КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР МАТЬЁ С КУБИЧЕСКОЙ СИЛОЙ, ТРЕНИЕМ И ШУМОМ

А. Л. Санин¹, А. А. Смирновский²

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия
195251 С.-Петербург, Политехническая, 29, E-mail: andreylsanin@yandex.ru

²Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Россия
194021 С.-Петербург, Политехническая, 26, E-mail: smirnovskysaha@gmail.com

Предложено обобщение на квантовую область движения классического дифференциального уравнения Матьё с кубической нелинейностью, диссипативным и ланжевеновским слагаемыми. Проблема перехода от классического поведения к квантовому имеет не только фундаментальное, но и прикладное значение. В качестве примера можно отметить осцилляторную динамику материальных объектов с малой массой при понижении температуры. Уравнение, описывающее квантовый осциллятор Матьё, представляет собой уравнение Шрёдингера–Ланжевена–Костина с потенциалом четвёртой степени, логарифмическим диссипативным и ланжевеновским слагаемыми. Численное интегрирование этого уравнения проведено при заданных начальном и граничных условиях с использованием конечно-разностного итерационного метода. Впервые в рамках предложенной модели детально анализируется временная эволюция динамических средних для координаты и скорости, стандартных отклонений и частотных спектров при разных условиях и параметрах системы. При слабом параметрическом воздействии колебания квантового осциллятора Матьё содержат одну или две спектральные компоненты на частотах перехода между соседними состояниями и на комбинационных частотах, обусловленных состояниями Флоке. Если амплитуда параметрического воздействия возрастает, то число спектральных компонент также увеличивается. Трение ведёт к затуханию колебаний. Многочастотный режим квантового осциллятора Матьё возникает, если амплитуда параметрического воздействия равна или превышает единицу, при этом параметрическая частота рационально не связана с частотами спектра. Разности частот соседних спектральных компонент могут равняться одной из двух частот спектра, либо их удвоенной сумме. Гауссов белый шум изменяет картину реализаций: при малом коэффициенте трения и умеренной интенсивности шума спектральные компоненты на комбинационных частотах становятся неразличимыми, остаётся заметной только одна компонента на частоте перехода из основного состояния в возбуждённое. Таким образом, проведённые исследования показывают существенную зависимость режима колебаний от параметров модели. Увеличение амплитуды внешнего воздействия приводит к усложнению спектров.

Ключевые слова: Квантовый осциллятор Матьё, кубическая сила, квазипериодичность, возбуждение шумом.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-3-54-67

Ссылка на статью: Санин А.Л., Смирновский А.А. Квантовый осциллятор Матьё с кубической силой, трением и шумом // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 3. С. 54–67.

Введение

Проблема перехода от классического поведения к квантовому является важной, она имеет не только фундаментальное, но и прикладное значение. В качестве примера можно отметить осцилляторную динамику материальных объектов с малой массой при понижении температуры, которая обсуждалась, например, в статьях [1,2]. В этих работах исследуется классический вынужденный осциллятор Дуффинга и переход его в квантовый осциллятор; проводится моделирование динамических закономерностей, когда энергия кванта колебаний $\hbar\Omega$ становится соизмеримой с тепловой энергией $k_B T_T$ термостата; частота Ω в этих работах находится в диапазоне сверхвысоких частот. Здесь $\hbar$, k_B , T_T – редуцированная постоянная Планка, постоянная Больцмана и температура термостата, соответственно.

Другая осцилляторная модель [3] нашла обширные приложения, она описывается классическим нелинейным уравнением Матьё в виде

$$\ddot{\zeta} + k\dot{\zeta} + (1 + \mu \cos \tau)\zeta^3 = 0, \quad (1)$$

где безразмерные величины k , μ , ζ , τ обозначают коэффициент трения, параметр внешней силы, координату и время, соответственно.

Если $k = 0$, $\mu = 0$, то уравнение (1) описывает автономный осциллятор с кубической «восстанавливающей» силой $-\zeta^3$, в этом случае его решениями являются эллиптические функции Якоби. При $k \neq 0$, $\mu \neq 0$ осциллятор испытывает воздействие параметрической внешней силы $-\mu \cos \tau \cdot \zeta^3$ с частотой $\Omega_{\text{ext}} = 1$ и силы трения $-k\dot{\zeta}$. В статье [3] детально исследовались субгармонические колебания при очень малых величинах k , μ . Кроме того, в этой работе обсуждаются условия возбуждения квазипериодических колебаний при $k = 0$ и затухание колебаний, если k превышает некоторое пороговое значение $k_0 = k_0(\Omega, \mu)$. Квантовое обобщение классического уравнения Матьё с кубической силой (как внутренней восстанавливающей, так и параметрической внешней), предлагаемое в настоящей работе, можно рассматривать как следующий шаг по отношению к задаче обобщения классического линейного уравнения Матьё. Это обобщение необходимо для развития теории квантовых осцилляторов, самоорганизации и может оказаться полезным при объяснении квантовых динамических закономерностей в других приложениях.

Чтобы обобщить классический нелинейный осциллятор Матьё (1) на квантовую область движения, используем простую модель на основе уравнения Шрёдингера–Ланжевена–Костина (ШЛК) [4, 5], которая используется в литературе и обобщалась также для более детального описания квантового движения (см., например, [6]). Помимо введения и заключения статья содержит три раздела, включающие описание уравнений квантового осциллятора Матьё с трением и случайной ланжевенновской силой и метода решения, а также результаты численного интегрирования уравнений ШЛК как без, так и с учетом ланжевенновской случайной силы.

1. Основные уравнения и численное интегрирование

Классическое уравнение Матьё (1) может быть обобщено на квантовую область движения через уравнение ШЛК [4, 5], которое в безразмерном виде для одно-

мерного случая записывается следующим образом:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + U_{\Sigma} \psi - \frac{ik}{2} \left(\ln \frac{\psi}{\psi^*} - \left\langle \ln \frac{\psi}{\psi^*} \right\rangle \right) \psi + U_{\text{rand}} \psi. \quad (2)$$

Уравнение (2) формулируется как уравнение движения, включающее омическое трение, внешний потенциал и ланжевеновский случайный источник U_{rand} . Данное уравнение анализировалось для квадратичных осцилляторов и для осциллятора Дуффинга во многих работах [7–11] как при $U_{\text{rand}} = 0$, так и с $U_{\text{rand}} \neq 0$. Оно определяет временную эволюцию волновой функции $\psi(\zeta, \tau)$, зависящей от координаты и времени и удовлетворяющей условию нормировки

$$\int_{-\zeta_L}^{\zeta_L} \psi^* \psi d\zeta = 1.$$

Рассматриваемая квантовая система ограничена непроницаемыми стенками в точках $\pm \zeta_L$ (ζ_L – полуширина системы). Символ $\langle \rangle$ означает усреднение в пространстве

$$\left\langle \ln \frac{\psi}{\psi^*} \right\rangle = \int \psi^* \ln \frac{\psi}{\psi^*} \psi d\zeta.$$

Полный потенциал U_{Σ} состоит из двух слагаемых

$$U_{\Sigma} = \zeta^4 + U_{\text{ext}}, \quad U_{\text{ext}} = U_0 \zeta^4 \sin(\Omega_{\text{ext}} \tau), \quad (3)$$

где U_0, Ω_{ext} – амплитуда и частота параметрического внешнего воздействия. В (3) мы полагаем $U_0 \leq 1$. Если $U_0 > 1$, то потенциал U_{Σ} становится знакопеременным. Для сохранения знака U_{Σ} при вариациях U_0 в формуле (3) с U_{ext} можно заменить временной множитель на $\sin^2 \Omega_{\text{ext}} \tau$, тогда выражение для полного потенциала можно представить в виде

$$U_{\Sigma} = \left(1 + \frac{U_0}{2} \right) \zeta^4 - \frac{1}{2} U_0 \zeta^4 \cos(2\Omega_{\text{ext}} \tau). \quad (4)$$

Теперь величина U_0 играет двоякую роль: как дополнение к единице в стационарном слагаемом (4), так и в качестве параметрического амплитудного множителя в произведении с косинусоидальным временным множителем. В соответствии с (3), (4) классическая сила $f_{\text{кл}} = -\partial U_{\Sigma} / \partial \zeta$ состоит из двух слагаемых (стационарного и нестационарного), пропорциональных кубу координаты ζ , как в работе [3].

Диссипативные свойства рассматриваемой системы зависят от коэффициента трения k , а величина $\ln(\psi/\psi^*)$ может быть представлена в виде

$$\ln \left(\frac{\psi}{\psi^*} \right) = i (2 \arg(\psi) + 2n\pi),$$

где $\arg(\psi) = \arctg(\text{Im } \psi / \text{Re } \psi)$ – главное значение фазы. Следует отметить, что физически корректные решения имеют место, когда фаза является непрерывной функцией координаты ζ .

Если $k = 0$, $U_{\text{ext}} = 0$, то из уравнения (2) можно получить уравнение для собственных функций ϕ_n и собственных значений ε_n

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\zeta^2} + \zeta^4\right) \phi_n = \varepsilon_n \phi_n, \quad (5)$$

n – номер состояния.

Граничные условия на стенках системы и начальное условие задавались в виде

$$\psi(\pm\zeta_L, \tau) = 0, \quad \psi(\zeta, \tau = 0) = \psi_0(\zeta).$$

Здесь $\psi_0(\zeta)$ есть решение стационарного уравнения (5) для основного состояния. Колебания из основного состояния могут возбуждаться посредством отдельного кратковременного импульса с потенциалом

$$U = -\mathcal{F}_0 \zeta, \quad \tau \in (0; \Delta\tau),$$

где $\mathcal{F}_0$ – сила, которая действует в течение короткого времени $\Delta\tau$, много меньшего времени наблюдения (расчёта) T .

Потенциал ланжевеновского источника U_{rand} определяется как

$$U_{\text{rand}} = -\mathcal{F}_{\text{rand}} \zeta,$$

где $\mathcal{F}_{\text{rand}}$ – случайная сила, зависящая от времени. Эта функция представляет собой дельта-коррелированный гауссов шум с нулевым средним значением, а среднее от его квадрата является задаваемой величиной и характеризует дисперсию случайной силы. В расчётах эта сила задавалась в каждый момент времени следующим образом:

$$\mathcal{F}_{\text{rand}} = D\sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(2r - 1),$$

где D – величина дисперсии случайной силы; erf^{-1} – обратная функция ошибок; r – случайное число из диапазона $[0; 1]$, получаемое при помощи генератора случайных чисел.

Численное интегрирование нестационарного уравнения (2) было проведено при заданных начальном и граничных условиях при помощи итерационного конечно-разностного метода установления по псевдовремени, являющегося разновидностью метода простых итераций. Производные по координате аппроксимировались со вторым порядком точности, временная производная также вычислялась со вторым порядком точности (по методу Кранка–Николсон). В процессе вычислений контролировалось условие нормировки, которое сохранялось с точностью до 10^{-6} . Реализованный численный метод тестировался на различных задачах (в частности, на задачах для гармонического осциллятора).

Динамика квантового волнового пакета была исследована на основе эволюции плотности вероятности $N = \psi^* \psi$, а также средних значений динамических переменных: координаты $\langle \zeta \rangle$, скорости $\langle V \rangle$ и стандартных отклонений $\sigma_\zeta = \sqrt{\langle (\Delta\zeta)^2 \rangle}$, $\sigma_V = \sqrt{\langle (\Delta V)^2 \rangle}$ (под знаком радикала стоят средне-квадратичные отклонения координаты и скорости). Произведение $\sigma_\zeta \sigma_V$ определяет соотношение неопределённостей. С помощью метода быстрого преобразования Фурье проведён анализ квадратов модулей $|\Phi_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)|^2$, зависящих от частоты Ω и отражающих функциональную зависимость $\langle \zeta \rangle$ от времени. В дальнейшем используется обозначение $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega) = |\Phi_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)|^2$.

2. Квантовый осциллятор Матё с кубической силой

2.1. Слабое параметрическое воздействие. Ранее нами был исследован одномерный квантовый осциллятор с одночленным потенциалом четвёртой степени, ограниченный стенками непроницаемой ямы [11]. В рамках стационарного уравнения Шрёдингера (5) с $U = \xi^4$, $\xi_L = 3$ проанализированы энергетические уровни и частоты переходов между соседними уровнями. Результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1								
Спектр и разности энергий между соседними уровнями (частоты переходов)								
n	1	2	3	4	5	6	7	8
ϵ_n	0.6680	2.3936	4.6968	7.3357	10.2443	13.3793	16.7119	20.2208
$\Delta\epsilon_n$	1.7257	2.3032	2.6389	2.9086	3.1350	3.3326	3.5090	3.6692

Разница между соседними уровнями $\Delta\epsilon_n$, как функция номера состояния n , имеет излом. Если $\xi_L = 7$, то излом исчезает и зависимость $\Delta\epsilon_n$ от n аппроксимируется кривой $1.84n^{1/3}$. Для динамического режима при $U_0 > 1$, рассматриваемого ниже, спектр энергий и частоты перехода могут существенно отличаться от данных табл. 1.

Если параметрические слагаемые с временными множителями в формулах (3), (4) для U_Σ отсутствуют и $k = 0$, то при $\mathcal{F}_0 \neq 0$ возбуждаются свободные колебания плотности вероятности и соответствующие им колебания средней координаты $\langle \xi \rangle$. В этом случае система представляет квантовый автономный осциллятор с одночленным потенциалом четвёртой степени, свойства которого при разных значениях $\mathcal{F}_0$, k обсуждались нами ранее в [11]. Воздействие параметрической внешней силы на него определяет квантовый осциллятор Матё.

Наиболее простые режимы колебаний реализуются при $U_0 < 1$ и слабых кратковременных импульсах $\mathcal{F}_0$. В частности, такой простой режим имеет место при $U_0 = 0.1$, $\mathcal{F}_0 = -0.1$, $\Omega_{\text{ext}} = \Omega_1 = 1.7257$, $k = 0$ (рис. 1).

Как показано на рисунке, колебания средней координаты $\langle \xi \rangle$ характеризуются основным временным масштабом $2\pi/\Omega_{\text{ext}}$, слабая модуляция по амплитуде зависит от разности частот $\Omega_2 - \Omega_1$. Наибольшая фурье-компонента находится на частоте перехода Ω_1 . Здесь также присутствует спектральная компонента на комбинационной частоте $\Omega = \Omega_1 + \Omega_{\text{ext}}$. Как показано в [3], при введении диссипации с коэффициентом трения $k > k_0$ уравнение Матё описывает затухающие колебания. Аналогичные

Рис. 1. Средняя координата (а) и частотный спектр (б) для малых $\mathcal{F}_0$, U_0

процессы происходят для рассматриваемого квантового осциллятора Матьё с кубической силой и трением.

Результаты сравнения двух режимов колебаний (без трения и с его учётом) представлены на (рис. 2).

В обоих случаях колебания происходят выше некоторого уровня, обусловленного соотношением неопределённостей. Сравнение фрагментов *a* и *б* на рис. 2 позволяет продемонстрировать следующие различия: в системе с трением возникает переходный участок и установившиеся колебания с размахом амплитуды на порядок меньше, чем в случае без трения. Как и следовало ожидать, квантовый осциллятор Матьё с параметрической внешней силой также подчиняется соотношению неопределённостей.

Обсудим осцилляторные режимы при вариациях Ω_{ext} , однако, снова при малых величинах $\mathcal{F}_0$ и U_0 . Будем рассматривать варианты с $\mathcal{F}_0 = -0.1$, $U_0 = 0.1$, $k = 0$ и $\Omega_{\text{ext}} = 0.13 + 0.1n$, где $n = 1, 2, \dots, 8$. Как показывают расчёты, получающиеся комбинационные частоты спектра колебаний средней координаты удовлетворяют формуле $\Omega = \Omega_1 + l\Omega_{\text{ext}}$, где l являются положительными и отрицательными числами. Наиболее интенсивная спектральная компонента также имеет место на частоте $\Omega_1 = 1.7257$ (это частота перехода из основного в первое возбуждённое состояние). Если $n = 1$, то имеются три спектральные компоненты на комбинационных частотах с $l = -2, -1, 1$. При последующем увеличении n картина частотных спектров в целом сохраняется, либо из спектра пропадает одна из спектральных компонент, но возникает компонента на частоте перехода Ω_2 . Однако компонента на частоте Ω_1 по-прежнему является наиболее интенсивной в спектре. В целом, режимы колебаний являются достаточно простыми.

Более детально обсудим динамические закономерности при фиксированной величине Ω_{ext} и вариациях амплитуды U_0 . Полагаем $\Omega_{\text{ext}} = 0.25\Omega_1$, $k = 0$, $\mathcal{F}_0 = -0.1$. Если $U_0 = 0.1$, то получается простая эволюционная картина квантового осциллятора Матьё (рис. 3).

Плотность вероятности N на плоскости (ζ, τ) описывает локализацию квантового волнового пакета, который в основном распределён на интервале $\zeta \in [-1, 1]$

Рис. 2. Произведение стандартных отклонений для различных значений коэффициента трения k : *a* – 0, *б* – 0.1. Здесь $\mathcal{F}_0 = -0.1$, $U_0 = 0.1$, $\Omega_{\text{ext}} = 1.7257$, $k = 0$ и $k = 0.1$

Рис. 3. Динамические свойства осциллятора Матъё при малых U_0 : a – плотность вероятности N ; b – средняя координата $\langle \zeta(\tau) \rangle$; v – стандартное отклонение σ_ζ ; z – частотный спектр $F_{\langle \zeta \rangle}$

(тёмный цвет на рис. 3, a); он формирует зависимость $\langle \zeta(\tau) \rangle$ и $\sigma_\zeta(\tau)$ (рис. 3, b , v). Из рис. 3, v можно установить, что крупномасштабная огибающая колебаний повторяется через интервал $T \approx 14.286$ с частотой $\Omega \approx 0.4396$. Эта частота близка к величине $\Omega_{\text{ext}} = 0.25\Omega_1$. Фурье-спектр временной реализации $\langle \zeta(\tau) \rangle$ представлен на рис. 3, z , где компонента $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_1)$ является наиболее интенсивной. В дополнение к основной спектральной компоненте также достаточно сильно выражены компоненты на комбинационных частотах $\Omega_1 \pm \Omega_{\text{ext}}$, спектральные компоненты $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_2)$ и $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_1 - 2\Omega_{\text{ext}})$ являются слабыми. Такой режим колебаний квантового осциллятора Матъё на комбинационных частотах обусловлен состояниями Флоке, которые генерируются периодическим во времени потенциалом U_{ext} . Как и ранее, в рассматриваемом режиме введение трения приводит к затуханию колебаний.

По мере того как амплитуда U_0 увеличивается, временные реализации $\langle \zeta(\tau) \rangle$ и их частотные спектры подвергаются некоторым преобразованиям. Если амплитуду U_0 удвоить (то есть $U_0 = 0.2$), то заметно возрастут спектральные компоненты $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_1 \pm \Omega_{\text{ext}})$, амплитуды которых приблизятся к $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_1)$.

2.2. Многочастотные колебания. Последующие изменения динамических свойств можно проиллюстрировать путём сравнения частотных спектров для двух значений U_0 : $U_0 = 0.5$ и $U_0 = 1$, когда $\Omega_{\text{ext}} = 0.25\Omega_1$, $k = 0$, $\mathcal{F}_0 = -0.1$ (рис. 4).

Если $U_0 = 0.5$, то наиболее мощная спектральная компонента возникает на частоте $\Omega^* < \Omega_1$; другие спектральные пики имеют место на частотах $\Omega = \Omega^* + l\Omega_{\text{ext}}$, где $l = -3, -2, -1, 1, 2$.

Рис. 4. Частотный отклик при различных амплитудах параметрического воздействия U_0 : $a - 0.5$, $b - 1.0$; время наблюдения $T = 200$

Если в (3) амплитуда $U_0 = 1$, аргумент $\Omega_{\text{ext}}\tau = \pi/2 + m\pi$, то при m чётных $\Omega_\Sigma = 2\zeta^2$, а при нечётных – равна нулю. В отличие от режимов с $0.1 \leq U_0 \leq 0.5$ временные реализации $\langle \zeta(\tau) \rangle$ и их частотные спектры $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ заметно усложняются, возрастает как общее число спектральных дискретных компонент, так и число компонент на начальном участке спектра $0 \leq \Omega \leq \Omega_{\text{ext}}/3$, оказывающих влияние на общую картину функциональной зависимости $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$. Наиболее интенсивные спектральные фурье-компоненты реализуются на комбинационных частотах: $\Omega_m = \Omega_0 + m\Omega_{\text{ext}}$, $m = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$; на рис. 4, б они обозначены числами 1, 2, ..., 7. Более конкретные результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

Наиболее интенсивные компоненты $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_m)$ при $U_0 = 1$

m	-2	-1	0	1	2	3	4
Ω_m	0.2397	0.6711	1.1026	1.5340	1.9654	2.3969	2.8283
$F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_m)$	0.0515	0.0863	0.1220	0.0816	0.1025	0.0445	0.0289

Такая картина распределения мощности по комбинационным частотам является типичной для квантовых динамических систем с периодическим временным потенциалом. Для частоты Ω_0 величина $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_0)$ является максимальной. Малые частоты $\Omega_\alpha = 0.5\Omega_\beta$, $\Omega_\beta = 0.0959$, $\Omega_\gamma = \Omega_{\text{ext}}/3$ являются составными структурными элементами других частот. Временной масштаб $T_\gamma = 2\pi/\Omega_\gamma$ представляет утроение периода внешнего воздействия. Генерация колебаний с T_γ рассматривалась в классической задаче с уравнением (2) в [3]. В рассматриваемом нами квантовом аналоге имеет место группа частот с $\Omega_l = l\Omega_\gamma$, где $l = 1, 2, \dots$. Среди множества спектральных компонент $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_l)$ часть из них характеризуется локальными максимумами. Другая часть с частотами Ω_l , близкими к Ω_m , не имеет локальных максимальных значений, амплитуды их не обязательно малые.

Эти вычисления были проведены для $\langle \zeta(\tau) \rangle$, $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$, когда длина временной реализации составляла $T = 200$. При увеличении её в несколько раз можно улучшить разрешение малых частот Ω на участке $0 \leq \Omega \leq \Omega_{\text{ext}}/3$. Если взять длину временной реализации $T = 800$, то возрастает число разрешённых дискретных компонент на малых частотах. Отметим роль спектральной компоненты на частоте $\Omega_\delta = 0.1198$ в формировании структуры спектра вблизи комбинационных частот, рассмотренных выше (см. табл. 2). Спектральные линии $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_m)$ окружены сател-

литами с частотами $\Omega_m - \Omega_\beta$, $\Omega_m + \Omega_\delta$ и $\Omega_m \pm (\Omega_\beta + \Omega_\delta)$, причём $\Omega_\beta + \Omega_\delta = \Omega_{\text{ext}}/2$, а порядок расположения индексов β, δ отражает симметрию. В диапазоне частот $\Omega \in [0, 2.8]$ спектральные компоненты расположены на широкополосном «пьедестале». С увеличением частоты Ω амплитуды основных спектральных линий и спутников уменьшаются. В диапазоне $2.8 \leq \Omega \leq 3.8$ они становятся малыми по величине, а расстояния между ними по шкале частот соответствует малым частотам на участке $0 \leq \Omega \leq \Omega_{\text{ext}}/3$. Для параметров рассматриваемого режима с $U_0 = 1$ отношение частоты Ω_0 к $\Omega_{\text{ext}}/3$ наверняка не является рациональным числом. Фазовая траектория на плоскости $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$ не является изолированной и замкнутой, а в большей части располагается на торе. Оставшаяся (меньшая) часть заполняет область поперёк тора. Рассматриваемые многочастотные колебания относим к квазипериодическим. Более детальный анализ в стиле работ [12–15] предполагаем провести в дальнейшем.

Если амплитуда $U_0 > 1$ в выражении для потенциала (4), то генерируются более сложные многочастотные колебания. Для этого случая: во-первых, реконструируется спектр энергий и изменяются частоты переходов, обусловленные добавкой U_0 в коэффициенте стационарного слагаемого (4); во-вторых, увеличение U_0 во временном слагаемом приведёт к дополнительному изменению частотных спектров в динамике осциллятора. Если временное слагаемое удалить в выражении для U_Σ в формуле (4), тогда можно описать свободные колебания квантового осциллятора с одночленным потенциалом четвёртой степени $(1 + U_0/2)\zeta^4$. Если $U_0 = 5$, то коэффициент в стационарном слагаемом (4) равен $7/2$, а во временном – $5/2$. Решение стационарного уравнения Шрёдингера определяет спектр энергий и частоты переходов (табл. 3). По сравнению с данными для $U = \zeta^4$ (см. табл. 1) частоты переходов смещены в сторону более высоких значений.

Таблица 3

Спектр энергий, разности между уровнями (частоты переходов) для потенциала (4), $U_0 = 5$, $\zeta_L = 3$

n	1	2	3	4	5	6	7
ε_n	1.0142	3.6343	7.1311	11.1378	15.5533	20.3138	25.3736
$\Delta\varepsilon_n$	2.6200	3.4969	4.0067	4.4161	4.7599	5.0598	5.3276

Как и раньше, осцилляторный режим возбуждался при помощи начального кратковременного импульса с $\mathcal{F}_0 = -0.1$, $\Omega_{\text{ext}} = 1.7257$. Если трение отсутствует, временная реализация $\langle \zeta(\tau) \rangle$ и частотный спектр $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ имеют вид, как на рис. 5.

Рис. 5. Временная реализация $\langle \zeta(\tau) \rangle$ (а) и частотный спектр $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ (б) в режиме $U_0 > 1$

Компьютерные расчёты средней координаты $\langle \zeta \rangle$ и спектральной функции $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ были проведены на длине временной реализации $T = 200$, дополнительный контроль спектра проводился на длине $T = 2000$. Для заданной амплитуды $U_0 = 5$ частотный спектр (рис. 5, б) становится более сложным, чем в рассмотренных ранее режимах. Спектральная компонента на частоте $2\Omega_{\text{ext}}$ хорошо прослеживается. В этом режиме исследовано около 20 достаточно интенсивных спектральных компонент. Наиболее интенсивная спектральная компонента с номером 4 реализуется при $\Omega = 2.3969$, то есть при частоте меньшей, чем первая частота перехода 2.6200. Значения Ω близко распределены в интервале $[1, 4.6]$. Некоторые из них, отмеченные числами на рис. 5, б, связаны между собой простыми соотношениями. Эти соотношения линейно зависят от малого числа основных частот. Отметим, что разности $\Omega_3 - \Omega_2$, $\Omega_5 - \Omega_4$, $\Omega_6 - \Omega_5$, $\Omega_{10} - \Omega_9$ равны одному и тому же значению $\Omega_2 - \Omega_1$; $\Omega_7 - \Omega_6$ и $\Omega_9 - \Omega_8$ равны Ω_1 ; $\Omega_{10} - \Omega_8 = \Omega_2$ и $\Omega_4 - \Omega_3 = 2(\Omega_1 + \Omega_2)$. Таким образом, наблюдаются более сложные свойства сигнала, чем при $U_0 < 1$. Здесь уже частоты перехода явно не обнаруживаются. Влияние внешнего периодического потенциала (как его амплитуды, так и частоты) на динамику является определяющим.

2.3. Влияние гауссова шума на квантовый осциллятор Матё. Динамические закономерности квантового осциллятора Матё при одновременном воздействии регулярной кубической и случайной ланжевеновской сил проводились для режима с параметрами $U_0 = 0.1$, $\Omega_{\text{ext}} = \Omega_1/4$, $\Omega_1 = 1.7257$, $k = 0$ и $k = 0.1$. Ланжевеновская сила характеризуется дисперсией $D = 1$. Временная реализация для средней координаты дана на рис. 6, а. Она отражает сложный процесс, включающий мелкомасштабные осцилляции во времени относительно $\langle \zeta \rangle = 0$ и крупномасштабную огибающую. С одной стороны, воздействие случайной силы преобразует исходный регулярный процесс на комбинационных частотах и частотах, кратных $\Omega_{\text{ext}}/3$. С другой стороны, сложный сигнал можно рассматривать как трансформацию заданной случайной силы. Воздействие гауссова белого шума приводит к тому, что большинство спектральных компонент становится неразличимыми в шуме. Однако спектральная компонента $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_1) \approx 0.3$ на частоте $\Omega_1 = 1.7257$ усиливается действием шума; кроме того, спектральные компоненты на частотах $\Omega_1 \pm \Omega_{\text{ext}}$ достаточно сильно выражены.

Рис. 6. Временная реализация $\langle \zeta(\tau) \rangle$ (а) и частотный спектр $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ (б) при наличии гауссова шума ($k = 0$)

Рис. 7. Влияние трения на квантовый осциллятор Матьё (при наличии шума): a – реализация $\langle \zeta(\tau) \rangle$; b – частотный спектр

Включение силы трения (даже с относительно малым коэффициентом трения $k = 0.1$) изменяет картину временной реализации $\langle \zeta(t) \rangle$ и частотного спектра (рис. 7).

Основная спектральная компонента на частоте Ω_1 ослабевает по амплитуде почти на порядок. Спектральные компоненты на всех остальных комбинационных частотах становятся неразличимыми. Здесь мы ограничились изучением простых примеров, как ланжевеновская сила влияет на квантовый осциллятор Матьё.

Заключение

Классический параметрический осциллятор, описываемый уравнением Матьё с кубической силой, омическим трением и гауссовым шумом, обобщён на квантовую область движения. Как результат перехода, предложен квантовый осциллятор в контексте уравнения Шрёдингера–Ланжевена–Костина, названный квантовым осциллятором Матьё. Проведено численное моделирование квантовых динамических закономерностей осциллятора, включающих изучение временных реализаций средней координаты волнового пакета и их частотных спектров.

При слабой параметрической внешней силе, являющейся гармонической во времени и кубической по координате, осцилляторные режимы с комбинационными частотами отражают типичное поведение квантовой системы, обусловленные состояниями Флоке. Для этих режимов спектры частот имеют простую структуру – они состоят из нескольких основных частот и кратных гармоник частоты внешнего воздействия. Основная частота спектральной линии может совпадать с частотой перехода между осцилляторными состояниями или отличаться от неё. С увеличением амплитуды параметрического внешнего воздействия, например, при $U_0 = 1$ появляются дополнительные спектральные компоненты на субгармониках частоты внешнего воздействия. Если сила возрастает, например, до $U_0 = 5$, временные реализации для средней координаты и их частотные спектры становятся более сложными: частоты спектральных компонент подчиняются определённым соотношениям. Эти соотношения показывают, что все (или большинство) комбинационных частот зависят от

линейной комбинации первых двух частот. Трение в исследуемой квантовой системе вызывает затухание колебаний, как и для классического осциллятора Матъё с кубической силой и трением. Влияние гауссова белого шума на квантовый осциллятор Матъё моделируется для частных случаев.

Библиографический список

1. *Katz I., Retzker A., Straub R., Lifshitz R.* Signatures for a classical to quantum transition of a driven nanomechanical resonator // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 99. P. 040404.
2. *Katz I., Lifshitz R., Retzker A., Straub R.* Classical to quantum transition of a driven nonlinear nanomechanical resonator // *New J.Phys.* 2008. Vol. 10. P. 125023.
3. *Bartuccelli M.V., Berretti A., Deane J.H.B., Gentile G., Gourley S.A.* Selection rules for periodic orbits and scaling laws for a driven damped quartic oscillator // *Nonlinear analysis: Real world applications.* Elsevier, 2008. Vol. 9. P. 1966.
4. *Kostin M.D.* On the Schrödinger–Langevin equation // *J. Chem. Phys.* 1972. Vol. 57, № 9. P. 3589.
5. *Kostin M.D.* Friction in dissipative phenomena in quantum mechanics // *J. St. Phys.* 1975. Vol. 12, № 2. P. 145–151.
6. *Doebner H.-D., Goldin G.A., Nattermann P.* Gauge transformation in quantum mechanics and the unification of nonlinear Schrödinger equations // *J. Math. Phys.* 1999. Vol. 40, № 1. P. 49–63.
7. *Ván P., Fülöp T.* Stability of stationary solutions of the Schrödinger–Langevin equation // *Phys. Lett. A.* 2004. Vol. 323. P. 374–381.
8. *Sanin A.L., Smirnovsky A.A.* Oscillatory motion in confined potential systems with dissipation in the context of the Schrödinger–Langevin–Kostin equation // *Phys. Lett. A.* 2007. Vol. 372, № 1. P. 21–27.
9. *Санин А.Л., Смирновский А.А.* Физика. Квантовая динамика. Санкт-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 280 с.
10. *de Falco D., Tamascelli D.* Quantum annealing and the Schrödinger–Langevin–Kostin equation // *J. Phys. Rev. A.* 2009. Vol. 79. P. 012315.
11. *Санин А.Л., Смирновский А.А.* Квантовый ангармонический осциллятор с одночленным потенциалом, трением и внешним воздействием // *Изв. вузов. ПНД.* 2014. Т. 22, № 2. С. 103.
12. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
13. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. 368 с.
14. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Физика квазипериодических колебаний. Саратов: ИЦ «Наука», 2013. 252 с.
15. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Синхронизация квазипериодических колебаний с двумя частотами // *Изв. вузов. ПНД.* 2008. Т. 16, № 2. С. 87.

Поступила в редакцию 17.06.2016

MATHIEU QUANTUM OSCILLATOR WITH CUBIC FORCE, FRICTION AND NOISE

A. L. Sanin¹, A. A. Smirnovsky²

¹Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
Russia, 195251 St. Petersburg, Polytechnicheskaya, 29
E-mail: andreysanin@yandex.ru

²Ioffe Physical-Technical Institute of the RAS
Russia, 194021 St. Petersburg, Polytechnicheskaya, 26
E-mail: smirnovskysaha@gmail.com

Mathieu quantum oscillator as a generalization of the classical one with cubic force, friction and noise has been proposed. The problem of the transition from classical to quantum behavior is of importance not only for fundamental knowledge but also for applications. As an example one can mention the oscillatory motion of low mass objects at decreasing temperature. The equation describing Mathieu quantum oscillator is Schrodinger–Langevin–Kostin equation with the quartic potential, logarithmic dissipative and Langevin terms. The numerical integration of this equation was performed at specified initial and boundary conditions by using the iterative finite-difference method. At weak parametric external action, one or two spectral components on transition frequencies are generated as well as components on combined frequencies caused by the Floquet states. If the parametric amplitude increases then the number of spectral components is also grown. The friction causes damping as in the classic Mathieu oscillator. Multi-frequency regime of Mathieu quantum oscillator occurs if the parametric action amplitude is equal to or exceeds unity wherein the parametric frequency is not coupled rationally with spectrum frequencies. The frequency differences of neighboring spectral components can be equal to one of two frequencies in spectrum or its combination. The Gaussian white noise changes the realizations: at small friction coefficient and moderate noise intensity, the spectral components on combined frequencies become hidden, only component on transition frequency from ground state into first excited remains noticeable. Thus, the research shows a significant dependence of the oscillations on the model parameters. Increasing the amplitude of the external action leads to complication of the spectra.

Keywords: Quantum Mathieu oscillator, cubic force, quasiperiodicity, noise excitation.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-3-54-67

Paper reference: Sanin A.L., Smirnovsky A.A. Mathieu quantum oscillator with cubic force, friction and noise // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24, № 3. P. 54–67.

References

1. *Katz I., Retzker A., Straub R., Lifshitz R.* // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 99. P. 040404.
2. *Katz I., Lifshitz R., Retzker A., Straub R.* // *New J. Phys.* 2008. Vol. 10. P. 125023.
3. *Bartuccelli M.V., Berretti A., Deane J.H.B., Gentile G., Gourley S.A.* // *Nonlinear analysis: Real world applications*. Elsevier, 2008. Vol. 9. P. 1966.
4. *Kostin M.D.J.* // *Chem. Phys.* 1972. Vol. 57, № 9. P. 3589.
5. *Kostin M.D.J.* // *St. Phys.* 1975. Vol. 12, № 2. P.145.
6. *Doebner H.-D., Goldin G.A., Nattermann P.J.* // *Math. Phys.* 1999. Vol. 40, № 1. P. 49.
7. *Ván P., Fülöp T.* // *Phys. Lett. A.* 2004. Vol. 323. P. 374.
8. *Sanin A.L., Smirnovsky A.A.* // *Phys. Lett. A.* 2007. Vol. 372, № 1. P. 21.
9. *Sanin A.L., Smirnovsky A.A.* *Physics. Quantum dynamics*. St. Petersburg: Polytechnical University Press, 2012. 280 p. (in Russian).

10. *de Falco D., Tamascelli D.J.* // Phys. Rev. A. 2009. Vol. 79. P. 012315.
11. *Sanin A.L., Smirnovsky A.A.* // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2014. Vol. 22, № 2. P. 103 (in Russian).
12. *Rabinovich M.I., Trubetskov D.I.* Introduction in the theory of oscillations and waves. Moscow: Nauka, 1984. 432 p. (in Russian).
13. *Bergé P., Pomeau Y., Vidal C.* L'ordre dans le chaos. Paris: Hermann, 1984. 353 p. (in French).
14. *Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Stankevich N.V., Turukina L.V.* Physics of quasiperiodic oscillations. Saratov: Nauka, 2013. 252 p. (in Russian).
15. *Anisichenko V.S., Nikolaev S.M.* // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2008. Vol. 16, № 2. P. 87 (in Russian).

Санин Андрей Леонардович – родился в Ленинграде (1935). Окончил Ленинградский политехнический институт (1963) (инженер-физик). В настоящее время работает на кафедре «Теоретическая физика» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, доктор физико-математических наук, профессор кафедры. Область научных интересов: динамика квантовых осцилляторных систем с нелинейным классическим пределом, шредингеровско-ланжевеновский формализм, фундаментальное образование. Автор более 200 научных публикаций и нескольких монографий.

Россия, 195251 С.-Петербург, Политехническая, 29
 Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
 E-mail: andreysanin@yandex.ru

Смирновский Александр Андреевич – родился в Ленинграде (1982). Окончил магистратуру Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (2005) по направлению «Прикладные математика и физика», кандидат физико-математических наук. В настоящее время работает научным сотрудником в Физико-техническом институте им. А.Ф. Иоффе РАН и доцентом в Санкт-Петербургском политехническом университете Петра Великого. Область научных интересов: квантовая механика, гидроаэродинамика, численное моделирование. Опубликовал более 20 статей.

Россия, 194021 С.-Петербург, Политехническая, 26
 Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН
 E-mail: smirnovskysaha@gmail.com