УДК 537.86; 001.891.573; 51.73; 621.376.9

СИНХРОНИЗАЦИЯ БИЕНИЙ В СИСТЕМАХ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

М. А. Мищенко, В. В. Матросов

Радиофизический факультет, Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Россия, 603950 Нижний Новгород, проспект Гагарина, 23
E-mail: mischenko@neuro.nnov.ru, matrosov@rf.unn.ru

Изучается динамика двух систем фазовой автоподстройки частоты с интегрирующими фильтрами в цепях управления, связанных через дополнительный фазовый дискриминатор. Математические модели парциальных элементов представляют собой уравнения маятникового типа, которые при объединении систем фазовой автоподстройки в ансамбль трансформируются в систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, определенную в цилиндрическом фазовом пространстве с двумя циклическими координатами. В случае малоинерционных цепей управления модель ансамбля превращается в динамическую систему с тороидальным фазовым пространством. Рассматриваемые модели обладают большим разнообразием движений, как регулярных, так и хаотических. В работе основное внимание уделяется анализу предельных циклов и хаотических аттракторов, которые являются математическими образами режимов биений систем фазовой автоподстройки. В режиме биений на выходе имеют место колебания с угловой модуляцией, свойствами которых можно управлять с помощью параметров систем, а в ансамблях – ещё и параметрами связей. Повышенный интерес к режимам биений в настоящее время обусловлен схожестью колебаний в режимах биений с колебаниями нейронов, то есть перспективой создания на базе систем фазовой автоподстройки частоты нейроподобного элемента. Цель работы – анализ режимов биений систем, объединенных в ансамбль для управления свойствами модулированных колебаний, в частности, для синхронизации этих колебаний. Изучение проведено путем численного моделирования, базирующегося на методах теории нелинейных колебаний и качественной теории бифуркаций. В результате в пространстве параметров моделей выделены области синхронизации режимов биений различных типов, в ансамбле систем фазовой автоподстройки с инерционными цепями управления установлена возможность совместного существования синхронных и асинхронных режимов, как следствие, гистерезисных явлений. Рассмотрены бифуркационные механизмы установления и нарушения синхронизации режимов биений. Показано, что объединение систем фазовой автоподстройки через дополнительный фазовый дискриминатор позволяет синхронизировать режимы биений.

Ключевые слова: Фазовая автоподстройка частоты, биения, синхронизация, автомодулированные колебания.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-37-50

Образец цитирования: Мищенко М.А., Матросов В.В. Синхронизация биений в системах фазовой автоподстройки частоты // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 2. С. 37–50.

SYNCHRONIZATION OF BEATS IN PHASE-LOCKED LOOPS

M. A. Mishchenko, V. V. Matrosov

Faculty of Radiophysics, National Research
Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod,
23, Prospect Gagarina, 603950 Nizhni Novgorod, Russia
E-mail: mischenko@neuro.nnov.ru, matrosov@rf.unn.ru

Dynamics of two phase-locked loops (PLL) with first order low-pass filters coupled via additional phase discriminator is studied. Mathematical models of the partial systems are pendulum-like type. Thus, mathematical model of the whole system consists of four ordinary differential equations. Phase space of the model is a cylindrical with two cyclic variables. In a case of low-inertial control loops the model transforms into dynamical system with toroidal phase space. The observed model has a great variety of dynamical modes both regular and chaotic. In the article, the main attention is paid to analysis of limit cycles and chaotic attractors, corresponding to beating modes of PLLs. In the beating mode oscillations with angular modulation exist at the PLL's output. The characteristics of the modulation could be controlled by PLL's parameters and, in case of ensemble, by coupling parameters. The actuality of the beating modes investigations is concerned with some possible applications in neurodynamics – oscillations in the beating modes are similar to the neuronal membrane potential oscillations. The goal of the paper is the analysis of beating modes of coupled PLLs to control the characteristics of modulated oscillations and to synchronize these oscillations in particular. The study is performed by numerical modelling with modern nonlinear dynamics methods and bifurcation theory applications. As a result, the regions of synchronization of beating modes are determined in parameter space of the model. The coexistence of beating modes synchronous and asynchronous dynamics are shown for PLLs with inertial control loop. Bifurcation mechanisms of beating mode synchronization loss are studied. The coupling of PLLs through additional phase discriminator is shown to synchronize beating mode oscillations.

Keywords: Phase-locked loop, beating modes, synchronization, automodulated oscillations.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-37-50

Paper reference: Mishchenko M.A., Matrosov V.V. Synchronization of beats in phase-locked loops. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 2. P. 37–50.

Введение

Системы фазовой автоподстройки частоты (фазовой синхронизации, ФАП) повсеместно используются в электронике, радиотехнике и системах связи [1–4]. Их применяют для стабилизации частоты и фазы несущей в модуляторах и демодуляторах, в принимающих устройствах, для синтеза частот и многих других задач [1, 3, 5]. Классическая система фазовой синхронизации представляет собой петлю управления с отрицательной обратной связью и состоит из следующих основных элементов: управляемого напряжением генератора, который способен менять частоту колебаний в зависимости от подаваемого на вход напряжения; фазового дискриминатора, сравнивающего фазу управляемого генератора с фазой эталонного генератора и вырабатывающего напряжение, пропорциональное разности их фаз φ ; фильтра нижних частот, отсеивающего высокочастотные шумовые составляющие.

В многочисленных работах (например, [6–11]) было показано, что кроме типичного для таких систем синхронного режима они могут использоваться в качестве

генераторов сложных автоколебаний, в том числе хаотических, снимаемых с выхода фильтра в цепи управления. При этом сложность колебаний во многом определяется выбранным типом фильтра. Поскольку сигнал с выхода фильтра поступает на вход управляющего устройства генератора, корректирующего его угловую координату, то на выходе управляемого генератора будет наблюдаться сигнал с угловой модуляцией, закон которой определяется колебаниями в цепи управления.

Динамика системы в режиме синхронизации достаточно хорошо изучена, но асинхронные режимы остаются малоизученными. Также нерешенными остаются вопросы о коллективной динамике систем автоподстройки, находящихся в асинхронных режимах. На практике системы объединяют в ансамбли для того, чтобы добиться улучшения динамических свойств (увеличения полосы синхронизации, улучшения фильтрующих свойств и т.д.). Кроме того, объединение систем фазовой автоподстройки частоты в ансамбли представляет интерес в связи с возможностью использования этих систем для моделирования динамики нейронов [12, 13].

В данной работе исследуется синхронизация двух систем фазовой автоподстройки частоты, находящихся в режиме биений, то есть синхронизация колебаний с угловой модуляцией на выходе управляемых напряжением генераторов связанных систем. Показано, что возможна синхронизация биений в случае параллельного соединения систем через дополнительный фазовый дискриминатор.

1. Биения в фазовых системах

Рассмотрим динамику системы фазовой синхронизации частоты. В общем виде динамика системы фазовой синхронизации описывается следующим операторным уравнением [1]:

$$\frac{p\varphi}{\Omega} - K(p)F(\varphi) = \gamma, \quad (1)$$

где φ – мгновенное значение разности фаз управляемого и опорного генератора; $p \equiv d/dt$ – оператор дифференцирования; Ω – максимальная частотная расстройка, которую способна скомпенсировать цепь управления; $K(p)$ – коэффициент передачи фильтра нижних частот в операторной форме; $F(\varphi)$ – характеристика фазового дискриминатора; γ – относительная начальная частотная расстройка управляемого и опорного генератора.

Для получения конкретного дифференциального уравнения, описывающего динамику системы, необходимо подставить в уравнение (1) конкретные характеристики фазового дискриминатора и передаточную характеристику фильтра. Рассмотрим характеристики асинхронного режима в системах без фильтра ($K(p) = 1$) и с интегрирующим фильтром ($K(p) = 1/(1 + Tp)$) для случая синусоидальной характеристики фильтра, то есть $F(\varphi) = \sin \varphi$.

1.1. Асинхронный режим в системе без фильтра. Начнем рассмотрение с простейшего случая, когда $K(p) = 1$. Подставляя $K(p)$ в (1), получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d\varphi}{d\tau} - \sin \varphi = \gamma, \quad (2)$$

где $\tau = t\Omega$. Такая система близка к реальной системе ФАП с очень широкой полосой пропускания фильтра. Фазовым пространством такой системы является окружность.

Из анализа уравнения (2) можно увидеть, что в системе при $\gamma < 1$ существует пара состояний равновесия – устойчивое и неустойчивое. Устойчивое состояние равновесия в системе ФАП соответствует режиму синхронизации опорного и подстраиваемого генераторов. При $\gamma > 1$ состояния равновесия исчезают, и в системе реализуется режим биений. Режиму биений соответствует угловая модуляция колебаний подстраиваемого генератора около собственной частоты. В режиме биений разность фаз опорного и подстраиваемого генераторов φ непрерывно нарастает во времени (с учетом 2π -периодичности), а разность частот совершает колебания около некоторого среднего значения, близкого к γ .

Введем понятие частоты биений. Так как режиму биений в системе (2) в фазовом пространстве соответствует движение по окружности, то частота биений может быть вычислена по формуле: $\nu = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau)/(2\pi\tau)$. Параметр γ позволяет плавно менять частоту биений (или частоту модуляции) на выходе системы.

1.2. Асинхронный режим в системе с интегрирующим фильтром. Похожие режимы наблюдаются для системы ФАП с интегрирующим фильтром, имеющим коэффициент передачи $K(p) = 1/(1+Tp)$, где T – постоянная времени фильтра. Подстановка в уравнение (1) после преобразования дает систему уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\tau} &= y, \\ \varepsilon \frac{dy}{d\tau} &= \gamma - y - \sin \varphi,\end{aligned}\tag{3}$$

где $\tau = t\Omega$ – безразмерное время, $\varepsilon = T\Omega$ – параметр инерционности фильтра. Данная система определена на фазовом цилиндре $(\varphi \pmod{2\pi}, y)$.

В книге [1] приводится исследование динамики рассматриваемой системы ФАП как в синхронном режиме, так и в асинхронном. Показано, что в асинхронном режиме в цепи управления наблюдаются негармонические периодические колебания, которые при увеличении γ приближаются к гармоническим. Зависимость частоты биений от параметра γ для различных значений ε аналогична полученной для системы без фильтра (2), с тем отличием, что в системе (3) есть ещё один управляющий параметр ε , позволяющий смещать характеристику. Кроме того, введение инерционности в цепь управления порождает бистабильность в виде одновременного существования в фазовом пространстве устойчивого состояния равновесия, соответствующего синхронному режиму, и устойчивого предельного цикла, соответствующего режиму биений.

Таким образом, в системах ФАП первого и второго порядков биения являются достаточно простыми, модуляция частоты при биениях является периодической, и частота биений ν связана с величиной параметра γ . Существование более сложных биений показано в системах ФАП третьего порядка и выше. Добиться более сложной динамики можно путем усложнения фильтра, а также путем объединения простых систем в ансамбль. Рассмотрим возможность синхронизации биений двух систем ФАП.

2. Синхронизация биений в фазовых системах

В режиме биений в цепи управления системы ФАП могут наблюдаться автоколебания, а на выходе управляемого напряжением генератора – модулированные этими колебаниями сигналы. Исследуем возможность синхронизации таких колебаний. Похожие задачи встречались в работах [12, 14–22]. Однако в этих работах рассматривались преимущественно квазисинхронные режимы и возможность синхронизации хаотических колебаний.

Рассмотрим возможность синхронизации биений и, как следствие, модулированных колебаний на выходе управляемых генераторов двух связанных систем ФАП, соединенных через дополнительный фазовый дискриминатор (рис. 1). В качестве парциальных систем ФАП будут рассмотрены системы без фильтра (2) и с интегрирующими фильтрами (3) в цепи управления.

2.1. Синхронизация биений двух систем ФАП без фильтра. При соединении двух систем ФАП без фильтра, описываемых уравнением (2), по схеме, представленной на рис. 1, их динамика будет подчиняться следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1}{d\tau} &= \gamma_1 - \sin \varphi_1 + k_{21} \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= \gamma_1 + \Delta\gamma - \sin \varphi_2 - k_{12} \sin(\varphi_2 - \varphi_1).\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь $\Delta\gamma$ – разница между относительными начальными частотными расстройками двух систем относительно общего опорного генератора; k_{12} и k_{21} – параметры связи между системами.

Зададим значение параметра $\gamma_1 > 1$, чтобы в системах наблюдался режим биений. Очевидно, что в случае $\Delta\gamma = 0$ и $k_{12} = k_{21} = 0$ системы идентичны. Вполне логичным выглядит, что при увеличении силы связи также можно ожидать, что дополнительное воздействие через ФД₃ будет компенсировать расстройку между двумя системами и их колебания будут синхронны.

Фазовым пространством системы (4) является двумерный тор. Различным синхронным режимам будет соответствовать замкнутая траектория на торе с различным соотношением чисел вращения по координатам φ_1 и φ_2 . В проекции на плоскость ($d\varphi_1/d\tau$, $d\varphi_2/d\tau$) синхронизации биений двух систем будет соответствовать замкнутая

Рис. 1. Схема соединения двух систем ФАП через дополнительный фазовый дискриминатор. Системы ФАП₁ и ФАП₂, содержащие генераторы, управляемые напряжением, Г_{1,2}, имеют общий опорный генератор, текущее значение фазы которого θ_0 сравнивается с фазами генераторов Г_{1,2} на фазовых дискриминаторах ФД_{1,2}, соответственно. Получаемые при этом сигналы $U_{1,2}$, содержащие информацию о разности фаз опорного и подстраиваемых генераторов $\varphi_{1,2}$, преобразуются фильтрами нижних частот $\Phi_{1,2}$ и корректируют частоты генераторов Г_{1,2} через управляющие элементы У_{1,2}. Дополнительный фазовый дискриминатор ФД₃ сравнивает фазы генераторов Г_{1,2} и передает сигнал, содержащий информацию о разности фаз, в цепи управления систем ФАП_{1,2} с весовыми коэффициентами k_{21}^{φ} и k_{12}^{φ} .

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма модели (4) на плоскости параметров $(k_{12}, \Delta\gamma)$ при $k_{21} = 0$ и $\gamma_1 = 1.5$ параметров, на которых мультипликатор обращался в «+1». Полученное разбиение представлено на рис. 2.

На рис. 2 выделены области синхронизации биений на основном тоне $[1, 1]$, когда скорость изменения переменных φ_1 и φ_2 одинакова и разность $(\varphi_1 - \varphi_2)$ ограничена. Область $[1, 2]$ соответствует кратной синхронизации, когда переменная φ_2 нарастает в два раза быстрее, чем φ_1 . Осциллограммы $\dot{\varphi}_1(\tau)$, $\dot{\varphi}_2(\tau)$ и проекции аттрактора на плоскости (φ_1, φ_2) и $(d\varphi_1/d\tau, d\varphi_2/d\tau)$ для значений параметров из областей $[1, 1]$ и $[1, 2]$ представлены на рис. 3, а и б, соответственно. В области, обозначенной $[1, 0]$, наблюдается режим, в котором переменная φ_1 непрерывно нарастает, что характерно для режима биений, а переменная φ_2 ограничена, то есть наблюдается смерть биений в ведомой системе.

Смену динамических режимов при изменении параметров хорошо иллюстрирует бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре, приведенная на рис. 4. Она демонстрирует значение разности фаз $(\varphi_1 - \varphi_2)$ двух систем ФАП при изменении параметра $\Delta\gamma$ и фиксированном параметре силы связи $k_{12} = 1$. В качестве секущей отображения Пуанкаре выбрана плоскость $\varphi_1 = \pi$, поэтому фактически на диаграмме показано изменение значения φ_2 в моменты пересечения секущей плоскости.

Рис. 3. Осциллограммы $\dot{\varphi}_1(\tau)$, $\dot{\varphi}_2(\tau)$ и проекции аттрактора на плоскости (φ_1, φ_2) и $(d\varphi_1/d\tau, d\varphi_2/d\tau)$ системы (4) для значений параметров $\gamma_1 = 1.5$, $\Delta\gamma = 0.1$ и $k_{12} = 0.6$, $k_{21} = 0$ из области $[1, 1]$ (а); $\gamma_1 = 1.5$, $\Delta\gamma = 1.5$ и $k_{12} = 1$, $k_{21} = 0$ из области $[1, 2]$ (б)

Для каждого значения параметра $\Delta\gamma$ производилось 100 итераций вычисления значений переменных на текущей плоскости. Из диаграммы видно, что в случае, когда значения параметров попадают в область синхронизации $[1, 1]$, в область кратной синхронизации $[1, 2]$ или смерти биений $[1, 0]$ (см. рис. 2), все 100 итераций дают одно значение разности фаз ($\varphi_1 - \varphi_2$), в то время как вне обозначенных областей каждая итерация дает свое значение ($\varphi_1 - \varphi_2$) и на диаграмме наблюдается характерная область.

Кроме того, из диаграммы на рис. 4 по характеру выхода из «регулярных» областей $[1, 0]$, $[1, 1]$ и $[1, 2]$ можно сделать заключение, что нарушение синхронизации связано с исчезновением устойчивого предельного цикла на торе, соответствующего режимам синхронизации, что порождает незамкнутую траекторию в двумерном тороидальном фазовом пространстве системы (4).

При добавлении в ансамбль малой обратной связи от ФАП₂ к ФАП₁ ($k_{21} \neq 0$) можно ожидать, что качественно картина должна сохраниться, то есть синхронизация должна быть осуществима. Зафиксируем значение параметра связи $k_{12} = 0.6$ и параметра $\gamma_1 = 1.5$ и рассмотрим пространство параметров $(k_{21}, \Delta\gamma)$. На рис. 5 представлена бифуркационная диаграмма модели (4) на плоскости $(k_{21}, \Delta\gamma)$, на которой выделены области существования различных режимов синхронизации биений.

Как можно увидеть из рис. 5, бифуркационная картина значительно сложнее, чем представленная на рис. 2 для случая однонаправленной связи. Разберем подробнее бифуркационные кривые, ограничивающие области на рис. 5.

В области, обозначенной $[1, 1]$, реализуется синхронный режим, изображенный на рис. 3, а. Данная область состоит из двух частей, соединяющихся в точке А ($k_{21} = -0.6, \Delta\gamma = 0$), в которой уравнения в системе (4) оказываются идентичными, а сама система – вырожденной. Правая часть области $[1, 1]$ ограничена сверху кривой 1, на которой мультипликатор предельного цикла, соответствующего синхронному режиму, обращается в «+1» и происходит бифуркация двукратного предельного цикла. Снизу данная область ограничена аналогичной кривой 2 и частью кривой 5, на которой происходит бифуркация петли сепаратрисы седлоузла. Левая часть области синхронизации $[1, 1]$ ограничена сверху продолжением кривой 2, а снизу – продолжением кривой 1 и кривой бифуркации петли сепаратрисы седлоузла 4. В об-

Рис. 4. Бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре системы (4) при изменении параметра $\Delta\gamma$ и фиксированных параметрах $\gamma_1 = 1.5, k_{12} = 1$ и $k_{21} = 0$

Рис. 5. Бифуркационная диаграмма модели (4) на плоскости параметров $(k_{21}, \Delta\gamma)$ при $k_{12} = 0.6$ и $\gamma_1 = 1.5$

ластях, ограниченных кривыми 5 и семейством кривых 4-8-9-10 существуют устойчивые состояния равновесия, которые соответствуют «смерти» биений в системах.

Кроме того, обнаружено перекрытие области синхронизации $[1, 1]$ с областью существования состояния равновесия. Небольшой участок области синхронизации биений ограничен снизу кривой 1, а сверху – кривой бифуркации петли сепаратрис седла 3. Кривые 8, 9, 10 обозначают различные бифуркации состояний равновесия и более подробно рассмотрены в работе [22]. Штриховкой отмечена область захвата в режим синхронизации биений $[1, 1]$.

Кроме основной области синхронизации биений была выделена область синхронизации биений на кратной частоте с движениями типа $[1, 2]$, динамика которых была показана на рис. 3, б. Область существования данного режима ограничена кривыми 6 и 7, соответствующими бифуркации предельного цикла с мультипликатором «+1».

2.2. Синхронизация биений двух систем ФАП с интегрирующим фильтром. Продолжим рассмотрение синхронизации биений на примере систем ФАП с интегрирующим фильтром. Динамическая система по схеме, представленной на рис. 1, составленная из парциальных элементов, описываемых уравнением (3), описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1}{d\tau} &= y_1, \\ \varepsilon_1 \frac{dy_1}{d\tau} &= \gamma_1 - \sin \varphi_1 - y_1 + k_{21} \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= y_2, \\ \varepsilon_2 \frac{dy_2}{d\tau} &= \gamma_1 + \Delta\gamma - \sin \varphi_2 - y_2 - k_{12} \sin(\varphi_2 - \varphi_1),\end{aligned}\tag{5}$$

Рис. 6. Бифуркационная диаграмма модели (5) на плоскости параметров $(k_{12}, \Delta\gamma)$ при $\gamma_1 = 1.5$, $\varepsilon_1 = 1.1$, $\varepsilon_2 = 1$, $k_{21} = 0$

где все переменные и параметры эквивалентны описанным выше для систем (3) и (4).

Сначала рассмотрим вариант односторонней связи ($k_{21} = 0$). Зафиксируем часть параметров: $\gamma_1 = 1.5$, $\varepsilon_1 = 1.1$, $\varepsilon_2 = 1.0$ и рассмотрим существование режима синхронизации биений на плоскости параметров $(k_{12}, \Delta\gamma)$. Полученное разбиение представлено на рис. 6.

Как можно увидеть из рис. 6, разбиение плоскости параметров для системы (5) качественно похоже на аналогичное разбиение для системы двух ФАП первого порядка (4), представленное на рис. 2. Но, в силу более высокой

размерности фазового пространства системы (5), на рис. 6 наблюдается пересечение областей существования различных режимов, порождающее бистабильность. Кроме того, внутри областей синхронизации $[1, 1]$, $[1, 2]$ и области $[1, 0]$ обнаружены кривые 3, 6 и 8 бифуркации удвоения периода предельного цикла, соответствующие переходу к синхронизации более высоких порядков, синхронизации «в среднем» и асинхронному поведению.

При добавлении в систему (5) обратной связи от ФАП₂ к ФАП₁ ($k_{21} \neq 0$) получается картина (рис. 7), качественно похожая на результат для системы (4), изображенный на рис. 5, хотя и более сложная по причине более высокой размерности динамической системы. В силу различных значений параметров $\varepsilon_1 = 1.1$ и $\varepsilon_2 = 1.0$, ФАП₁ и ФАП₂ оказываются неидентичными, что приводит к отсутствию точки вырождения системы (5). Кроме того, так же как и для случая однонаправленной связи, для системы (5) с взаимными связями обнаружена мультистабильность, обусловленная пересечением областей существования различных динамических режимов.

Обнаружено пересечение основной области $[1, 1]$ с областями кратной синхронизации биений $[1, 2]$, областями существования состояния равновесия и областями асинхронного хаотического поведения.

Интересующее нас явление синхронизации биений двух систем ФАП наблюдается в области $[1, 1]$. Данная область отвечает существованию аттрактора, изображенного на рис. 3, а, и ограничена бифуркационными кривыми, обозначенными буквой «А» (см. рис.7). В верхней части данная область ограничена кривыми $A1$ и $A2$, соответствующими бифуркации двукратного предельного цикла. Снизу границей области выступают бифуркационные кривые двукратного предельного цикла $A3$ и $A4$, а также кривая $O1$, отвечающая седло-узловой бифуркации состояний равновесия. Кроме того, внутри области $[1, 1]$ обнаружены бифуркационные кривые удвоения периода $A5$, $A7$ и $A8$ и кривая двукратного предельного цикла $A6$, которые

Рис. 7. Бифуркационная диаграмма модели (5) на плоскости параметров $(k_{21}, \Delta\gamma)$ при $\gamma_1 = 1.5$, $\varepsilon_1 = 1.1$, $\varepsilon_2 = 1.0$, $k_{12} = 0.6$

усложняют структуру пространства параметров.

Обнаружена область кратной синхронизации биений [1, 2], которую ограничивают бифуркационные кривые двукратного предельного цикла $B1$ и $B2$ и бифуркационные кривые удвоения периода предельного цикла $B3$ и $B4$.

В нижней части пространства параметров обнаружена область движений типа [1, 0].

Кроме того, на рис. 7 выделены области существования устойчивого состояния равновесия, ограниченные кривыми бифуркации седло-узла $O1$, $O2$ и $O4$ и кривой бифуркации Андронова–Хопфа $O3$. Более подробная структура пространства параметров в данной области рассмотрена в работах [20, 22]. В данных областях наблюдается смерть биений в обеих системах ФАП.

Мультистабильность и смену динамических режимов и режимов синхронизации биений при изменении параметра $\Delta\gamma$ иллюстрируют однопараметрические диаграммы отображения Пуанкаре, представленные на рис. 8. На диаграмме можно наблюдать явление гистерезиса между областями режимов [1, 0] и [1, 1] при изменении параметра $\Delta\gamma$. Кроме того, из диаграммы на рис. 8 можно увидеть наличие синхронизации биений типа [2, 2], [2, 4] и более высоких порядков, а также синхронизации биений в среднем, когда мгновенное значение разности фаз ($\varphi_2 - \varphi_1$) случайно изменяется в некотором интервале, но в среднем ограничено.

Рис. 8. Бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре системы (5) при изменении параметра $\Delta\gamma$ и фиксированных параметрах $\gamma_1 = 1.5$, $\varepsilon_1 = 1.1$, $\varepsilon_2 = 1.0$, $k_{12} = 0.6$ и $k_{21} = -1.0$ (а), $k_{21} = 0.6$ (б)

Заключение

В данной работе показана возможность использования систем фазовой автоподстройки частоты в качестве генераторов модулированных колебаний. Рассмотрено

ны случаи системы ФАП без фильтра и с интегрирующим фильтром первого порядка в цепи управления. В таких системах возможно существование режима биений, когда цепь управления не способна скомпенсировать частотную расстройку между опорным генератором и генератором, управляемым напряжением. В этом случае на выходе цепи управления наблюдаются регулярные негармонические колебания, а на выходе управляемого генератора наблюдаются колебания с угловой модуляцией – автомодулированные колебания.

Предложен вариант соединения двух систем ФАП для синхронизации автомодулированных колебаний через дополнительный фазовый дискриминатор. Определены области существования синхронных режимов биений в пространстве параметров и изучены бифуркационные механизмы выхода из синхронного режима биений при изменении параметров систем в случае однонаправленной и взаимной связей.

Показано, что введение инерционности в фильтре значительно усложняет области синхронизации биений в пространстве параметров и порождает мультистабильность и синхронизацию биений более высоких порядков и синхронизацию «в среднем».

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60080 мол_а_дк и № 16-32-00643 мол_а.

Авторы благодарят за частичную поддержку Министерство образования и науки России в рамках соглашения № 3.820.2014/К.

Библиографический список

1. *Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. 2-е изд. Москва: «СВЯЗЬ», 1972. 497 с.
2. *Линдсей В.* Системы синхронизации в связи и управлении /Пер. с англ. Под ред. Ю.Н. Бакаева и М.В. Капранова. М.: Сов. радио, 1978.
3. Lindsey W.C., Simon M.K., eds. Phase-locked Loops and Their Application. New York: IEEE Press, 1978.
4. *Best R.E.* Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications. 5th ed. New York: McGraw-Hill, 2003.
5. *Lindsey W.C.* Telecommunication Systems Engineering. Courier Dover Publications, 1972.
6. *Шалфеев В.Д., Матросов В.В.* Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. 366 с.
7. *Endo T., Chua L.* Chaos from phase-locked loops // IEEE Trans. Circuits Syst. 1988. Vol. 35. Issue 8. P. 987–1003.
8. *Endo T.* A review of chaos and nonlinear dynamics in phase-locked loops // J. Franklin Inst. 1994. Vol. 32. Issue 95. P. 859–902.
9. *Harb B.A., Harb A.M.* Chaos and bifurcation in a third-order phase locked loop // Chaos, Solitons & Fractals. 2004. Vol. 19. Issue 3. P. 667–672.

10. *Mishagin K.G. et al.* Multi-band chaotic oscillator with phase-locked loop // Progress In Electromagnetics Research Symposium Proceedings. Moscow, 2009. P. 1503–1507.
11. *Мищенко М.А., Шалфеев В.Д., Матросов В.В.* Нейроноподобная динамика в системе фазовой синхронизации // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 4. С. 122.
12. *Matrosov V.V., Mishchenko M.A., Shalfeev V.D.* Neuron-like dynamics of a phase-locked loop // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2013. Vol. 222. Issue 10. P. 2399–2405.
13. *Hoppensteadt F.C., Izhikevich E.M.* Pattern recognition via synchronization in phase-locked loop neural networks // IEEE Trans. Neural Netw. 2000. Vol. 11. Issue 3. P. 734–738.
14. *Chattopadhyay D., Mandal M.* Secure communication using chaotic synchronization of PLL // Int. J. Electron. Electr. 2010. Vol. 3. Issue 1. P. 17–22.
15. *Endo T., Chua L.* Synchronization of chaos in phase-locked loops // Circuits Syst. IEEE Trans. 1991. Vol. 38. Issue 12. P. 1580–1588.
16. *Endo T., Chua L.* Synchronizing chaos from electronic phase-locked loops // Circuits Syst. 1992. ISCAS'92. 1992. P. 3–6.
17. *Sarkar B.C., Chakraborty S.* Self-oscillations of a third order PLL in periodic and chaotic mode and its tracking in a slave PLL // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. Vol. 19. Issue 3. P. 738–749.
18. *Bueno A.M. et al.* Design constraints for third-order PLL nodes in master-slave clock distribution networks // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2010. Vol. 15. Issue 9. P. 2565–2574.
19. *Алешин К.Н., Матросов В.В., Шалфеев В.Д.* Динамика малых ансамблей систем фазовой синхронизации с однонаправленными связями // Изв. вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59, № 1. С. 55–66.
20. *Хрисанфова С.О., Кадина Е.Ю., Губина Е.В., Коган Л.В., Осипов Г.В.* Динамика системы двух нелинейно связанных маятников // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 3. С. 4–20.
21. *Матросов В.В.* Динамика двух параллельно связанных фазоуправляемых генераторов с малоинерционными цепями управления // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 1. С. 25–37.
22. *Матросов В.В.* Динамика двух фазоуправляемых, связанных через нелинейный элемент генераторов с малоинерционными цепями управления // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 3. С. 15–32.

References

1. Shahgildyan V.V., Lyahovkin A.A. Phase-Locked Loops. 2nd ed. Moscow: Svyaz, 1972. 497 p. (in Russian).
2. Lindsey W.C. Synchronization Systems in Communication and Control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1972.
3. Lindsey W.C., Simon M.K., eds. Phase-Locked Loops and Their Application. New York: IEEE Press, 1978.

4. Best R.E. Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications. 5th ed. New York: McGraw-Hill, 2003.
5. Lindsey W.C. Telecommunication Systems Engineering. Courier Dover Publications, 1972.
6. Shalfeev V.D., Matrosov V.V. Nonlinear Dynamics of Phase-Locked Loops. Nizhni Novgorod: Izd. Nizhegorodskogo gosuniversiteta, 2013. 366 p. (in Russian).
7. Endo T., Chua L. Chaos from phase-locked loops. *IEEE Trans. Circuits Syst.* 1988. Vol. 35. Issue 8. P. 987–1003.
8. Endo T. A review of chaos and nonlinear dynamics in phase-locked loops. *J. Franklin Inst.* 1994. Vol. 32. Issue 95. P. 859–902.
9. Harb B.A., Harb A.M. Chaos and bifurcation in a third-order phase locked loop. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2004. Vol. 19. Issue 3. P. 667–672.
10. Mishagin K.G. et al. Multi-band chaotic oscillator with phase-locked loop. *Progress In Electromagnetics Research Symposium Proceedings*. Moscow, 2009. P. 1503–1507.
11. Mischenko M.A., Shalfeev V.D., Matrosov V.V. Neuron-like dynamics in phase-locked loop. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2012. Vol. 20, № 4. P. 122 (in Russian).
12. Matrosov V. V., Mishchenko M.A., Shalfeev V.D. Neuron-like dynamics of a phase-locked loop. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2013. Vol. 222. Issue 10. P. 2399–2405.
13. Hoppensteadt F.C., Izhikevich E.M. Pattern recognition via synchronization in phase-locked loop neural networks. *IEEE Trans. Neural Netw.* 2000. Vol. 11. Issue 3. P. 734–738.
14. Chattopadhyay D., Mandal M. Secure Communication using Chaotic Synchronization of PLL. *Int. J. Electron. Electr.* 2010. Vol. 3, № 1. P. 17–22.
15. Endo T., Chua L. Synchronization of chaos in phase-locked loops. *Circuits Syst. IEEE Trans.* 1991. Vol. 38. Issue 12. P. 1580–1588.
16. Endo T., Chua L. Synchronizing chaos from electronic phase-locked loops. *Circuits Syst.* 1992. ISCAS'92. 1992. P. 3–6.
17. Sarkar B.C., Chakraborty S. Self-oscillations of a third order PLL in periodic and chaotic mode and its tracking in a slave PLL. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2014. Vol. 19. Issue 3. P. 738–749.
18. Bueno A.M. et al. Design constraints for third-order PLL nodes in master-slave clock distribution networks. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2010. Vol. 15. Issue 9. P. 2565–2574.
19. Aleshin K.N., Matrosov V.V., Shalfeev V.D. The Dynamics of Small-Sized Ensembles of the Phase-Locked Loops with Unidirectional Couplings. *Radiophys. Quantum Electron.* 2016. Vol. 59, № 1. P. 48–58.
20. Khrisanfova S., Kadina E., Gubina E., Kogan L., Osipov G. The dynamics of the

two nonlinearly coupled oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24, № 3. P. 4–20 (in Russian).

21. Matrosov V.V. Dynamics of two parallel phase-locked-loops with low-inertia control loops. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2006. Vol. 14, № 1. P. 25–37 (in Russian).
22. Matrosov V.V. Dynamics of two phase-locked-loop system coupled through the phase discriminator. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2007. Vol. 15, № 3. P. 15–32 (in Russian).

Поступила в редакцию 7.12.2016

Мищенко Михаил Андреевич – родился в Нижнем Новгороде (1987), окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2010). Кандидат физико-математических наук (2013). Область научных интересов – нейродинамика, нелинейная динамика и синхронизация. Научный сотрудник и старший преподаватель кафедры теории колебаний и автоматического регулирования Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: mischenko@neuro.nnov.ru

Матросов Валерий Владимирович – родился в 1960 году, окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1982) по специальности «прикладная математика». Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1994), доктора физико-математических наук (2007). С 1999 года работает на радиофизическом факультете ННГУ, в настоящее время – профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования. Область научных интересов – динамика нелинейных систем, динамический хаос, синхронизация и управление хаосом, математическое моделирование. Имеет более 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, является соавтором двух монографий и трех учебных пособий.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: matrosov@rf.unn.ru