ВЕРШИННЫЕ И РЕБЕРНЫЕ УСЕЧЕНИЯ ЗАКРЫТЫХ ПРОСТЫХ ФОРМ: К 280-ЛЕТИЮ Ж. Б. Л. РОМЕ-ДЕ-ЛИЛЯ И 80-ЛЕТИЮ Н. П. ЮШКИНА

Ю. Л. Войтеховский, Д. Г. Степенщиков

Геологический институт КНЦ РАН, Апатиты; woyt@geoksc.apatity.ru

В 2016 г. исполняется 80 лет со дня рождения Н. П. Юшкина — нашего современника, при жизни ставшего классиком отечественной минералогии. Одна из оригинальных черт его научного стиля — умение извлекать забытые идеи из старинных фолиантов, казалось бы, имеющих сугубо исторический интерес. Яркое тому свидетельство — препринт научного доклада [3], не теряющий свежести на протяжении трёх десятилетий. Беря пример с учителя, авторы этой статьи решают задачу о вершинных и реберных усечениях кристаллического полиэдра, оставленную нам одним из основателей кристалломорфологии — Ж. Б. Л. Роме-де-Лилем, которому в этом году исполняется 280 лет.

Ключевые слова: закрытые простые формы, вершинные усечения, реберные усечения; комбинации простых форм, геометрически дуальные формы.

VERTEX AND RIB TRUNCATIONS OF CLOSED SIMPLE FORMS: FOR THE 280th ANNIVERSARY OF ZH. B. L. ROMEU DE LILLE AND THE 80th ANNIVERSARY OF N. P. YUSHKIN

Yu. L. Voytekhovsky, D. G. Stepenshikov

Geological Institute of KSC RAS, Apatity; woyt@geoksc.apatity.ru

In 2016 we celebrate the 80th anniversary of N. P. Yushkin — our contemporary, who in his lifetime became a classic of Russian mineralogy. One of the original features of his scientific style — ability to find forgotten ideas from ancient tomes, it would seem, having a purely historical interest. A vivid evidence — a preprint of scientific report [3], without losing freshness for three decades. Taking the example of the teacher, the authors of this article solve the problem of vertex and rib truncations of crystalline polyhedron by one of the founders of crystal morphology — Z. B. L. Romeu de Lille, which 280th anniversary we celebrate this year.

Keywords: closed simple forms, vertex truncations, rib truncations, combination of simple forms, geometric dual form.

Сегодня кристаллический полиэдр рассматривают с точки зрения взаимного расположения граней, что обусловлено законом постоянства углов и гониометрической техникой измерений. Но так было не всегда. А. Г. Вернер различал кристаллы по вершинам [2], а Ж. Б. Л. Роме-де-Лиль отдавал должное всем элементам: «Какой-либо кристалл может быть усечённым в своих вершинах, а также вдоль рёбер. <...> Наблюдаются кристаллы, часть которых имеет усечения или на вершинах, или даже и на вершинах, и на рёбрах» [1, с. 13]. В этом рассуждении вполне просматривается «задача Роме-де-Лилия»: для данного кристаллического полиэдра найти формы путём усечения вершин или рёбер. Для определённости далее она решена для 30 закрытых простых форм (з.п.ф.). При этом эквивалентные (т.е. равного положения, переводимые друг в друга преобразованиями симметрии) вершины и рёбра усекаются одинаково (т.е. секущая плоскость ориентирована одинаково относительно эквивалентных граней, сходящихся в вершине или на ребре).

Легко видеть, что вершинные усечения приводят к геометрически дуальным формам, хорошо известным в минералогии: комбинация призмы и пинакоида дуальна одноименной бипирамиде, октаэдр дуален кубу (рис. 1), и т.д. Уже эти примеры обнаруживают в задаче Роме-де-Лилия реальную (диктуемую природой) подоплёку. Таким образом, эта часть задачи допускает иную, совершенно нетривиальную формулировку: в каждом ли классе симметрии допустима форма, геометрически дуальная исходной з.п.ф.? Для решения задачи составлены оригинальные компьютерные алгоритмы, среди прочего по-

зволяющие распознавать вершинные и реберные усечения, выделяя п.ф.в их сложных комбинациях. Результаты сведены в табл. 1, 2 и рис. 2.

В результате вершинных усечений найдено, что все классы симметрии допускают форму, дуальную к з.п.ф. Соответствующие комбинации п.ф. предлагается выделить как особые. (В классах 23 и $-43m$ кубу дуальна комбинация двух тетраэдров — гемидрических форм октаэдра. К сожалению, тема голо-, геми-, тетарго- и огдоэдрии незаметно исчезла из кристалломорфологии. Некогда она связывала п.ф. в ряды родственных форм. В результате исследования между з.п.ф. обнаружены связи иного рода). В тригональной сингонии ромбоэдр и дитригональный скаленоэдр имеют в качестве дуальных различные комбинации ромбоэдра и пинакоида. Для 1-го она выглядит как тригональная антипризма. Для 2-го — она же, срезанная параллельно пинакоиду так, что треугольные грани стали трапециями. В кубической сингонии ромбододекаэдр, тетрагонитетраэдр, гексатетраэдр, тригонтриоктаэдр и тетрагексаэдр имеют в качестве дуальных форм различные комбинации куба и октаэдра (или двух тетраэдров). Тетрагонтриоктаэдр и гексоктаэдр имеют в качестве дуальных различные комбинации ромбододекаэдра, октаэдра и куба. Отличия между ними состоят в разном развитии п.ф. Одна комбинация получается из другой движениями граней вдоль нормалей. Им соответствуют повороты граней исходных з.п.ф. на рёбрах. Так, грани дитригонального скаленоэдра, попарно сливаясь в параллельном положении, образуют грани ромбоэдра.

Таблица 1. Вершинные усечения з.п.ф.
Table 2. CSF vertex truncations

№	Исходная з.п.ф.	Вершинное усечение
Ромбическая сингония		
1	Тетраэдр ромб. (4)	Тетраэдр ромб.
2	Бипирамида ромб. (2 + 2 + 2)	3 пинакоида
Тригональная и гексагональная сингонии		
3	Бипирамида триг. (3 + 2)	Призма триг. + пинакоид
4	Ромбоэдр (6 + 2)	Ромбоэдр + пинакоид (триг. антипризма)
5	Трапецоэдр триг. (6 + 2)	Трапецоэдр триг. + пинакоид
6	Бипирамида дитриг. (6 + 2)	Призма дитриг. + пинакоид
7	Скаленоэдр дитриг. (6 + 2)	Ромбоэдр + пинакоид (усечённая триг. антипризма, грани – трапеции)
8	Трапецоэдр гекс. (12 + 2)	Трапецоэдр гекс. + пинакоид
9	Бипирамида гекс. (6 + 2)	Призма гекс. + пинакоид
10	Бипирамида дигекс. (12 + 2)	Призма дигекс. + пинакоид
Тетрагональная сингония		
11	Тетраэдр тетр. (4)	Тетраэдр тетр.
12	Бипирамида тетр. (4 + 2)	Призма тетр. + пинакоид
13	Скаленоэдр тетр. (4 + 2)	Тетраэдр тетр. + пинакоид
14	Трапецоэдр тетр. (8 + 2)	Трапецоэдр тетр. + пинакоид
15	Бипирамида дитетр. (8 + 2)	Призма дитетр. + пинакоид
Кубическая сингония		
16	Тетраэдр куб. (4)	Тетраэдр куб.
17	Октаэдр (6)	Куб
18	Куб (8)	Октаэдр (m3, 432, m3m) или 2 тетраэдра (23, 43 m)
19	Ромбододекаэдр (8 + 6)	Октаэдр (m3, 432, m3m) или 2 тетраэдра (23, 43 m) (архимедов кубооктаэдр) + куб
20	Пентагондодокаэдр (12 + 8)	Пентагондодокаэдр + октаэдр (m3) или 2 тетраэдра (23) («икосаэдр» на кристаллах пирита)
21	Тригонритетраэдр (4 + 4)	2 тетраэдра (усечённый тетраэдр)
22	Тетрагонритетраэдр (6 + 4 + 4)	Куб + 2 тетраэдра (тетраэдр, усечённый по рёбрам и вершинам, грани – тригоны)
23	Пентагонритетраэдр (12 + 4 + 4)	Пентагонритетраэдр + 2 тетраэдра
24	Гексатетраэдр (6 + 4 + 4)	Куб + 2 тетраэдра (тетраэдр, усечённый по рёбрам и вершинам, грани – гексагоны)
25	Тригонтриоктаэдр (8 + 6)	Октаэдр + куб (усечённый куб)
26	Тетрагонтриоктаэдр (12 + 8 + 6)	Ромбододекаэдр + октаэдр + куб (грани октаэдра – тригоны, остальные – тетрагоны)
27	Пентагонтриоктаэдр (24 + 8 + 6)	Пентагонтриоктаэдр + октаэдр + куб
28	Тетрагексаэдр (8 + 6)	Октаэдр (432, m3m) или 2 тетраэдра (43 m) + куб (усечённый октаэдр)
29	Дидодокаэдр (12 + 8 + 6)	Пентагондодокаэдр + октаэдр + куб
30	Гексоктаэдр (12 + 8 + 6)	Ромбододекаэдр + октаэдр + куб (грани ромбододекаэдра – тетрагоны, октаэдра – гексагоны, куба – октагоны)

Примечание: после названия исходной з.п.ф. в скобках – числа эквивалентных вершин.

Note: after name of initial CSF in brackets – numbers of equivalent vertex

Таблица 2. Рёберные усечения з.п.ф.
Table 2. CSF rib truncations

№	Исходная з.п.ф.	Рёберное усечение
Ромбическая сингония		
1	Тетраэдр ромб. (2 + 2 + 2)	3 пинакоида
2	Бипирамида ромб. (4 + 4 + 4)	3 призмы ромб.
Тригональная и гексагональная сингонии		
3	Бипирамида триг. (6 + 3)	Бипирамида триг. + призма триг.
4	Ромбоэдр (6 + 6)	Ромбоэдр + призма гекс.
5	Трапецоэдр триг. (6 + 3 + 3)	Трапецоэдр триг. + 2 призмы триг.
6	Бипирамида дитриг. (6 + 6 + 6)	Призма дитриг. + 2 бипирамиды триг.
7	Скаленоэдр дитриг. (6 + 6 + 6)	2 ромбоэдра + призма гекс.
8	Трапецоэдр гекс. (12 + 6 + 6)	Трапецоэдр гекс. + 2 призмы гекс.
9	Бипирамида гекс. (12 + 6)	Бипирамида гекс. + призма гекс.
10	Бипирамида дигекс. (12 + 12 + 12)	2 бипирамиды гекс. + призма дигекс.

Окончание таблицы 2
End of table 2

№	Исходная з.п.ф.	Рёберное усечение
Тетрагональная сингония		
11	Тетраэдр тетр. (4 + 2)	Призма тетр. + пинакоид
12	Бипирамида тетр. (8 + 4)	Бипирамида тетр. + призма тетр.
13	Скаленоедр тетр. (4 + 4 + 4)	Призма тетр. + 2 тетраэдра тетр.
14	Трапецоэдр тетр. (8 + 4 + 4)	Трапецоэдр тетр. + 2 призмы тетр.
15	Бипирамида дитетр. (8 + 8 + 8)	Призма дитетр. + 2 бипирамиды тетр.
Кубическая сингония		
16	Тетраэдр куб. (6)	Куб
17	Октаэдр (12)	Ромбододекаэдр
18	Куб (12)	Ромбододекаэдр
19	Ромбододекаэдр (24)	Тетрагонтриоктаэдр
20	Пентагондодекаэдр (24 + 6)	Дидодекаэдр + куб
21	Тригонритетраэдр (12 + 6)	Тетрагонритераэдр + куб
22	Тетрагонритетраэдр (12 + 12)	2 тригонритетраэдра
23	Пентагонритетраэдр (12 + 12 + 6)	2 пентагонритетраэдра + куб
24	Гексатетраэдр (12 + 12 + 12)	2 тригонритетраэдра + тетрагонритетраэдр
25	Тригонтриоктаэдр (24 + 12)	Тетрагонтриоктаэдр + ромбододекаэдр
26	Тетрагонтриоктаэдр (24 + 24)	Тригонтриоктаэдр + тетрагексаэдр
27	Пентагонтриоктаэдр (24 + 24 + 12)	2 пентагонтриоктаэдра + ромбододекаэдр
28	Тетрагексаэдр (24 + 12)	Тетрагонтриоктаэдр + ромбододекаэдр
29	Дидодекаэдр (24 + 12 + 12)	Дидодекаэдр + 2 пентагондодекаэдра
30	Гексоктаэдр (24 + 24 + 24)	Тригонтриоктаэдр + тетрагонтриоктаэдр + тетрагексаэдр

Примечание: после названия исходной з.п.ф. в скобках — числа эквивалентных рёбер.

Note: after name of initial CSF in brackets — numbers of equivalent rib

Рис. 1. Слева: комбинация ромбической призмы, ромбической бипирамиды и пинакоида на топазе (<http://geo.web.ru/druza/m-topaz-F.htm>). Справа: комбинация октаэдра и куба на флюорите (http://geo.web.ru/druza/m-flu_33-pg138.htm)

Fig. 1. Left: combination of rhombic prism, rhombic bipyramid and pinacoid on topaz (<http://geo.web.ru/druza/m-topaz-F.htm>). Right: combination of octahedron and cube on fluorite (http://geo.web.ru/druza/m-flu_33-pg138.htm)

Результатом рёберных усечений для октаэдра и куба является ромбододекаэдр (из теоремы Эйлера следует, что у геометрически дуальных выпуклых полиэдров числа рёбер совпадают, но всегда ли совпадают их рёберные усечения — вопрос не тривиальный), для тригонтриоктаэдра и тетрагексаэдра — комбинация тетрагонтриок-

таэдра и ромбододекаэдра (в классе -43m тетрагонтриоктаэдр замещён комбинацией двух тригонритетраэдров — это ещё один пример гемиздри). Это подчёркивает родство указанных исходных з.п.ф. Продолжение задачи Роме-де-Лиля состоит в перечислении одновременно вершинных и рёберных усечений всех з.п.ф., а также

Рис. 2. Усечения з.п.ф. Номера соответствуют табл. 1 и 2, а — исходная з.п.ф., b — вершинное усечение, c — рёберное усечение. Разными цветами даны грани разных п. ф.
Fig. 2. CSF Truncations. The numbers correspond to Table 1 and 2, a - initial CSF, b - vertex truncation, c — rib truncation. Different colors show faces of different forms

Окончание рис. 2
End of fig. 2

поиске их природных реализаций. Очевидно, теоретическая и практическая кристалломорфология далеко не исчерпала своих ресурсов.

Литература

1. *Шафрановский И. И.* Лекции по кристалломорфологии. М.: Высшая школа, 1968. 174 с.
2. *Шафрановский И. И.* История кристаллографии с древнейших времён до начала XIX столетия. Л.: Наука, 1978. 297 с.
3. *Юшкин Н. П.* История минералогии и эволюция фундаментальных минералогических идей. Препр. 102. Сыктывкар: Ин-т геологии Коми фил. АН СССР, 1984. 52 с.

References

1. *Shafranovsky I. I.* Lektcii po kristallomorfologii (Lectures on crystal morphology). Moscow, Higher School, 1968 174 pp.
2. *Shafranovsky I. I.* Istoriia kristallografii s drevneishikh vremyon do nachala XIX stoletii (History of Crystallography from ancient times to the beginning of XIX century). Leningrad, Nauka, 1978. 297 pp.
3. *Yushkin N. P.* Istoriia mineralogii i evoliutciia fundamentalnykh mineralogicheskikh idei (History of Mineralogy and mineralogical evolution of the fundamental ideas). Preprint. 102. Syktyvkar, Institute of Geology Komi UB USSR AS, 1984, 52 pp.