоскостям. Ориентировка и длина (ненулевая) векторов не имеет значения. Центр инверсии отмечается отдельно. В результате группа представляет собой пучок поименованных векторов. Например, группа $mm2$ — это пучок из трёх векторов: $m(1,0,0)$, $m(0,1,0)$ и $2(0,0,1)$. Для сонаправленных осей указывается только одна ось, поглощающая все остальные. Для сонаправленных прямых и инверсионных осей введены две псевдооси — 4^* и 6^* . Первая поглощает оси 4 и $\bar{4}$, вторая — оси 6 , $\bar{3}$ и $\bar{6}$. В пучке могут быть коллинеарны не более двух векторов, один из которых соответствует оси, а другой — плоскости, перпендикулярной данной оси.

Рассмотрим общую схему нахождения результата всех возможных пересечений двух групп. Представим группы в виде пучков векторов и отметим в одном из них некоторый вектор. В другом пучке последовательно переберём все вектора, и сориентируем пучок так, чтобы очередной выбранный вектор был коллинеарен вектору, отмеченному в первом пучке. Затем второй пучок будем дискретно поворачивать вокруг выбранного вектора с некоторым малым шагом. На каждом шаге определим все коллинеарные (с учётом дискретности шага) вектора из первого и второго пучков и составим из них пучок-результат. Соответствующий каждому вектору этого пучка элемент симметрии определим как наибольший общий элемент для элементов, соответствующих коллинеарным векторам исходных пучков (рис. 2). Например, для осей 4 и 6

Рис. 2. Схема соподчинения элементов симметрии

Fig. 2. The scheme of subordination of the elements of symmetry

таким элементом будет ось 2 . С помощью табл. 1 полученную совокупность элементов симметрии используем для определения группы, которая будет результатом пересечения исходных групп при их данной взаимной ориентировке. Отдельно рассматривается центр инверсии. Если он есть у обеих исходных групп, то он будет и в группе-результате, в противном случае нет. Если любая из исходных групп не имеет центра инверсии, то одним из результатов их пересечения всегда будет группа 1 .

Таблица 1. Наборы элементов для 32 групп
Table 1. The sets of elements for the 32 point groups

Группы Groups	Элементы симметрии / Symmetry elements											Группы Groups	Элементы симметрии / Symmetry elements										
	$\bar{1}$	m	2	3	4	6	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	4^*	6^*		$\bar{1}$	m	2	3	4	6	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	4^*	6^*
1												422			4		1						
$\bar{1}$	1											4/mmm	1	5	4							1	
m		1										$\bar{4}$							1				
2			1									$\bar{4}2m$		2	2				1				
2/m	1	1	1									6					1						
mm2		2	1									6/m	1	1									1
222			3									6mm		6			1						
mmm	1	3	3									622			6		1						
3				1								6/mmm	1	7	6								1
$\bar{3}$	1						1					$\bar{6}$		1						1			
3m		3		1								$\bar{6}m2$		4	3					1			
32			3	1								23			3	4							
$\bar{3}m$	1	3	3				1					$m\bar{3}$	1	3	3			4					
4					1							$\bar{4}3m$		6		4			3				
4/m	1	1								1		432			6	4	3						
4mm		4			1							$m\bar{3}m$	1	9	6			4			3		

Результаты и обсуждение

Перебор всех пар пересекаемых групп, их ориентирование, поиск совпадающих элементов симметрии и т. п. — рутинная процедура, поэтому мы использовали авторскую компьютерную программу. Результат дан в табл. 2. Тривиальные случаи, когда одной из исходных групп является 1, в таблице не показаны. Получаемые группы даны в каждой ячейке таблицы без указания соответствующей ориентировки исходных групп.

По таблице можно проверить, что разнообразие групп симметрии, полученные И. И. Шафрановским в работе [11] для пересечений групп $m\bar{3}m$ с $m\bar{3}m$ и $6/mmm$ с $m\bar{3}m$ совпадают. Избыточность теоретического числа подгрупп по сравнению с их реальным числом можно продемонстрировать на примере пересечения двух групп mmm . Подгруппами mmm по схеме на рис. 1 являются 1, 2, m , $\bar{1}$, 222, $mm2$, $2/m$ и mmm . Реальных же подгрупп, получаемых при пересечении, согласно табл. 2, всего три: 1, $2/m$ и mmm . Первая из них появляется, когда у групп не совпадают по ориентировке ни одна из осей и плоскостей симметрии. Вторая подгруппа появляется при совпадении только одной плоскости симметрии (и, соответственно, одной оси второго порядка). При этом поглощаются теоретические подгруппы m и 2. И наконец, третья подгруппа появляется в результате совпадения двух плоскостей или двух осей, при котором автоматически совпадают и оставшиеся ось, и плоскость. В этом случае также поглощаются теоретические подгруппы 222 и $mm2$, самостоятельно не проявляемые при пересечении. Для некоторых пар групп множество получаемых подгрупп соответствует теоретически возможному. Таковы, например, группы 1 и 2 для пары 32 и $4/mmm$. Такое совпадение наблюдается тем чаще, чем менее симметричны пересекаемые группы.

Заключение

Табл. 2 является решением задачи, поставленной И. И. Шафрановским. Доработкой этого решения может быть указание для каждой из результирующих симметрий соответствующей ориентировки пересекаемых групп, подобно тому, как это было сделано автором в [8]. Однако данная информация сильно усложнит формат представляемых данных. Разумеется, реальная картина роста кристаллов в сплошных кристаллических средах далека от идеальной. Тем не менее полученные результаты могут быть полезны для изучения кристаллогенезиса на фактическом материале и развития методов интерпретации внешней формы кристалла как простого диагностического признака.

Литература

1. Войтеховский Ю. Л. Принцип Кюри и гранаты горы Макзапах // Доклады Академии наук. 2005. Т. 400. № 3. С. 355—358.
2. Макагонов Е. П. Симметрия сростков. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979. 52 с.
3. Макагонов Е. П. Симметрия сростков минеральных индивидов. М.: Наука, 1991. 200 с.
4. Макагонов Е. П. Таблицы симметрии сростков двух кристаллографических индивидов // Проблемы минералогии Урала: Тр. ИГЗ. Свердловск, 1976. Вып. 14. С. 69—81.
5. Павлушин А. Д. К усовершенствованию метода анализа анизотропии среды метасоматического кристаллообразования // Кристаллогенезис и минералогия: II Международная конференция: Сборник трудов. 2007. С. 50—52.
6. Ракин В. И. Октаэдры алмаза и принцип Кюри // Кристаллография. 2015. Т. 60. № 5. С. 816—825.

Таблица 2 (продолжение)

Table 2 (continuation)

	$\overline{4}2m$	6	6/m	6mm	622	6/mmm	$\overline{6}$	$\overline{6}m2$	23	$m\overline{3}$	$\overline{4}3m$	432	$m\overline{3}m$
$\overline{1}$	1	1	$\overline{1}$	1	1	$\overline{1}$	1	1	1	$\overline{1}$	1	1	$\overline{1}$
m	$1,m$	1	$1,m$	$1,m$	1	$1,m$	$1,m$	$1,m$	1	$1,m$	$1,m$	1	$1,m$
2	$1,2$	$1,2$	$1,2$	$1,2$	$1,2$	$1,2$	1	$1,2$	$1,2$	$1,2$	$1,2$	$1,2$	$1,2$
$2/m$	$1,m,2$	$1,2$	$\overline{1},2/m$	$1,m,2$	$1,2$	$\overline{1},2/m$	$1,m$	$1,m,2$	$1,2$	$\overline{1},2/m$	$1,m,2$	$1,2$	$\overline{1},2/m$
$mm2$	$1,m,2,mm2$	$1,2$	$1,m,2$	$1,m,2,mm2$	$1,2$	$1,m,2,mm2$	$1,m$	$1,m,2,mm2$	$1,2$	$1,m,2,mm2$	$1,m,2,mm2$	$1,2$	$1,m,2,mm2$
222	$1,2,222$	$1,2$	$1,2$	$1,2$	$1,2,222$	$1,2,222$	1	$1,2$	$1,2,222$	$1,2,222$	$1,2,222$	$1,2,222$	$1,2,222$
mmm	$1,m,2,mm2,222$	$1,2$	$\overline{1},2/m$	$1,m,2,mm2$	$1,2,222$	$\overline{1},2/m,mmm$	$1,m$	$1,m,2,mm2$	$1,2,222$	$\overline{1},2/m,mmm$	$1,m,2,mm2,222$	$1,2,222$	$\overline{1},2/m,mmm$
3	1	$1,3$	$1,3$	$1,3$	$1,3$	$1,3$	$1,3$	$1,3$	$1,3$	$1,3$	$1,3$	$1,3$	$1,3$
$\overline{3}$	1	$1,3$	$\overline{1},3$	$1,3$	$1,3$	$\overline{1},3$	$1,3$	$1,3$	$1,3$	$\overline{1},3$	$1,3$	$1,3$	$\overline{1},3$
$3m$	$1,m$	$1,3$	$1,m,3$	$1,m,3,3,3m$	$1,3$	$1,m,3,3,3m$	$1,m,3$	$1,m,3,3,3m$	$1,3$	$1,m,3$	$1,m,3,3,3m$	$1,3$	$1,m,3,3,3m$
32	$1,2$	$1,2,3$	$1,2,3$	$1,2,3$	$1,2,3,3,32$	$1,2,3,3,32$	$1,3$	$1,2,3,3,32$	$1,2,3$	$1,2,3$	$1,2,3$	$1,2,3,3,32$	$1,2,3,3,32$
$\overline{3}m$	$1,m,2$	$1,2,3$	$\overline{1},2/m,3$	$1,m,2,3,3,3m$	$1,2,3,3,32$	$\overline{1},2/m,3,3,3m$	$1,m,3$	$1,m,2,3,3,3,32$	$1,2,3$	$\overline{1},2/m,3$	$1,m,2,3,3,3m$	$1,2,3,3,32$	$\overline{1},2/m,3,3,3m$
4	$1,2$	$1,2$	$1,2$	$1,2$	$1,2$	$1,2$	1	$1,2$	$1,2$	$1,2$	$1,2$	$1,2,4$	$1,2,4$
$4/m$	$1,m,2,4$	$1,2$	$\overline{1},2/m$	$1,m,2$	$1,2$	$\overline{1},2/m$	$1,m$	$1,m,2$	$1,2$	$\overline{1},2/m$	$1,m,4$	$1,2,4$	$\overline{1},2/m,4/m$
$4mm$	$1,m,2,mm2$	$1,2$	$1,m,2$	$1,m,2,mm2$	$1,2$	$1,m,2,mm2$	$1,m$	$1,m,2,mm2$	$1,2$	$1,m,2,mm2$	$1,m,2,mm2$	$1,2,4$	$1,m,2,mm2,4,4mm$
422	$1,2,222$	$1,2$	$1,2$	$1,2$	$1,2,222$	$1,2,222$	1	$1,2$	$1,2,222$	$1,2,222$	$1,2,222$	$1,2,222,4,422$	$1,2,222,4,422$
$4/mmm$	$1,m,2,mm2,222,4,42m$	$1,2$	$\overline{1},2/m$	$1,m,2,mm2$	$1,2,222$	$\overline{1},2/m,mmm$	$1,m$	$1,m,2,mm2$	$1,2,222$	$\overline{1},2/m,mmm$	$1,m,2,mm2,4,42m$	$1,2,222,4,422$	$\overline{1},2/m,mmm,4/m,4/mmm$
$\overline{4}$	$1,2,4$	$1,2$	$1,2$	$1,2$	$1,2$	$1,2$	1	$1,2$	$1,2$	$1,2$	$1,4$	$1,2$	$1,2,4$

Таблица 2 (окончание)

Table 2 (end)

	$\overline{42m}$	6	6/m	6mm	622	6/mmm	$\overline{6}$	$\overline{6}m2$	23	$m\overline{3}m$	$\overline{43m}$	432	$m\overline{3}m$
$\overline{42m}$	$1, m, 2, 222, \overline{4}, 42m$	1, 2	$1, m, 2$	$1, m, 2, mm2$	$1, 2, 222$	$1, m, 2, mm2, 222$	$1, m$	$1, m, 2, mm2$	$1, 2, 222$	$1, m, 2, mm2, 222$	$1, m, 2, \overline{4}, 42m$	$1, 2, 222$	$1, m, 2, mm2, 222, \overline{4}, 42m$
6		1, 6	$1, 6$	$1, 6$	$1, 2, 6$	$1, 2, 6$	1, 3	$1, 2, 3$	$1, 2, 3$	$1, 2, 3$	$1, 2, 3$	$1, 2, 3$	$1, 2, 3$
6/m			$\overline{1}, 6/m$	$1, m, 6$	$1, 2, 6$	$\overline{1}, 2/m, 6/m$	$1, \overline{6}$	$1, m, \overline{2}, 6$	$1, 2, 3$	$\overline{1}, 2/m, 3$	$1, m, 2, 3$	$1, 2, 3$	$\overline{1}, 2/m, 3$
6mm				$1, m, 6, 6mm$	$1, 2, 6$	$1, m, 2, mm2, 6, 6mm$	$1, m, 3$	$1, m, 2, mm2, 3, 3m$	$1, 2, 3$	$1, m, 2, mm2, 3, 3m$	$1, m, 2, mm2, 3, 3m$	$1, 2, 3$	$1, m, 2, mm2, 3, 3m$
622					$1, 2, 222, 6, 622$	$1, 2, 222, 6, 622$	1, 3	$1, 2, 3, 32$	$1, 2, 222, 3$	$1, 2, 222, 3$	$1, 2, 222, 3, 32$	$1, 2, 222, 3, 32$	$1, 2, 222, 3, 32$
6/mmm						$\overline{1}, 2/m, mmm, 6/m, 6/mmm$	$1, m, \overline{6}$	$1, m, 2, mm2, \overline{6}, 6m2$	$1, 2, 222, 3$	$\overline{1}, 2/m, mmm, 3$	$1, m, 2, mm2, 222, 3, 3m$	$1, 2, 222, 3, 32$	$\overline{1}, 2/m, mmm, 3, 3m$
$\overline{6}$							$1, \overline{6}$	$1, m, \overline{6}$	1, 3	$1, m, 3$	$1, m, 3$	1, 3	$1, m, 3$
$\overline{6}m2$								$1, m, 2, mm2, \overline{6}, 6m2$	$1, 2, 3$	$1, m, 2, mm2, 3, 3m$	$1, m, 2, mm2, 3, 3m$	$1, 2, 3, 32$	$1, m, 2, mm2, 3, 3m, 32$
23									$1, 2, 3, 23$	$1, 2, 3, 23$	$1, 2, 3, 23$	$1, 2, 222, 3, 23$	$1, 2, 222, 3, 23$
$m\overline{3}$										$\overline{1}, 2/m, 3, m\overline{3}$	$1, m, 2, mm2, 3, 23$	$1, 2, 222, 3, 23$	$\overline{1}, 2/m, mmm, 3, m\overline{3}$
$\overline{43m}$											$1, m, 3, 3m, \overline{4}, 43m$	$1, 2, 222, 3, 23$	$1, m, 2, mm2, 3, 3m, \overline{4}, 42m, 43m$
432												$1, 2, 222, 3, 32, 4, 422, 432$	$1, 2, 222, 3, 32, 4, 422, 432$
$m\overline{3}m$													$\overline{1}, 2/m, mmm, 3, 3m, 4/m, 4/mmm, m\overline{3}m$

7. Степенщиков Д. Г. О предельных группах симметрии и формах кристаллов альмандина // ЗРМО. Ч. 139. № 4. 2010. С. 107—110.

8. Степенщиков Д. Г. Определение ориентировки кубических кристаллов в средах с предельными группами симметрии // Геология и полезные ископаемые Кольского полуострова: Труды VII Всероссийской Ферсмановской научной сессии, посвящённой 80-летию Кольского НЦ РАН (Апатиты, 2—5 мая 2010 г.) и областной конференции, посвящённой 75-летию историко-краеведческого музея г. Кировска (22—23 апреля 2010 г.) / Ред. Ю. Л. Войтеховский. Апатиты: К & М. 2010. С. 94—97.

9. Степенщиков Д. Г. Реальная форма кристалла в анизотропной среде (на примере ромбододекаэдра граната) // ЗРМО. Ч. 141. № 1. 2011. С. 127—132.

10. Шафрановский И. И., Мокиевский В. А., Дементьева Г. И. Систематика и внешняя симметрия кристаллических включений в монокристалльной среде // Минералогический сборник Львовского геологического общества. 1962. № 16. С. 48—56.

11. Шафрановский И. И. Лекции по кристалломорфологии. М.: Высшая школа, 1968. 174 с.

References

1. Voitekhovsky Yu. L. *Printsip Kyuri i granaty gory Makzapahk* (Curie principle and garnets from Makzapakh Mt). Doklady Earth Sciences, 2005, V. 400, No. 3, pp. 355—358.

2. Pavlushin A. D. *K usovershenstvovaniyu metoda analiza anizotropii sredy metasomaticheskogo kristalloobrazovaniya* (Upgrading of method of analysis of anisotropic environment of metasomatic crystal formation). *Kristallogenezis i mineralogi-*

ya (Crystal genesis and mineralogy). Proceeding of conference, 2007, pp. 50—52.

3. Rakin V. I. *Oktaedry almaza i printsip Kyuri* (Diamond octahedral and Curie principle). *Kristallografiya*, 2015, V. 60, No. 5, pp. 816—825.

4. Stepenshchikov D. G. *O predelnykh gruppakh simmetrii i formakh kristallov almandine* (Terminal groups of symmetry and almandine crystal forms). *Proceedings of RMS*, 139, No.4, 2010, pp. 107—110.

5. Stepenshchikov D. G. *Opredelenie orientirovki kubicheskikh kristallov v sredakh s predelnymi gruppami simmetrii* (Determination of orientation of cubic crystals in environments with terminal groups of symmetry). *Geologiya i poleznye iskopaemye Kolskogo poluoostrova* (Geology and mineral resources of Kola Peninsula). *Proceedings of conferences in May 2—5, 2010, and April 22—23, 2010*. Ed. Yu. L. Voitekhovsky. Apatity: K & M, 2010, pp. 94—97.

6. Stepenshchikov D. G. *Realnaya forma kristalla v anizotropnoi srede (na primere rombododekaedra granata)* (Real shape of crystal in anisotropic environment (by example of garnet rhombododecahedron). *Proceedings of RMS*, 141, No.1, 2011, pp. 127—132.

7. Shafranovsky I. I., Mokievsky V. A., Dementeva G. I. *Sistematika i vneshnyaya simmetriya kristallicheskih vklyuchenii v monokristalnoi srede* (Systematics and outer symmetry of crystal-line inclusions in monocrystal environment). *Mineralogicheskii sbornik Lvovskogo geologicheskogo obschestva* (Mineralogical collection of articles of Lviv geological society), 1962, No.16, pp. 48—56.

8. Shafranovsky I. I. *Lektsii po kristallomorfologii* (Lectures about crystal morphology). Moscow: Vysshaya shkola, 1968, 174 pp.