- сетей массового обслуживания с управлением маршрутизацией // *АиТ*. 2000. № 6. С. 104–113.
4. Митрофанов Ю.И. Метод управления маршрутизацией в замкнутых сетях массового обслуживания // *ТиСУ*. 2002. № 6. С. 86–92.
5. Rumsewicz M., Henderson W. Insensitivity with age-dependent routing // *Adv. Appl. Prob.* 1984. V. 21, № 2. P. 398–408.
6. Miyazawa M. Structure-reversibility and departure functions of queueing networks with batch movements and state dependent routing // *Queueing Networks*. 1997. № 25. P. 45–75.
7. Daskalaki S., Smith J.M. Real-time routing in finite queueing networks // *Queueing Network Blocking: Proc.*

- 1-st Int. Workshop, Raleigh, N.C., 1988. P. 313–324.
8. Towsley D. Queueing network models with state-dependent routing // *J. of ACM*. 1980. V. 27, № 2. P. 323–337.
9. Krzesinski A.E. Multiclass queueing networks with state-dependent routing // *Performance Evaluations*. 1987. V. 7, № 2. P. 125–143.
10. Baskett F., Chandy K.M., Muntz R.R., Palacios F.G. Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers // *J. Assoc. Comput. Mach.* 1975. V. 22. P. 248–260.
11. Лунский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988.

УДК 517.518.85

ФОРМОСОХРАНЯЮЩИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОПЕРЕЧНИКИ ЕДИНИЧНЫХ ШАРОВ В $C[0, 1]$

С.П. Сидоров

Саратовский государственный университет,
кафедра математической экономики
E-mail: SidorovSP@info.sgu.ru

Shape-Preserving Linear n -width of Unit Balls in $C[0, 1]$

S.P. Sidorov

Пусть D^k , k — натуральное или ноль, означает оператор дифференцирования порядка k , определенный в $C^k(X)$, $X = [0, 1]$, и пусть C — конус в $C^k(X)$. Определим линейный относительный n -поперечник множества $A \subset C^k(X)$ в $C(X)$ для D^k с ограничением C следующим образом: $\delta_n^k(A, C)_{C(X)} := \inf_{L_n(C) \subset C} \sup_{f \in A} \|D^k f - D^k L_n f\|_{C(X)}$. В настоящей статье находятся оценки линейных относительных n -поперечников шаров в $C(X)$ для D^k с ограничением $C = \{f \in C^k(X) : D^k f \geq 0\}$.

Let D^k , k is a natural number or zero, be the k -th differential operator, defined in $C^k(X)$, $X = [0, 1]$, and let C be a cone in $C^k(X)$. Let us denote $\delta_n^k(A, C)_{C(X)} := \inf_{L_n(C) \subset C} \sup_{f \in A} \|D^k f - D^k L_n f\|_{C(X)}$ linear relative n -width of set $A \subset C^k(X)$ in $C(X)$ for D^k with constraint C . In this paper we estimate linear relative n -width of some balls in $C(X)$ for D^k with constraint $C = \{f \in C^k(X) : D^k f \geq 0\}$.

ВВЕДЕНИЕ

Для многих прикладных задач теории приближений зачастую необходимо не просто аппроксимировать некоторую функцию, а приблизить ее с сохранением некоторых ее свойств, связанных с формой функции (положительность, монотонность, выпуклость и т.п.).

Интерес к данной проблематике впервые возник в конце 60-х годов, когда появились работы О. Шиша [1], Г.Г. Лоренца и К.Л. Целлера [2]. Они дали толчок работам Р. ДеВора по монотонному приближению и работам А. С. Шведова [3], Д. Ньюмана [4], Р. Битсона и Д. Левиатана [5] по комонотонной аппроксимации в 70 и 80-е годы.

Пусть F — линейное нормированное пространство, A и C есть непустые подмножества F . Тогда относительным n -поперечником по Колмогорову множества A в F с ограничением C называется величина $d_n(A, C)_F = \inf_{F_n} E(A, F_n \cap C) = \inf_{F_n} \sup_{f \in A} \inf_{g \in F_n \cap C} \|f - g\|_F$, где левый инфимум ищется среди всех n -мерных линейных многообразий F_n пространства F , таких, что $F_n \cap C \neq \emptyset$. Если $C = F$, то $d_n(A)_F = d_n(A, F)_F$ есть n -поперечник по Колмогорову множества A в F [6].

Впервые понятие относительного поперечника было введено В. Н. Коноваловым в 1984 году [7]. Оценки величин $d_n(A, C)_F$ получены для некоторых конкретных A , C и F в работе [8].

Пусть L есть некоторый линейный оператор, определенный в F , со значениями в F и C — некоторый конус в F , $C \neq \emptyset$. Будем говорить, что оператор обладает свойством формосохранения относительно конуса C , если $L(C) \subset C$.

Пусть F — линейное нормированное пространство и $A \subset F$, $C \subset F$. Линейный оператор L_n , отображающий F в линейное пространство конечной размерности n , называется оператором конечного ранга n .

Линейным относительным n -поперечником множества A в F с ограничением C назовем величину $\delta_n(A, C)_F = \inf_{L_n(C) \subset C} \sup_{f \in A} \|f - L_n f\|_F$, где инфимум ищется среди всех непрерывных линейных

операторов $L_n : F \rightarrow F$ конечного ранга n таких, что $L_n(C) \subset C$. Если $C = F$, то $\delta_n(A)_F = \delta_n(A, F)_F$ есть линейный n -поперечник, по Колмогорову, множества A в F [9].

Зная величину линейного относительного поперечника $\delta_n(A, C)_F$, можно судить о том, насколько хорош или плох (в смысле оптимальности) тот или иной конечномерный метод L_n , обладающий свойством формосохранения $L_n(C) \subset C$.

Пусть $C^k(X)$, $k \geq 0$, есть пространство действительно значных и k -раз непрерывно дифференцируемых функций на $X = [0, 1]$, D^i означает оператор дифференцирования i -го порядка, $\sigma = (\sigma_i)_{i \geq 0}$ — последовательность с $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$, и h, k — два целых числа таких, что $0 \leq h < k$ и $\sigma_h \cdot \sigma_k \neq 0$.

Следуя [10], рассмотрим конуса функций $C_{h,k}(\sigma)$, производные некоторых порядков которых имеют фиксированный знак на X : $C_{h,k}(\sigma) := \{f \in C^k(X) : \sigma_i \cdot D^i f \geq 0, i = h, \dots, k\}$.

Определим линейный относительный n -поперечник множества $A \subset C^k(X)$ в $C(X)$ для D^k с ограничением C следующим образом: $\delta_n^k(A, C)_{C(X)} := \inf_{L_n(C) \subset C} \sup_{f \in A} \|D^k f - D^k L_n f\|_{C(X)}$, где инфимум ищется среди всех непрерывных линейных операторов $L_n : C^k(X) \rightarrow C^k(X)$ конечного ранга n , таких, что $L_n(C) \subset C$. Если $k = 0$, то D^0 есть тождественный оператор, $D^0 = I$, и $\delta_n^0(A, C)_{C(X)}$ есть линейный относительный n -поперечник множества $A \subset C(X)$ в $C(X)$ с ограничением C .

В настоящей статье находятся оценки линейных относительных n -поперечников шаров в $C(X)$ для D^k с ограничением $C_{k,k}(\sigma)$.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим $B(X)$ — пространство действительных ограниченных функций с нормой

$$\|f\|_{B(X)} = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Лемма 1. Пусть $\Phi : C^k(X) \rightarrow \mathbb{R}$ есть линейный функционал, обладающий свойством: $\Phi(f) \geq 0$ для всякой $f \in C^k(X)$, такой, что $D^k f \geq 0$. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle : C^k(X) \times C^k(X) \rightarrow \mathbb{R}$ есть бифункционал, порожденный функционалом Φ следующим образом: для произвольных $f, g \in C^k(X)$ полагаем $\langle f, g \rangle = \Phi(h)$, где $h \in C^k(X)$, таково, что $D^k h = D^k f D^k g$ и $D^i h(0) = 0$, $i = 0, 1, \dots, k-1$. Тогда

$$|\langle f, g \rangle| \leq [\langle f, f \rangle]^{\frac{1}{2}} [\langle g, g \rangle]^{\frac{1}{2}}, \quad f, g \in C^k(X). \quad (1)$$

Доказательство. Из линейности функционала Φ следует, что бифункционал $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обладает свойством билинейности. Очевидно, что $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ и $\langle f, f \rangle \geq 0$, $f, g \in C^k(X)$. Значит, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ есть скалярное произведение.

Имеем $0 \leq \langle f + cg, f + cg \rangle = \langle f, f \rangle + 2c \langle f, g \rangle + c^2 \langle g, g \rangle$ для всех $c \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^k(X)$. Если взять $c = -\langle f, g \rangle / \langle g, g \rangle$, то получим (??). $\square$

Положим $g_x = \frac{2}{(k+2)!} e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!} x e_{k+1} + \frac{1}{k!} x^2 e_k$. Справедливо следующее утверждение [11].

Лемма 2. Пусть $L_n : C^k(X) \rightarrow C^k(X)$ — линейный оператор конечного ранга n , $n > k + 2$, такой, что $D^k L_n e_k = D^k e_k$ и

$$L_n(C_{k,k}(\sigma)) \subset C_{k,k}(\sigma). \quad (2)$$

Тогда

$$\sup_{x \in X} |D^k L_n g_x(x)| \geq \frac{1}{4n^2}. \quad (3)$$

Следующий пример [11] показывает, что оценку (??) невозможно улучшить.

Лемма 3. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $n > k + 2$ и $\Lambda_{k,n} : C^k(X) \rightarrow C^k(X)$ есть линейный оператор, определенный следующим образом:

$$\Lambda_{k,n} f(x) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!} x^l \left(D^l f(0) + \frac{(-1)^{k+1-l}}{(k+1-l)!(n-1)^{k-l}} D^k f(0) \right) + \\ \quad + \frac{1}{(k+1)!(n-1)^k} \left[((n-1)x)^{k+1} D^k f\left(\frac{1}{n-1}\right) + \right. \\ \quad \left. + (-1)^k (1 - (n-1)x)^{k+1} D^k f(0) \right], \\ \quad \text{если } x \in [0, \frac{1}{n-1}], \\ \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!} \left(x - \frac{i}{n-1}\right)^l \left(D^l \Lambda_{k,n} f\left(\frac{i}{n-1}\right) + \frac{(-1)^{k+1-l}}{(k+1-l)!(n-1)^{k-l}} D^k f\left(\frac{i}{n-1}\right) \right) + \\ \quad + \frac{1}{(k+1)!(n-1)^k} \left[((n-1)x - i)^{k+1} D^k f\left(\frac{i+1}{n-1}\right) + \right. \\ \quad \left. + (-1)^k (i+1 - (n-1)x)^{k+1} D^k f\left(\frac{i}{n-1}\right) \right], \\ \quad \text{если } x \in \left(\frac{i}{n-1}, \frac{i+1}{n-1}\right], \quad i = 1, 2, \dots, n-2. \end{cases} \quad (4)$$

Тогда: 1) $D^k \Lambda_{k,n} e_j = D^k e_j$, $j = 0, 1, \dots, k+1$; 2) $\frac{2}{(k+2)!} \|D^k \Lambda_{k,n} e_{k+2} - D^k e_{k+2}\| = \frac{1}{4(n-1)^2}$; 3) $\Lambda_{k,n}(C_{k,k}(\sigma)) \subset C_{k,k}(\sigma)$.

Таким образом,

$$\frac{1}{4n^2} \leq \inf_{L_n} \sup_{x \in X} |D^k L_n g_x(x)| \leq \frac{1}{4(n-1)^2}, \quad (5)$$

где инфимум ищется среди всех линейных операторов $L_n : C^k(X) \rightarrow B^k(X)$ конечного ранга n , таких, что $L_n(C_{k,k}(\sigma)) \subset C_{k,k}(\sigma)$ и $D^k L_n e_i = D^k e_i$, $i = 0, 1, \dots, k+1$.

В следующей лемме мы отказываемся от условия $D^k L_n e_k = D^k e_k$.

Лемма 4. Пусть $L_n : C^k(X) \rightarrow C^k(X)$ — линейный оператор конечного ранга n , $n > k+2$, такой, что

$$L_n(C_{k,k}(\sigma)) \subset C_{k,k}(\sigma). \quad (6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} \left(\frac{2}{(k+2)!} |D^k L_n e_{k+2}(x) - D^k e_{k+2}(x)| + \frac{2}{(k+1)!} |D^k L_n e_{k+1}(x) - D^k e_{k+1}(x)| + \right. \\ \left. + \frac{1}{k!} |D^k L_n e_k(x) - D^k e_k(x)| \right) \geq \frac{1}{4n^2} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Доказательство. Используя идеи [12], покажем, что

$$\sup_{x \in X} |D^k L_n g_x(x)| \geq \frac{1}{4n^2} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right). \quad (8)$$

Существует [11] функция $h \in C^k(X)$, $D^k h \in Lip_{2n} 1$, $\|D^k h\|_{C(X)} = 1$, такая, что

$$\|D^k L_n h - D^k h\|_{B(X)} \geq 1. \quad (9)$$

Для $x \in X$ имеем

$$\begin{aligned} |D^k L_n h(x) - D^k h(x)| &= \\ &= \left| D^k L_n h(x) - D^k h(x) \frac{1}{k!} D^k L_n e_k(x) + D^k h(x) \frac{1}{k!} D^k L_n e_k(x) - D^k h(x) \frac{1}{k!} D^k e_k(x) \right| \leq \\ &\leq \left| D^k L_n \left(h - D^k h(x) \frac{1}{k!} e_k \right)(x) \right| + \frac{1}{k!} |D^k h(x)| |D^k L_n e_k(x) - D^k e_k(x)|. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть $p_x \in C^k(X)$ такова, что $D^k p_x = \left| D^k \left(h - D^k h(x) \frac{1}{k!} e_k \right) \right|$, $D^i p_x(0) = 0$, $i = 0, 1, \dots, k-1$.

Имеем $D^k(h - D^k h(x) \frac{1}{k!} e_k) \leq D^k p_x$ и $D^k(-h + D^k h(x) \frac{1}{k!} e_k) \leq D^k p_x$.

Значит,

$$D^k L_n(h - D^k h(x) \frac{1}{k!} e_k)(x) \leq D^k L_n p_x(x) \quad (11)$$

и

$$-D^k L_n(h - D^k h(x) \frac{1}{k!} e_k)(x) \leq D^k L_n p_x(x). \quad (12)$$

Из (??) и (??) получаем

$$\left| D^k L_n \left(h - D^k h(x) \frac{1}{k!} e_k \right)(x) \right| \leq D^k L_n p_x(x). \quad (13)$$

Пусть $q_x \in C^k(X)$ такова, что $D^k q_x(t) = |t - x|$ и $D^i q_x(0) = 0$, $i = 0, 1, \dots, k-1$.

Имеем

$$D^k p_x(t) = \left| D^k \left(h(t) - D^k h(x) \frac{1}{k!} t^k \right) \right| = |D^k h(t) - D^k h(x)| \leq 2n|t - x| = 2n D^k q_x(t).$$

Значит, $D^k(2n q_x - p_x) \geq 0$, и, следовательно, $D^k L_n(2n q_x - p_x)(x) \geq 0$, и

$$D^k L_n p_x(x) \leq 2n D^k L_n q_x(x). \quad (14)$$

Из леммы ?? следует, что

$$D^k L_n g_x(x) \leq [D^k L_n g_x(x)]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{k!} D^k L_n e_k(x) \right]^{\frac{1}{2}} \leq [D^k L_n g_x(x)]^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{k!} |D^k L_n e_k(x) - D^k e_k(x)| \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Имеем

$$\begin{aligned} D^k L_n g_x(x) &= \frac{2}{(k+2)!} (D^k L_n e_{k+2} - D^k e_{k+2})(x) - \frac{2}{(k+1)!} x (D^k L_n e_{k+1} - D^k e_{k+1})(x) + \\ &+ \frac{1}{k!} x^2 (D^k L_n e_k - D^k e_k)(x) + \frac{2}{(k+2)!} D^k e_{k+2}(x) - \frac{2}{(k+1)!} x D^k e_{k+1}(x) + \frac{1}{k!} x^2 D^k e_k(x) \leq \\ &\leq \frac{2}{(k+2)!} |D^k L_n e_{k+2}(x) - D^k e_{k+2}(x)| + \frac{2}{(k+1)!} |D^k L_n e_{k+1}(x) - D^k e_{k+1}(x)| + \\ &+ \frac{1}{k!} |D^k L_n e_k(x) - D^k e_k(x)|. \end{aligned} \quad (16)$$

Рассмотрим случай $\frac{1}{k!} \|D^k L_n e_0 - D^k e_0\|_{C(X)} \leq \frac{1}{4n^2}$.

Тогда из (??), (??), (??), (??) следует

$$1 - \frac{1}{k!} \|D^k L_n e_k - D^k e_k\|_{C(X)} \leq 2n \left(\sup_{x \in X} D^k L_n g_x(x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{4n^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Так как обе части неравенства положительны, имеем

$$\frac{(1 - \frac{1}{4n^2})^2}{1 + \frac{1}{4n^2}} \leq 4n^2 \sup_{x \in X} D^k L_n g_x(x).$$

Так как при $n \geq 2$

$$\frac{(1 - \frac{1}{4n^2})^2}{1 + \frac{1}{4n^2}} \geq 1 - \frac{1}{n^2},$$

получаем (??). Тогда из (??) следует (??). Если же $\frac{1}{k!} \|D^k L_n e_0 - D^k e_0\|_{C(X)} \geq \frac{1}{4n^2}$, то (??) тем более выполняется. $\square$

2. ОЦЕНКА ЛИНЕЙНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПОПЕРЕЧНИКОВ

Пусть k — натуральное или равное нулю число. Обозначим

$$P_k = \left\{ p = \sum_{r=0}^k a_r e_r : a_r \in \mathbb{R}, r = 0, 1, \dots, k \right\},$$

множество всех алгебраических полиномов степени не выше k , и пусть

$$P_k^* = \left\{ p = \sum_{r=0}^k a_r e_r : |a_r| \leq 1, r = 0, 1, \dots, k \right\}.$$

Пусть $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Обозначим $B^{(m)}(X) := \{f \in C^{(m)}(X) : \|D^m f\|_{C(X)} \leq 1\}$.

Теорема 1. Справедлива следующая оценка линейного относительного поперечника множества $P_{k+2} \cap B^{(k+2)}(X)$ в $C(X)$ для D^k с ограничением $C_{k,k}(\sigma)$

$$\frac{1}{4(k+2)!n^2} \leq \delta_n^k \left(P_{k+2} \cap B^{(k+2)}(X), C_{k,k}(\sigma) \right)_{C(X)} \leq \frac{1}{4(k+2)!(n-1)^2}. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq m \leq k+2$, $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Обозначим

$$R_{k+3}^{(m)}(c) := \{a = (a_0, \dots, a_{k+2}) \in \mathbb{R}^{k+3} : |a_m| \leq c\}.$$

Обозначим $\mathbb{L}_{n,k}$ как множество всех линейных операторов $L_n : C^k(X) \rightarrow B^k(X)$ конечного ранга n таких, что $L_n(C_{k,k}(\sigma)) \subset C_{k,k}(\sigma)$, $\mathbb{L}_{n,k}^*$ — множество всех линейных операторов $L_n : C^k(X) \rightarrow B^k(X)$ конечного ранга n таких, что $L_n(C_{k,k}(\sigma)) \subset C_{k,k}(\sigma)$ и $D^k L_n e_i = D^k e_i$, $i = 0, 1, \dots, k+1$.

Имеем

$$\begin{aligned}
\delta_n^k \left(P_{k+2} \cap B^{(k+2)}(X), C_{k,k}(\sigma) \right)_{C(X)} &= \inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}} \sup_{p \in P_{k+2} \cap B^{(k+2)}(X)} \|D^k p - D^k L_n p\| = \\
&= \inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}} \sup_{p \in P_{k+2} \cap B^{(k+2)}(X)} \sup_{x \in X} |D^k p(x) - D^k L_n p(x)| = \\
&= \inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}} \sup_{x \in X} \sup_{a \in R_{k+2}^{(k+2)}\left(\frac{1}{(k+2)!}\right)} \left| \sum_{r=0}^{k+2} a_r (D^k e_r(x) - D^k L_n e_r(x)) \right| = \\
&= \inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}} \sup_{x \in X} \sup_{a \in R_{k+2}^{(k+2)}\left(\frac{1}{(k+2)!}\right)} \sum_{r=0}^{k+2} |a_r| |D^k e_r(x) - D^k L_n e_r(x)| = \\
&= \frac{1}{(k+2)!} \inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}^*} \sup_{x \in X} |D^k e_{k+2} - D^{k+2} L_n e_{k+2}(x)|.
\end{aligned}$$

Заметим, что если $L_n \in \mathbb{L}_{n,k}^*$, то

$$|D^k e_{k+2} - D^k L_n e_{k+2}(x)| = D^k L_n g_x(x),$$

где

$$g_x = \frac{2}{(k+2)!} e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!} x e_{k+1} + \frac{1}{k!} x^2 e_k.$$

Тогда из (??) получаем утверждение теоремы. $\square$

Заметим, что если $\sigma_0 = 1$, то $C_{0,0}(\sigma)$ есть конус неотрицательных непрерывных на X функций, и обозначим $C_+ := \{f \in C(X) : f \geq 0\}$.

Следствие 1. Справедлива следующая оценка линейного относительного поперечника множества $P_2 \cap B^{(2)}(X)$ с ограничением C_+

$$\frac{1}{8n^2} \leq \delta_n \left(P_2 \cap B^{(2)}(X), C_+ \right)_{C(X)} \leq \frac{1}{8(n-1)^2}. \quad (19)$$

Теорема 2. Справедлива следующая оценка линейного относительного поперечника множества $P_{k+2} \cap B^{(k)}(X)$ в $C(X)$ для D^k с ограничением $C_{k,k}(\sigma)$

$$\delta_n^k \left(P_{k+2} \cap B^{(k)}(X), C_{k,k}(\sigma) \right)_{C(X)} \asymp \frac{1}{n^2}. \quad (20)$$

Доказательство. Заметим, что $\frac{1}{k+3} P_{k+2}^* \subset P_{k+2} \cap B^{(k)}(X)$, и, следовательно,

$$\begin{aligned}
\inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}} \sup_{p \in P_{k+2} \cap B^{(k)}(X)} \|D^k p - D^k L_n p\|_{C(X)} &\geq \frac{1}{k+3} \inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}} \sup_{p \in P_{k+2}^*} \|D^k p - D^k L_n p\|_{C(X)} = \\
&= \frac{1}{k+3} \inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}} \sup_{p \in P_{k+2}^*} \sup_{x \in X} |D^k p(x) - D^k L_n p(x)| = \\
&= \frac{1}{k+3} \inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}} \sup_{x \in X} \sup_{|a_r| \leq 1, r=0, \dots, k+2} \sum_{r=0}^{k+2} |a_r| |D^k e_r(x) - D^k L_n e_r(x)| = \\
&= \frac{1}{k+3} \inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}} \sup_{x \in X} \sum_{r=0}^{k+2} |D^k e_r(x) - D^k L_n e_r(x)|.
\end{aligned} \quad (21)$$

Утверждение теоремы следует из леммы ?? и свойств оператора M_n . $\square$

Следствие 2. Справедлива следующая оценка линейного относительного поперечника множества $P_2 \cap B^{(0)}(X)$ с ограничением C_+ :

$$\delta_n(P_2 \cap B^{(0)}(X), C_+)_{C(X)} \asymp \frac{1}{n^2}, \quad (22)$$

где $B^{(0)}(X) := \{f \in C(X) : \|f\|_{C(X)} \leq 1\}$

Теорема 3. Справедлива следующая оценка линейного относительного поперечника множества $B^{(k+2)}(X)$ для D^k с ограничением $C_{k,k}(\sigma)$

$$\delta_n^k(B^{(k+2)}(X), C_{k,k}(\sigma))_{C(X)} \asymp \frac{1}{n^2}. \quad (23)$$

Доказательство.

Так как $P_{k+2} \cap B^{(k+2)}(X) \subset B^{(k+2)}(X)$, то

$$\delta_n(P_{k+2} \cap B^{(k+2)}(X), C_{k,k}(\sigma))_{C(X)} = \delta_n^k(B^{(k+2)}(X), C_{k,k}(\sigma))_{C(X)}. \quad (24)$$

С другой стороны, пусть $f \in B^{(k+2)}(X)$. Тогда для $t \in X$ имеем

$$f(t) = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{D^r f(x)}{r!} (t-x)^r + \frac{D^{k+2} f(\xi)}{(k+2)!} (t-x)^{k+2},$$

где $\xi \in X$, $\|D^{k+2} f\| \leq 1$. Имеем

$$\sup_{x \in X} |D^k f(x) - D^k \Lambda_{k,n} f(x)| \leq \frac{1}{8(n-1)^2},$$

где $\Lambda_{k,n}$ есть линейный оператор, определенный ???. □

Следствие 3. Справедлива следующая оценка линейного относительного поперечника множества $B^{(2)}(X)$ с ограничением C_+

$$\delta_n(B^{(2)}(X), C_+)_{C(X)} \asymp \frac{1}{n^2}. \quad (25)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Известно [13], что для многих F , A имеет место равенство $\delta_n(A)_X = d_n(A)_F$, в частности

$$\delta_n(P_k \cap B^{(0)}(X))_{C(X)} = d_n(P_k \cap B^{(0)}(X))_{C(X)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\delta_n(P_k \cap B^{(0)}(X))_{C(X)} = d_n(P_k \cap B^{(0)}(X))_{C(X)} \neq 0, \quad k = n, \dots$$

Пусть F есть линейное нормированное пространство и $A \subset F$, $C \subset F$. Тогда

$$\delta_n(A, C)_F \geq d_n(A, C)_F,$$

то есть одним из методов оценки линейного относительного поперечника $\delta_n(A, C)_F$ снизу может служить вычисление соответствующего нелинейного относительного поперечника $d_n(A, C)_F$. Тем не менее величины $\delta_n(A, C)_F$ и $d_n(A, C)_F$ не равны между собой даже для достаточно простых A и C в $F = C(X)$.

Действительно, из следствий ???, ?? следует справедливость соотношений

$$\delta_n(P_k \cap B^{(0)}(X), C_+)_{C(X)} = 0, \quad k = 0, 1; \quad \delta_n(P_k \cap B^{(0)}(X), C_+)_{C(X)} \neq 0, \quad k = 2, 3, \dots$$

Пусть $n \geq k$ и $p \in P_k \cap C_+$. Тогда

$$\inf_{g \in P_n \cap C_+} \|p - g\|_{C(X)} = \|p - g^*\|_{C(X)} = 0,$$

где $g^* = p$. Значит,

$$d_n(P_k \cap B^{(0)}(X), C_+)_{C(X)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$d_n(P_k \cap B^{(0)}(X), C_+)_{C(X)} \neq 0, \quad k = n, n+1, \dots$$

Таким образом, поведение относительных (линейных и нелинейных) поперечников значительно отличается от поведения поперечников по Колмогорову даже для конуса C_+ и множества алгебраических многочленов с ограниченной в $C(X)$ нормой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 06-01-0003, 07-01-00167)

Библиографический список

1. Shisha O. Monotone approximation // Pacific J. Math. 1965. V. 15, № 2. P. 667–671.
2. Lorentz G., Zeller K. Monotone approximation by algebraic polynomials // Trans. Amer. Soc. 1970. V. 149, № 1. P. 1–18.
3. Шведов А. Комонотонная полиномиальная аппроксимация функций // Докл. Акад. наук СССР. 1980. Т. 250, № 1. С. 39–42.
4. Newman D.J. Efficient comonotone approximation // J. Approx. Theory. 1979. V. 25. P. 189–192.
5. Beatson R.K., Leviatan D. On comonotone approximation // Canad. Math. Bull. 1983. V. 26. P. 220–224.
6. Kolmogorov A.N. Über die beste annäherung von funktionen einer gegebenen funktionklassen // Ann. of Math. 1936. V. 37. P. 107–110.
7. Коновалов В.Н. Оценки диаметров типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. 1984. V. 35. P. 369–380.
8. Konovalov V.N., Leviatan D. Shape-preserving widths of weighted Sobolev-type classes of positive, monotone and convex functions on finite interval // Constr. Approx. 2002. V. 19, № 1. P. 23–58.
9. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 81–120.
10. F.J. Muñoz Delgado V. Ramírez-González D. C.-M. Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation // J. of Approx. Theory. 1998. V. 98. P. 23–58.
11. Sidorov S.P. On the order of approximation by linear shape preserving operators of finite rank // East J. on Approx. 2001. V. 7, № 1. P. 1–8.
12. Виденский В.С. Об одном точном неравенстве для линейных положительных операторов конечного ранга // Докл. АН ТаджССР. 1981. Т. 24, № 12. С. 715–717.
13. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.

УДК 517.51

УСЛОВИЯ БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ СЖАТИЙ И СДВИГОВ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p[0, 1]$

П.А. Терехин

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: terekhinpa@info.sgu.ru

Рассматривается система сжатий и сдвигов функции (или семейство функций-всплесков на отрезке) в пространствах Лебега. Указан явный вид биортогонально сопряженной системы. Установлена теорема равносходимости биортогонального ряда по системе всплесков и ряда Фурье–Хаара.

Basis Conditions for Systems of Translates and Dilates of Functions in L_p -Spaces

P.A. Terekhin

We consider a family of translates and dilates of function (or in other words family of wavelets on finite interval) in Lebesgue spaces. The explicit expressions for biorthogonal family are given. The theorem of equiconvergence for biorthogonal wavelets series and Fourier–Haar series is established.

Пусть $p \in [1, \infty)$ и функция $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условиям:

$$\text{supp } \varphi \subset [0, 1], \quad \varphi \in L_p[0, 1], \quad \int_0^1 \varphi(t) dt = 0.$$

Системой сжатий и сдвигов функции φ называется система функций

$$\varphi_0(t) = 1, \quad \varphi_n(t) = \varphi_{k,j}(t) = 2^{k/2} \varphi(2^k t - j),$$

где $n = 2^k + j$, $k \geq 0$, $0 \leq j \leq 2^k - 1$. Для функции

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2), \\ -1, & t \in [1/2, 1), \end{cases}$$

система сжатий и сдвигов $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ является системой Хаара. Известно, что система Хаара образует базис пространства $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$. В данной работе решается следующая задача: найти условия на порождающую функцию φ , при выполнении которых система сжатий и сдвигов $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ этой функции образует базис пространства $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$.

Определим классы функций $\Phi_p(\psi, \Lambda)$, в терминах которых решается поставленная задача. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность неотрицательных чисел и $\psi \in L_p[0, 1]$ — некоторая функция, система сжатий и сдвигов которой образует базис пространства $L_p[0, 1]$ (например, функция