УДК 517.9

СИНХРОНИЗАЦИЯ АВТОГЕНЕРАТОРОВ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧЕРЕЗ МЕМРИСТОР

И. А. Корнеев, О. Г. Шабалина, В. В. Семенов, Т. Е. Вадивасова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

E-mail: ivankorneew@yandex.ru, shabalinaog96@gmail.com,

semenov_v_v@list.ru, vadivasovate@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.02.2018

Цель. Целью работы является исследование взаимной синхронизации двух периодических автогенераторов с расстройкой частот, взаимодействующих через мемристор. Предполагается дать ответ на вопрос о возможности синхронизации в этом случае и об ее предполагаемых особенностях. **Метод.** Исследование проводится методами теоретического анализа и компьютерного моделирования колебаний в системе двух генераторов ван дер Поля, взаимодействующих через мемристивную проводимость. В качестве последнего используется идеализированный мемристор Чуа. **Результаты.** Показано, что в системе имеется линия, состоящая из точек равновесия. Это приводит к особенностям синхронизации. Эффект фазового захвата и границы области синхронизации при вариации параметров зависят от начальных условий. Малое возмущение уравнения, описывающего динамику переменной, управляющей мемристором, приводит к исчезновению линии равновесия и устраняет зависимость синхронизации от начальных условий. **Обсуждение.** В математической модели автогенераторов с мемристивной связью синхронизация обладает существенными особенностями. Однако модель не является грубой и в реальной системе указанные особенности должны исчезнуть. В этом случае следствием мемристивной связи могут быть длительные переходные процессы, зависящие от начального состояния системы.

Ключевые слова: мемристор, автогенератор, синхронизация, захват фазы, линия равновесия.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-24-40

Образец цитирования: Корнеев И.А., Шабалина О.Г., Семенов В.В., Вадивасова Т.Е. Синхронизация автогенераторов, взаимодействующих через мемристор // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 2. С. 24–40. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-24-40

SYNCHRONIZATION SELF-SUSTAINED OSCILLATORS INTERACTING THROUGH THE MEMRISTOR

I. A. Korneev, O. G. Shabalina, V. V. Semenov, T. E. Vadivasova

Saratov State University
83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia
E-mail: ivankorneew@yandex.ru, shabalinaog96@gmail.com,
semenov_v_v@list.ru, vadivasovate@yandex.ru
Received 13.02.2018

Aim. The aim of the paper is to study the mutual synchronization of two periodic self-sustained oscillators with a detuning of frequencies interacting through a memristor. It is supposed to give an answer to the question of the possibility of synchronization in this case and of its probable features. **Method.** The study is carried out by methods of theoretical analysis and computer simulation of oscillations in a system of two van der Pol oscillators interacting through a memristive conductivity. As the latter, an idealized Chua memristor is used. **Results.** It is shown that there is a line in the system phase space consisting of equilibrium points. This leads to specific properties of a synchronization. The phase-locking effect and the boundaries of the synchronization region with variation of the parameters depend on the initial conditions. A small perturbation of the equation describing the dynamics of the variable controlling the memristor leads to the disappearance of the equilibrium line and eliminates the dependence of the synchronization on the initial conditions. **Discussion.** In the mathematical model of self-sustained oscillators with a memristive connection, synchronization has essential features. However, the mathematical model is not rough, and in the real system these features should disappear. In this case, the consequence of the memristive connection can be long transient processes, depending on the initial state of the system.

Key words: memristor, self-sustained oscillator, synchronization, phase-locking, line of equilibria.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-24-40

References: Korneev I.A., Shabalina O.G., Semenov V.V., Vadivasova T.E. Synchronization self-sustained oscillators interacting through the memristor. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 2, pp. 24–40. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-24-40

Введение

Последние годы все больший интерес привлекает радиотехнический элемент «мемристор». Впервые концепция мемристора была предложена Леоном Чуа в 1971 году [1]. Согласно идее Чуа, мемристор представляет собой пассивный двухполюсник, в котором реализуется взаимосвязь магнитного потока Φ и электрического заряда q . Используя соотношения $d\Phi = udt$ и $dq = idt$, можно получить вольт-амперную характеристику двухполюсника в виде $u = R_M(q)i$, где $R_M(q) = d\Phi/dq = \Phi' -$ сопротивление мемристора (мемристанс), которое определяется значением заряда. Учитывая, что $q(t) = \int_{-\infty}^t i(t)dt$, получаем

$$R_M(q) = \Phi' \left(\int_{-\infty}^t i(t)dt \right). \quad (1)$$

Аналогично можно записать: $i = G_M(\Phi)u$, где $G_M(\Phi) = dq/d\Phi = q'(\Phi)$ – проводи-

мость мемристора, управляемая магнитным потоком и зависящая от предшествующих значений,

$$G_M(\Phi) = q' \left(\int_{-\infty}^t u(t) dt \right). \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует фундаментальное свойство мемристора: *зависимость характеристик от предыстории функционирования*. В дальнейшем Чуа расширил идею мемристора до концепции мемристивных систем [2], в которой объединил системы различной физической природы, демонстрирующие зависимость свойств от состояний в предыдущие моменты времени. Важно отметить, что первоначальная идея мемристора предполагала взаимозависимость электрического заряда и магнитного потока. С течением времени мемристором стали называть двухполюсник, который относится к классу мемристивных систем, и сопротивление (проводимость) которого зависит от предшествующих состояний. Данное определение не содержит в себе гипотезу о взаимосвязи электрического заряда и магнитного потока, которая представляется спорной и вызвала серьезную критику в научном сообществе.

Всплеск интереса к тематике мемристора произошел в 2008 году, когда было объявлено, что первое реальное устройство, обладающее свойствами мемристора, создано [3]. На сегодняшний день имеется уже много публикаций, посвященных экспериментальным исследованиям и численному моделированию свойств полупроводниковых мемристоров (см., например, [4–8]), а также мемристоров иной природы [9–14]. Интерес к мемристорам связан с перспективой использования в электронике и вычислительной технике, в частности для создания элементов памяти [15–21]. В связи с этим важной оказывается проблема исследования поведения различных радиотехнических цепей и систем, содержащих мемристоры. Можно отметить ряд исследований в этом направлении (например, работы [22–30]), однако в целом данная проблема еще слабо изучена. Не всегда ясно, к какому типу динамики, и каким новым эффектам может привести замена обычного резистора с постоянным сопротивлением на мемристор.

Особенностью математических моделей систем, содержащих мемристор, является возможность существования так называемых линий равновесия, то есть некоторых линий в фазовом пространстве системы, все точки которых являются точками равновесия. Содержащие мемристор колебательные системы с линией равновесия исследовались в [23, 24, 28–30]. Динамика таких систем носит особый характер. При определенном выборе параметров в зависимости от начальных условий, можно наблюдать как множество устойчивых точек равновесия, так и множество неизолированных замкнутых кривых различного размера. Всё множество этих траекторий образует аттрактор системы, который состоит из некоторой двумерной поверхности и притягивающих участков линии равновесия. Траектории на аттракторах подобного типа не обладают свойством эргодичности и, в некотором смысле, можно говорить о скрытом аттракторе. Действительно, при заданных начальных условиях можно наблюдать только одну траекторию, не несущую информации обо всем аттракторе, так что аттрактор в целом остается скрытым.

Перспективы использования мемристоров в качестве элементов памяти предполагает создание сложных многокомпонентных систем, содержащих мемристивные элементы. Кроме того, ансамбли мемристивных элементов вызывают большой интерес в области нейродинамики, поскольку могут служить моделями нейронных

систем. Имеется ряд работ, в которых мемристивные системы применяются для моделирования нейронов и нейронных ансамблей, рассматривается синхронизация и формирование сложных пространственных структур в ансамблях таких элементов [31–36].

В отдельную задачу можно выделить исследование особенностей взаимодействия автоколебательных систем через мемристивный элемент. При этом, предполагается, что сами взаимодействующие системы не содержат мемристоров. В связи с данной задачей можно отметить лишь несколько работ. Так в [37, 38] исследовался эффект полной синхронизации двух идентичных хаотических генераторов Чуа, связанных через мемристивный элемент или адаптивное устройство на основе двух антипараллельных мемристоров и был установлен факт синхронизации хаоса. В [38] отмечается эффект зависимости достижения полной хаотической синхронизации от начальных условий и параметров мемристора. В работе [39] экспериментально исследовалась частотная синхронизация двух генераторов ван дер Поля, взаимодействующих через мемристивное устройство. На основании представленных данных можно говорить о наличии эффекта частотного захвата, но невозможно сделать выводы об особенностях данного эффекта по сравнению с классическим случаем взаимной синхронизации при связи через обычное сопротивление. Кроме того, не вполне ясна математическая модель мемристивного устройства, примененного в экспериментах. Таким образом, проблема исследования взаимной синхронизации автогенераторов, взаимодействующих через мемристивный элемент, пока еще далека от полного решения.

Целью нашей работы является исследование взаимной синхронизации периодических автоколебаний двух автогенераторов ван дер Поля с частотной расстройкой, взаимодействующих через мемристивный элемент. Предполагается дать ответ на следующие вопросы:

- 1) возможна ли частотная синхронизация автоколебаний в случае связи через простейшую модель мемристора – мемристивный элемент Чуа;
- 2) если синхронизация при связи через мемристивный элемент возможна, то каковы ее отличительные особенности по сравнению со случаем простой резистивной связи парциальных систем.

1. Математическая модель исследуемой системы

Рассмотрим систему двух автогенераторов ван дер Поля, связанных через мемристивную проводимость. Эквивалентная схема исследуемой радиотехнической цепи приведена на рис. 1. Каждый парциальный автогенератор состоит из параллельно соединенных емкости C_j , индуктивности L_j , постоянной проводимости g_j и нелинейной отрицательной проводимости N_j , где $j=1, 2$ – номер парциального генератора. $G_M(\Phi)$ – характеристика мемристивного элемента, представляющая собой зависимость проводимости двухполюсника от магнитного

Рис. 1. Эквивалентная схема двух автогенераторов, связанных через мемристивный элемент

Fig. 1. Schematic circuit diagram of two self-sustained oscillators coupled through the memristor

потока Φ . Обозначения размерных динамических переменных (токов и напряжений) приведены на схеме (см. рис. 1).

Вольт-амперные характеристики отрицательных проводимостей N_j зададим в виде кубических функций

$$I_j = -\alpha_j U_j + \beta_j U_j^3, \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

где I_j – токи, протекающие через нелинейные элементы; U_j – напряжения на них; α_j и β_j – размерные коэффициенты, которые будем полагать положительными. В качестве мемристивной проводимости рассмотрим идеализированный мемристор Чуа [1] с кусочно-линейной характеристикой

$$G_M(\Phi) = \begin{cases} A, & |\Phi| < \Phi_0, \\ B, & |\Phi| \geq \Phi_0. \end{cases} \quad (4)$$

Используя правила Кирхгофа, получим следующую систему уравнений относительно физических переменных U_j , i_j , Φ :

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dt_\Phi} + \frac{1}{C_1} i_1 + \frac{g_1}{C_1} U_1 + \frac{G_M(\Phi)}{C_1} (U_1 - U_2) - \frac{\alpha_1}{C_1} U_1 + \frac{\beta_1}{C_1} U_1^3 &= 0, \\ \frac{1}{C_1} \frac{di_1}{dt_\Phi} &= \frac{1}{C_1 L_1} U_1, \\ \frac{dU_2}{dt_\Phi} + \frac{1}{C_2} i_2 + \frac{g_2}{C_2} U_2 + \frac{G_M(\Phi)}{C_2} (U_2 - U_1) - \frac{\alpha_2}{C_2} U_2 + \frac{\beta_2}{C_2} U_2^3 &= 0, \\ \frac{1}{C_2} \frac{di_2}{dt_\Phi} &= \frac{1}{L_2 C_2} U_2, \\ \frac{d\Phi}{dt_\Phi} &= U_1 - U_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $i_{1,2}$ – токи через катушки индуктивности, t_Φ – физическое время. Обозначим $1/(L_1 C_1) = \omega_1^2$ и $1/(L_2 C_2) = \omega_2^2$, $p = \omega_1^2/\omega_2^2$ и введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} t &= \omega_1 t_\Phi, \\ x_1 &= \sqrt{\frac{\beta_1}{\omega_1 C_1}} U_1, & x_2 &= \sqrt{\frac{\beta_2}{\omega_1 C_2}} U_2, \\ y_1 &= \frac{1}{\omega_1 C_1} \sqrt{\frac{\beta_1}{\omega_1 C_1}} i_1, & y_2 &= \frac{1}{p \omega_1 C_2} \sqrt{\frac{\beta_2}{\omega_1 C_2}} i_2, \\ z_1 &= \omega_1 \sqrt{\frac{\beta_1}{\omega_1 C_1}} \Phi. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда система уравнений (5) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 + y_1 - (\gamma_1 - x_1^2)x_1 + kM(z)(x_1 - m_0x_2) &= 0, \\ \dot{y}_1 &= x_1, \\ \dot{x}_2 + py_2 - (\gamma_2 - x_2^2)x_2 + km_1M(z)(m_0x_2 - x_1) &= 0, \\ \dot{y}_2 &= x_2, \\ \dot{z} &= x_1 - m_0x_2.\end{aligned}\tag{7}$$

В уравнениях (7) точками обозначены производные по безразмерному времени t и введена безразмерная характеристика мемристора Чуа

$$M(z) = \begin{cases} a, & |z| < 1, \\ b, & |z| \geq 1, \end{cases}\tag{8}$$

где a и b – некоторые параметры. Безразмерные параметры модели (7) связаны с физическими параметрами исходной системы следующим образом:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{\alpha_1 - g_1}{\omega_1 C_1}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2 - g_2}{\omega_1 C_2}, \\ m_0 &= \sqrt{\frac{C_2 \beta_1}{C_1 \beta_2}}, \quad m_1 = \frac{1}{m_0} \frac{C_1}{C_2}, \quad k = \frac{1}{\omega_1 C_1} \frac{G_M(\Phi)}{M(z)}.\end{aligned}\tag{9}$$

Легко получить точки равновесия системы (7): $x_{1,2} = 0$, $y_{1,2} = 0$. При этом координата z принимает любые значения. Таким образом, в системе (7) имеется линия равновесий, совпадающая с осью $0Z$. Исключим из рассмотрения текущее значение переменной z . Для этого представим последнее уравнение системы (7) в виде

$$\dot{z} = \dot{y}_1 - m_0 \dot{y}_2.\tag{10}$$

Откуда имеем

$$z(t) = z(0) + y_1(t) - m_0 y_2(t) - y_1(0) - m_0 y_2(0).\tag{11}$$

Проводимость мемристора в текущий момент времени будет определяться мгновенными значениями переменных y_1 , y_2 , а также начальными значениями $y_1(0)$, $y_2(0)$ и $z(0)$. При этом уравнения системы представляют собой уравнения двух диссипативно-связанных генераторов, для которых сила связи зависит от текущих и начальных значений переменных, в том числе от начального значения исключенной из уравнений переменной z ,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 + y_1 - (\gamma_1 - x_1^2)x_1 + kM(z(0) + y_1 - m_0 y_2 - y_1(0) - m_0 y_2(0))(x_1 - m_0 x_2) &= 0, \\ \dot{y}_1 &= x_1, \\ \dot{x}_2 + py_2 - (\gamma_2 - x_2^2)x_2 + km_1M(z(0) + y_1 - m_0 y_2 - y_1(0) - m_0 y_2(0))(m_0 x_2 - x_1) &= 0, \\ \dot{y}_2 &= x_2.\end{aligned}\tag{12}$$

Таким образом, меняя начальные условия можно получать более слабую или более сильную связь и, следовательно, наблюдать или не наблюдать эффект частотно-фазового захвата.

Предположим, для простоты, что парциальные системы отличаются только индуктивностями $L_1 \neq L_2$, а все остальные параметры одинаковы, тогда получаем: $p = L_1/L_2$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $m_0 = m_1 = 1$. В этом случае система уравнений (7) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 + y_1 - (\gamma - x_1^2)x_1 + kM(z)(x_1 - x_2) &= 0, \\ \dot{y}_1 &= x_1, \\ \dot{x}_2 + py_2 - (\gamma - x_2^2)x_2 + kM(z)(x_2 - x_1) &= 0, \\ \dot{y}_2 &= x_2, \\ \dot{z} &= x_1 - x_2.\end{aligned}\tag{13}$$

Рассмотрим систему связанных через мемристор генераторов ван дер Поля (13), считаем параметры мемристора a и b постоянными: $a=0.02$ и $b=2.0$. Параметр генерации γ также считаем неизменным: $\gamma=0.1$. В качестве управляющих параметров будем рассматривать расстройку частот p и коэффициент связи k . Исследуем особенности взаимодействия через мемристор двух идентичных генераторов ван дер Поля и двух генераторов, имеющих небольшую расстройку частот автоколебаний.

При проведении расчетов уравнения (13) интегрировались по методу Рунге–Кутты 4-го порядка. Шаг интегрирования фиксировался постоянным и достаточно малым $h = 0.001$. Время интегрирования варьировалось, но, как правило, составляло несколько тысяч периодов колебаний. По полученным результатам строились проекции фазовых портретов колебаний и определялись полные мгновенные фазы колебаний парциальных генераторов.

Полные фазы генераторов $\Psi_1(t)$ и $\Psi_2(t)$ рассчитывались по формуле

$$\Psi_i(t) = \arctg \frac{y_i(t)}{x_i(t)} \pm \pi n(t), \quad i = 1, 2,\tag{14}$$

где $n(t)$ – целочисленная переменная, определяемая из условия непрерывности зависимости фазы от времени.

Зная мгновенные фазы генераторов и их разность $\Delta\Psi(t) = \Psi_2(t) - \Psi_1(t)$ легко определить среднюю разностную частоту (частоту биений)

$$\Omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Delta\Psi(t+T) - \Delta\Psi(t)}{T},\tag{15}$$

В численных экспериментах время наблюдения T полагалось конечным, но достаточно большим. Очевидно, в области синхронизации в пределах точности вычислений должно выполняться равенство: $\Omega = 0$. При больших значениях параметра связи синхронизация может происходить через подавление автоколебаний одного из генераторов. В этом случае расчет частоты биений по формуле (15) не дает корректных результатов.

При проведении исследований строились зависимости разности фаз генераторов и частоты биений от начального значения z_0 и от расстройки в системе при различных начальных условиях и различных значениях параметров.

2. Синфазный режим в системе двух идентичных автогенераторов

При отсутствии расстройки ($p = 1$) уравнения парциальных генераторов в модели (13) становятся совершенно идентичными. Если связь идентичных генераторов была диссипативной (осуществлялась через обычную проводимость), то в системе при любом значении параметра связи k наблюдался бы режим синфазной (полной) синхронизации, соответствующий устойчивости решений, принадлежащих инвариантному многообразию $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ в фазовом пространстве. Рассмотрим, будет ли синфазный режим устойчив, если парциальные генераторы взаимодействуют через мемристор, то есть рассмотрим устойчивость решения $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$, $y_1(t) = y_2(t) = y(t)$. Введем малые отклонения: $u = x_2 - x_1$, $v = y_2 - y_1$. Линеаризованная система для малых отклонений от синфазного решения имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{u} &= (\gamma - 3x^2)u - 2kM(z(0))u - v, \\ \dot{v} &= u,\end{aligned}\tag{16}$$

где $x(t)$ – синфазные колебания, являющиеся решением уравнений парциального генератора ван дер Поля без связи

$$\ddot{x} - (\gamma - 3x^2)\dot{x} + x = 0.\tag{17}$$

Уравнения системы (16) описывают линейный осциллятор

$$\ddot{u} - [\gamma - 3x^2 - 2kM(z(0))]\dot{u} + u = 0.\tag{18}$$

Диссипация осциллятора $\sigma(t) = -[\gamma - 3x^2 - 2kM(z(0))]$ является переменной во времени, так как зависит от значения переменной $x(t)$. В квазигармоническом

Рис. 2. Трехмерные проекции фазового портрета, иллюстрирующие переходный процесс в системе идентичных генераторов (13) при $p = 1$, $\gamma = 0.1$, $k = 0.1$, начальных значениях переменных $x_1(0) = 0.5$, $y_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = -0.3$, $y_2(0) = -0.1$ и разных начальных значениях $z(0)$: $a - 0.5$; $b - 0.1$. Разные оттенки тона соответствуют разным уровням значений переменной z . Время интегрирования – 5000 единиц времени системы. Период установления не отбрасывался

Fig. 2. Three-dimensional phase portrait projections which show the transient process in the system of identical self-sustained oscillators (13) at $p = 1$, $\gamma = 0.1$, $k = 0.1$, initial conditions are $x_1(0) = 0.5$, $y_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = -0.3$, $y_2(0) = -0.1$, and different $z(0)$ initial conditions: $a - 0.5$; $b - 0.1$. Colours show different levels of the variable z . The integration time is 5000 units of system time. The transient process is not discarded

приближении установившиеся колебания в системе (17) можно считать гармоническими колебаниями с амплитудой $X_0 = 2\sqrt{\gamma/3}$ (в чем легко убедиться, применив метод ван дер Поля). В этом случае для среднего за период квадрата переменной получаем $\langle x^2 \rangle = 2\gamma/3$. С учетом этого, среднее значение диссипации осциллятора (18) есть $\langle \sigma \rangle = \gamma + 2kM(z(0))$. Это значение всегда положительно и колебания (18) затухают при любых значениях параметров и любых начальных условиях. Это означает, что система связанных идентичных генераторов (13) независимо от начальных условий всегда приходит в режим синфазных колебаний. При этом в случае слабой связи в системе может наблюдаться длительный переходный процесс колебательного характера, зависящий от выбора начальных условий. Его длительность может составлять тысячи единиц безразмерного времени при периоде колебаний, близком к 2π единиц. На рис. 2 приведены примеры такого переходного процесса.

3. Исследование взаимодействия осцилляторов с частотной расстройкой

Рассмотрим систему (13) при наличии малой частотной расстройки ($p \neq 1$). Для диагностики взаимного захвата частот и фаз генераторов в численных экспериментах по формуле (14) рассчитывались мгновенные фазы колебаний парциальных генераторов и определялась частота биений Ω (15). Численные оценки показали, что время установления стационарных колебаний при наличии частотной расстройки значительно меньше, чем в случае $p = 1$ и составляет не более 10000 единиц. При расчетах частоты биений было зафиксировано время установления $t_{уст} = 10000$ единиц, а интервал времени, на котором производились вычисления составлял не менее

$T_{\max} = 10000$ единиц. Такие параметры расчетов обеспечили достаточно точную оценку частоты биений в установившемся режиме.

Зависимость Ω от параметра расстройки p позволяет обнаружить эффект захвата и определить интервал синхронизации. Как показали численные эксперименты связь через мемристивную проводимость также как и связь через обычную проводимость обеспечивает взаимный захват частот и фаз генераторов, так что в определенной области значений расстройки частота биений Ω обращается в ноль, что наблюдалось ранее в натуральных экспериментах [39]. Однако эффект синхронизации генераторов через мемристор имеет существенную особенность: ширина области захвата зависит от начальных условий. На рис. 3 приведены зависимости частоты биений от начального значения пе-

Рис. 3. Зависимости частоты биений от начального значения z_0 при различном выборе начальных значений других динамических переменных: кривая 1 – $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.5, y_2(0) = -0.4$; кривая 2 – $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.3, y_2(0) = -0.1$; кривая 3 – $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.2, y_2(0) = -0.6$. Значения параметров: $p = 1.05, k = 0.1$

Fig. 3. Dependencies of beat frequency on initial values z_0 at different initial values of other dynamic variables: curve 1 – $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.5, y_2(0) = -0.4$; curve 2 – $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.3, y_2(0) = -0.1$; curve 3 – $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.2, y_2(0) = -0.6$. Parameters values: $p = 1.05, k = 0.1$

Рис. 4. Фазовые проекции установившихся колебаний в системе (13) при фиксированном значениях параметров $p = 1.05$, $k = 0.1$ и старте с различных начальных условий (НУ_{1,2,3,4}): a – синхронные колебания, устанавливающиеся с НУ₁ ($x_1(0)=0.5$, $y_1(0)=0.5$, $x_2(0)=-0.5$, $y_2(0)=-0.4$, $z_0(0)=-0.5$) и НУ₂ ($x_1(0) = 0.5$, $y_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = -0.3$, $y_2(0) = -0.1$, $z_0(0) = -0.5$); b – несинхронные колебания, устанавливающиеся с НУ₃ ($x_1(0)=0.5$, $y_1(0)=0.5$, $x_2(0)=-0.5$, $y_2(0)=-0.4$, $z_0(0)=0.25$) и НУ₄ ($x_1(0) = 0.5$, $y_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = -0.3$, $y_2(0) = -0.1$, $z_0(0) = 0.25$). Время установления $t_{уст} = 10000$

Fig. 4. Phase portrait projections of stationary oscillations in system (13) at fixed values of parameters $p = 1.05$, $k = 0.1$, and at different initial conditions (IC_{1,2,3,4}): a – synchronized oscillations which are started at IC₁ ($x_1(0) = 0.5$, $y_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = -0.5$, $y_2(0) = -0.4$, $z_0(0) = -0.5$) and IC₂ ($x_1(0) = 0.5$, $y_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = -0.3$, $y_2(0) = -0.1$, $z_0(0) = -0.5$); b – desynchronized oscillations which are started at IC₃ ($x_1(0) = 0.5$, $y_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = -0.5$, $y_2(0) = -0.4$, $z_0(0) = 0.25$) и IC₄ ($x_1(0) = 0.5$, $y_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = -0.3$, $y_2(0) = -0.1$, $z_0(0) = 0.25$). Transient time $t_{trans} = 10000$

ременной $z(0) = z_0$ при фиксированной расстройке $p = 1.05$ и различном выборе начальных значений других переменных системы. На всех представленных графиках можно выделить интервал значений z_0 , для которого синхронизация не наблюдается. Границы этого интервала зависят от начальных значений других переменных. При этом сам характер зависимости для всех случаев полностью идентичен и графики отличаются только смещением на некоторую величину $z_0 = \text{const}$.

Для иллюстрации поведения системы при наличии и отсутствии синхронизации в случае фиксированной расстройки и различных начальных условий на рис. 4 приведены фазовые проекции установившихся колебаний. На рис. 4, *a* слева представлены проекции x_1, x_2 синхронных колебаний, полученных для двух различных начальных точек. Они полностью совпадают, как и другие проекции колебаний в пространстве переменных x_1, x_2, y_1, y_2 . Однако в полном фазовом пространстве у этих колебаний будет наблюдаться сдвиг на постоянную величину вдоль оси OZ . На правом фрагменте рис. 4, *a* приведены x_1, z проекции, соответствующие разным начальным условиям. Можно заметить, что сдвиг колебаний совпадает с разницей начальных значений переменной $\Delta y_2(0) = 0.3$. На рис. 4, *b* приведены соответствующие фазовые проекции для двух начальных точек, когда установившиеся колебания генераторов несинхронны. Перекрестные проекции x_1, x_2 (слева) отражают квазипериодический характер колебаний. Совместное изображение x_1, z проекций на одном графике показывает наличие смещения вдоль оси OZ (справа). Кроме того приведенные проекции показывают, что квазипериодические колебания, для разных начальных условий отличаются также формой поверхности, топологически эквивалентной двумерному тору, на которой лежат фазовые траектории.

В связи с полученными данными возникает вопрос, будут ли зависеть характеристики колебаний от начальных условий непрерывным образом? Результаты, приведенные на рис. 3 свидетельствуют в пользу такого предположения. Кроме того, отмеченная особенность динамики типична для систем с линией равновесий, в том числе она обнаружена в автогенераторах, содержащих мемристор [23, 24, 28–30]. Таким образом, можно предположить, что границы области синхронизации непрерывно меняются при изменении начальных условий в некоторой области значений параметров p, k .

На рис. 5 изображены зависимости частоты биений от частотной расстройки, полученные для разных начальных значений переменной z при фиксированном коэффициенте связи $k=0.02$. Легко видеть, что границы области синхронизации существенно различны для различных значений z_0 . С ростом абсолютной

Рис. 5. Зависимости частоты биений от частотной расстройки для разных значений z_0 : кривая 1 – 0; кривая 2 – (–0.5); кривая 3 – (–0.25); кривая 4 – (–0.75). Начальные значения других переменных: $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.5, y_2(0) = -0.4$. Коэффициент связи $k=0.02$

Fig. 5. Dependencies of the beat frequency on the frequency detuning at different values of z_0 : curve 1 – 0; curve 2 – (–0.25); curve 3 – (–0.5); curve 4 – (–0.75). The initial values of other variables: $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.5, y_2(0) = -0.4$. The coupling coefficient is $k = 0.02$

величины $|z_0|$ ширина области синхронизации увеличивается. Однако существует некоторое критическое значение $|z_0^{cr}|$, при превышении которого область синхронизации перестает увеличиваться. Такой эффект наблюдается при различных наборах начальных условий и может быть связан с переходом к синхронизации через подавление автоколебаний одного из генераторов. В этом случае метод диагностики синхронизации с помощью расчета мгновенных фаз (14) и частоты биений (15) не дает корректного результата.

На основании анализа зависимостей частоты биений от частотной расстройки для разных значений коэффициента связи k были построены границы областей синхронизации для разных значений начальных условий (рис. 6). На рисунке можно видеть семейство вложенных областей, ширина которых существенным образом различается. Для одних начальных условий область синхронизации оказывается узкой, для других – широкой. Для наиболее узкой области не удастся обнаружить интервал синхронизации при слабой связи. В этой связи можно предположить существование порога синхронизации по связи, по крайней мере, при некоторых начальных условиях.

Рис. 6. Границы областей синхронизации на плоскости параметров «расстройка – коэффициент связи» для различных наборов начальных условий: кривая 1 – $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.3, y_2 = -0.1, z_0 = -0.25$; кривая 2 – $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.5, y_2 = -0.4, z_0 = 0.25$; кривая 3 – $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.3, y_2 = -0.1, z_0 = 0$; кривая 4 – $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.5, y_2 = -0.4, z_0 = 0.5$; кривая 5 – $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.2, y_2 = -0.6, z_0 = 0.5$

Fig. 6. Boundaries of synchronization regions on the «frequency detuning–coupling coefficient» plane at different sets of initial conditions: curve 1 – $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.3, y_2 = -0.1, z_0 = -0.25$; curve 2 – $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.5, y_2 = -0.4, z_0 = 0.25$; curve 3 – $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.3, y_2 = -0.1, z_0 = 0$; curve 4 – $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.5, y_2 = -0.4, z_0 = 0.5$; curve 5 – $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.2, y_2 = -0.6, z_0 = 0.5$

4. Синхронизация генераторов при изменении модели мемристора, приводящем к исчезновению оси равновесий

Наличие оси равновесий в системе (7) или (13) является следствием предположения о том, что проводимость мемристора управляется магнитным потоком (в безразмерной модели переменной z), который, в соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея, связан с падением напряжения на мемристоре через производную. Существование линии равновесий является негрубой ситуацией, которую трудно представить в физически реализуемой системе [28]. Очевидно, невозможно создать двухполюсник, в полной мере обладающий описанными свойствами мемристивной проводимости. Рассмотрим, как повлияет на динамику взаимодействующих генераторов изменение модели мимристивного элемента незначительное по величине, но приводящее к исчезновению оси равновесия. Для этого перепишем последнее уравнение системы (13) в виде

$$\dot{z} = x_1 - x_2 - \delta z, \quad (19)$$

Рис. 7. Фазовые проекции колебаний при замене последнего уравнения системы (13) на уравнение (19): *a* – вид (x_1, x_2) проекции установившихся колебаний, не зависящий от начальных условий; *b* – вид (x_1, z) проекции двух траекторий, стартующих из разных начальных точек. Параметры системы $p = 1.05$, $k = 0.1$ и начальные условия НУ₁, НУ₃ соответствуют рис. 4. Время интегрирования $T = 5000$

Fig. 7. Phase portrait projections of oscillations for the system (13) with the last equation replaced on equation (19): *a* – the projection (x_1, x_2) of stationary oscillations which is not depend on initial conditions; *b* – projections (x_1, z) of two trajectories which are started at different initial points. Parameters $p = 1.05$, $k = 0.1$ and initial conditions IC₁, IC₃ of the system corresponds to the Fig. 4. Integration time $T = 5000$

где δ – некоторый параметр. Данная замена последнего уравнения системы даже при сколь угодно малом значении параметра δ приводит к исчезновению линии равновесий $0Z$ и существованию единственной точки равновесия в начале координат. Рассмотрим, как это повлияет на поведение системы связанных генераторов.

На рис. 7 приведены фазовые проекции x_1, x_2 (рис. 7, *a*) и проекции x_1, z (рис. 7, *b*) колебаний в системе (13) с измененным последним уравнением при фиксированных значениях параметров $p = 1.05$, $k = 0.1$. Параметр, введенный в последнее уравнение, полагался равным $\delta = 0.01$. В качестве начальных условий были выбраны условия, которые ранее приводили к различному результату: при НУ₁ (см. рис. 4, *a*) наблюдались синхронные колебания, а при НУ₃ (см. рис. 4, *b*) колебания были квазипериодическими. Теперь обе траектории после времени установления выходят на один и тот же режим колебаний, представляющий собой квазипериодический аттрактор. Выбор других начальных условий приводит к тому же результату. Однако, если выбрать параметр δ очень малым, то можно наблюдать достаточно длительный переходный процесс, характер которого будет зависеть от начальных условий.

Заключение

Проведенные исследования математической модели системы двух автогенераторов ван дер Поля, связанных через мемристор Чуа позволили выявить особенности частотно-фазовой синхронизации автоколебаний, связанные с мемристивным характером связи и наличием в математической модели системы линии равновесий, совпадающей с осью $0Z$. В случае взаимодействия полностью идентичных генераторов установившийся режим соответствует синфазным колебаниям в парциальных

системах, однако мемристивный характер взаимодействия приводит к длительному процессу установления разности фаз, зависящему от начальных условий.

При введении частотной расстройки генераторов была обнаружена зависимость границ области синхронизации от начальных условий. В зависимости от начальных значений динамических переменных ширина области частотно-фазового захвата меняется в широких пределах. Для частотно-фазовой синхронизации данный эффект не описан в научной литературе. В то же время подобное поведение отмечалось в случае полной синхронизации хаоса в системах, связанных через мемристор, где также имеется ось равновесий [38]. Таким образом, связь автогенераторов через мемристор приводит к особому типу поведения взаимодействующих систем. При этом синхронизацией парциальных систем можно управлять, изменяя начальные условия. В то же время, нами было показано, что малое возмущение уравнений модели, приводящее к исчезновению линии равновесий, устраняет зависимость эффекта синхронизации от начального состояния системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания (код проекта 3.8616.2017/БЧ).

References

1. Chua L.O. Memristor – the missing circuit element. *IEEE Trans. Circuit Theory*, 1971, vol. 1, pp. 507–519.
2. Chua L.O., Kang S.M. Memristive devices and systems. *Proceedings of the IEEE*, 1976, vol. 64, pp. 209–223.
3. Strukov D.B., Snider G.S., Stewart D.R., Williams R.S. The missing memristor found. *Nature*, 2008, vol. 453, pp. 80–83.
4. Yogesh Y.N., Wolf S.J. The elusive memristor: properties of basic electrical circuits. *European Journal of Physics*, 2009, vol. 30, pp. 661–675.
5. Yang Y., Sheridan P., Lu W. Complementary resistive switching in tantalum oxide-based resistive memory devices. *Appl. Phys. Lett.*, 2012, vol. 100(20), p. 203112.
6. Patterson G.A., Fierens P.I., García A.A., Grosz D.F. Numerical and experimental study of stochastic resistive switching. *Physical Review E*, 2013, vol. 87, p. 012128.
7. Strachan J.P., Torrezan A.C., Miao F., Pickett M.D., Yang J.J., Yi W., Medeiros-Ribeiro G., Williams R.S. State dynamics and modeling of tantalum oxide memristors. *IEEE Trans. on Electron Devices*, 2013, vol. 60, pp. 2194–2202.
8. Kim S., Choi S., Lu W. Comprehensive physical model of dynamic resistive switching in an oxide memristor. *ACS Nano*, 2014, vol. 8, pp. 2369–2376.
9. Berzina T., Smerieri A., Bernabò M., Pucci A., Ruggeri G., Erokhin V.V., Fontana M.P. Optimization of an organic memristor as an adaptive memory element. *J. Appl. Phys.*, 2009, vol. 105, p. 124515.
10. Liu G., Chen Y., Wang C., Zhang W., Li R.W., Wang L. Polymer memristor for information storage and neuromorphic applications. *Materials Horizons*, 2014, vol. 1, pp. 489–506.
11. Demin V.A., Erokhin V.V., Emelyanov A.V., Battistoni S., Baldi G., Iannotta S.,

- Kashkarov P.K., Kovalchuk M.V. Hardware elementary perceptron based on polyaniline memristive devices. *Organic Electronics*, 2015, vol. 25, pp. 16–20.
12. Wang X., Chen Y., Xi H., Li H., Dimitrov D. Spintronic memristor through spin-torque-induced magnetization motion. *IEEE Electron Devices Letters*, 2009, vol. 30, pp. 294–297.
 13. Chanthbouala A., Matsumoto R., Grollier J., Cros V., Anane A., Fert A., Khvalkovskiy A.V., Zvezdin K.A., Nishimura K., Nagamine Y., Maehara H., Tsunekawa K., Fukushima A., Yuasa S. Vertical-current-induced domain-wall motion in MgO-based magnetic tunnel junctions with low current densities. *Nature Physics*, 2011, vol. 7, pp. 626–630.
 14. Buscarino A., Fortuna L., Frasca M., Gambuzza L.V. A gallery of chaotic oscillators based on HP memristor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2013, vol. 23, p. 1330015.
 15. Pershin Y.V., Di Ventra M. Practical approach to programmable analog circuits with memristors. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 2010, vol. 57, pp. 1857–1864.
 16. Pershin Y.V., Di Ventra M. Memory effects in complex materials and nanoscale systems. *Advances in Physics*, 2011, vol. 60, pp. 145–227.
 17. Chew Z.J., Li L. Printed circuit board based memristor in adaptive lowpass filter. *Electronics Letters*, 2012, vol. 48, pp. 1610–1611.
 18. Di Ventra M., Pershin Y.V. The parallel approach. *Nature Physics*, 2013, vol. 9, pp. 200–202.
 19. Yang J.J., Strukov D.B., Stewart D.R. Memristive devices for computing. *Nature Nanotechnology*, 2013, vol. 8, pp. 13–24.
 20. Tetzlaff R. Memristor and Memristive Systems. New York, Springer-Verlag, 2014.
 21. Vourkas I., Sirakoulis G. Memristor-Based Nanoelectronic Computing Circuit and Architectures. *Emergence, Complexity and Computation. Springer International Publishing*, 2016, vol. 19.
 22. Itoh M., Chua L.O. Memristor oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008, vol. 18, pp. 3183–3206.
 23. Messias M., Nespoli C., Botta V.A. Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters in memristor oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2010, vol. 20, pp. 437–450.
 24. Botta V.A., Nespoli C., Messias M. Mathematical analysis of a third-order memristor-based Chua's oscillator. *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.*, 2011, vol. 12, pp. 91–99.
 25. Riaz R. Manifolds of equilibria and bifurcations without parameters in memristive circuits. *SIAM J. Appl. Math.*, 2012, vol. 72, pp. 877–896.
 26. Buscarino A., Fortuna L., Frasca M., Gambuzza L.V. A chaotic circuit based on Hewlett–Packard memristor. *Chaos*, 2012, vol. 22, p. 023136.
 27. Gambuzza L.V., Fortuna L., Frasca M., Gale E. Experimental evidence of chaos from memristors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2015, vol. 25, p. 1550101.
 28. Semenov V.V., Korneev I.A., Arinushkin P.A., Strelkova G.I., Vadivasova T.E., Anishchenko V.S. Numerical and experimental studies of attractors in memristor-

- based Chua's oscillator with a line of equilibria noise-induced effects. *Eur. Phys. J. Special Topics*, 2015, vol. 224, pp. 1553–1561.
29. Korneev I.A., Vadivasova T.E., Semenov V.V. Hard and soft excitation of oscillations in memristor-based oscillators with a line of equilibria. *Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 89, pp. 2829–2843.
 30. Korneev I.A., Semenov V.V. Andronov–Hopf bifurcation with and without parameter in a cubic memristor oscillator with a line of equilibria. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2017, vol. 27, p. 081104.
 31. Pham V.T., Buscarino A., Fortuna L., Frasca M. Autowaves in memristive cellular neural networks. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2012, vol. 22, p. 1230027.
 32. Zhao H., Li L., Peng H., Kurths J., Xiao J., Yang Y. Anti-synchronization for stochastic memristor-based neural networks with non-modeled dynamics via adaptive control approach. *Eur. Phys. J. B.*, 2015, vol. 88, pp. 1–10.
 33. Zhao H., Li L., Peng H., Xiao J., Yang Y. Finite-time boundedness analysis of memristive neural network with time-varying delay. *Neural Processing Letters*, 2016, vol. 44, pp. 665–679.
 34. Buscarino A., Corradino C., Fortuna L., Frasca M., Chua L.O. Turing patterns in memristive cellular nonlinear networks. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 2016, vol. 99, pp. 1–9.
 35. Wang C., Lv M., Alsaedi A., Ma J. Synchronization stability and pattern selection in a memristive neuronal network. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2017, Vol. 27, p. 113108.
 36. Zhang L., Yang Y., Wang F. Lag synchronization for fractional-order memristive neural networks via period intermittent control. *Nonlinear Dynamics*, 2017, pp. 367–381.
 37. Frasca M., Gambuzza L.V., Buscarino A., Fortuna L., Implementation of adaptive coupling through memristor. *Physica Status Solidi (C)*, 2014, vol. 12, pp. 206–210.
 38. Volos Ch.K., Pham V.T., Vaidyanathan S., Kyprianidis I.M., Stouboulos I.N. Advances and applications in nonlinear control systems. Berlin, Germany. *Springer International Publishing*, 2016, vol. 635, pp. 317–350.
 39. Ignatov M., Hansen M., Ziegler M., Kohlstedt H. Synchronization of two memristively coupled van der Pol oscillators. *Appl. Phys. Lett.*, 2016, vol. 108, p. 084105.

Корнеев Иван Александрович – родился (1992) в селе Еруслан Саратовской области, окончил Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (2017). Имеет диплом бакалавра по направлению 03.03.03 «Радиофизика» и диплом магистра по направлению 03.04.03 «Радиофизика». В настоящее время – аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов: математическое моделирование, численный и физический эксперимент, синхронизация, мемристивные системы.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет
E-mail: korneew@yandex.ru

Шабалина Ольга Геннадьевна – родилась в Туапсе Краснодарского края (1996). Окончила Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (2017), имеет диплом бакалавра по направлению 03.03.03 «Радиофизика». В настоящее время обучается в магистратуре СГУ по направлению 03.04.03 «Радиофизика». Область научных интересов: теория нелинейных колебаний.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет
E-mail: shabalinaog96@gmail.com

Семенов Владимир Викторович – родился в Саратове (1990). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2012). Кандидат физико-математических наук. Ассистент кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Область научных интересов – влияние шумов в нелинейных системах, системы с запаздыванием, химерные состояния, исследование нелинейных явлений в натурном радиофизическом эксперименте. Автор более 20 научных публикаций.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет
E-mail: semenov_v_v@list.ru

Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в Саратове (1958). Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики и статистической радиофизики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических и стохастических осцилляторов, волновые структуры в активных средах, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, влияние шума и стохастические эффекты в нелинейных системах и др. Автор более 130 публикаций в рецензируемых отечественных и зарубежных изданиях.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет
E-mail: vadivasovate@yandex.ru