МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ В АНСАМБЛЕ ФАЗОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

А.В. Шабунин

Национальный исследовательский Саратовский государственный университет
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

Работа посвящена исследованию мультистабильности бегущих волн в кольце периодических осцилляторов с диффузионными нелокальными связями. В ней проводится анализ влияния дальнего действия связей и характера изменения их интенсивности с расстоянием на устойчивость пространственно периодических режимов с разными значениями волновых чисел.

Исследования проводятся методом численного (компьютерного) эксперимента. В качестве модели выбрана система идентичных фазовых осцилляторов. Она является, с одной стороны, максимально простой, что открывает возможности для аналитического исследования, с другой стороны, позволяет исследовать на своем примере динамику произвольных автоколебательных систем с почти гармоническими колебаниями.

Проведенные исследования показали, что в ансамбле фазовых осцилляторов наблюдается мультистабильность в виде набора сосуществующих режимов бегущих вдоль кольца волн, каждая из которых характеризуется своим значением разности фаз между соседними осцилляторами. В случае стационарных связей, либо связей, медленно меняющихся с расстоянием, колебательный режим будет устойчивым пока суммарный набег фазы на интервале взаимодействия не превышает значения $\pi/2$. При быстро изменяющихся с расстоянием связях наблюдается стабилизация максимального значения разности фаз, при котором увеличение дальнего действия больше не влияет на число сосуществующих режимов. При этом, в ансамбле со сколь угодно большой дальностью связей сохраняется мультистабильность. Исследование бассейнов притяжения показало, что с ростом дальнего действия происходит уменьшение размеров бассейнов для коротковолновых режимов с одновременным ростом бассейна притяжения синфазных колебаний.

Ключевые слова: Синхронизация, мультистабильность, бегущие волны, фазовые осцилляторы.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-3-38-53

Ссылка на статью: Шабунин А.В. Мультистабильность в ансамбле фазовых осцилляторов с дальнедействующими связями // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 3. С. 38–53.

Введение

Колебательные и волновые процессы, наблюдаемые в системах, состоящих из большого числа взаимодействующих осцилляторов, являются предметом пристального внимания специалистов в различных областях математики, физики, химии, биологии и других наук, так как они демонстрируют множество интересных и важных для практического применения явлений, таких как синхронизация, самоорганизация и формирование пространственных структур. Одним из наиболее фундаментальных явлений в таких системах является синхронизация колебаний [1–3]. Синхронизация в ансамблях осцилляторов – одна из традиционных областей исследований для нелинейной динамики. Первые работы по изучению синхронизации в ансамблях рассматривали задачу частотной синхронизации в цепочке осцилляторов с гармоническим поведением [4–7]. В работе [6] было обращено внимание, что в подобных системах возможны режимы с разными фазовыми сдвигами между осцилляторами – то есть сосуществуют разные пространственные моды, названные позднее режимами *бегущих волн* (running waves, travelling waves). В дальнейшем режимы бегущих волн наблюдались и были исследованы как для ансамблей с периодическими колебаниями [8, 9], так и для ансамблей с хаотической динамикой [10–12]. Детальное описание динамики пространственно однородных и неоднородных волн, возникновение пространственно разупорядоченных колебательных режимов и особенности переходов между режимами с разными длинами волн для ансамбля автогенераторов с жестким возбуждением можно найти в работе [13].

Общие закономерности режимов бегущих волн удобно исследовать на самых простых моделях, например, в ансамбле фазовых осцилляторов [14]. Устойчивость различных сосуществующих режимов в цепочках фазовых осцилляторов с локальными связями исследовалась в работах [15, 16]. Динамике ансамблей осцилляторов с глобальными связями были посвящены статьи [17, 18] и множество последующих работ. В настоящем исследовании рассматривается промежуточный случай – кольцо осцилляторов с нелокальными связями, интенсивность которых зависит от расстояния между осцилляторами. Теоретический анализ таких систем был проведен в работе [19], где были определены достаточные условия устойчивости режимов бегущих волн в зависимости от величины дальнего действия связей, в том случае, когда их интенсивности являются монотонно невозрастающими с расстоянием (то есть либо остаются постоянными, либо монотонно убывают). Являются ли эти условия также и необходимыми? Иными словами, существуют ли в ансамбле фазовых осцилляторов аттракторы, не удовлетворяющие им? Будут ли обнаруженные в работе [19] условия справедливы за пределами ограничения на характер изменения силы связей? Ответам на эти вопросы посвящена первая часть данного исследования.

Существование тех или иных пространственных структур зависит не только от их устойчивости, но также и от размеров соответствующих бассейнов притяжения. Если размер бассейна непропорционально мал, либо он располагается в удаленных областях фазового пространства, соответствующие режимы оказываются практически нереализуемыми. Бассейны притяжения аттракторов многомерных систем – сравнительно мало изученная область в нелинейной динамике. В случае системы из двух осцилляторов с удвоениями периода подробный анализ был проведен в работах [20, 21]. В статье [9] рассматривалась эволюция бассейнов притя-

жения для квазигармонических генераторов при локальных связях. В данной работе мы рассматриваем изменения в бассейнах притяжения сосуществующих режимов в ансамбле с нелокальными связями при росте их дальности действия. Этому вопросу посвящена вторая часть статьи.

1. Бегущие волны в ансамблях с дальнodelствующими связями

Рассмотрим ансамбль из N одинаковых автогенераторов, в виде замкнутой в кольцо цепочки, где между отдельными осцилляторами существуют взаимные диффузионные связи, интенсивность которых зависит от расстояния

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sum_{d=1}^L \gamma(d) [\mathbf{h}(\mathbf{x}_{i+d} - \mathbf{x}_i) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_{i-d} - \mathbf{x}_i)]. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{x}$ – N -вектор динамических переменных; $\mathbf{f}$ – N -мерная вектор-функция, определяющая уравнения одиночного генератора; нижний индекс задает положение (номер) осциллятора в ансамбле; L – максимальная длина действия связей. Структура связей определяется с помощью вида функции связи $\mathbf{h}$ и неотрицательных коэффициентов связи $\gamma(d)$, меняющихся в зависимости от расстояния d между осцилляторами. В силу периодических граничных условий все арифметические операции с индексами осцилляторов осуществляются по модулю N и дальность связей L не может превышать $N/2$. В частном случае, при $L = 1$ получаем кольцо из локально связанных автогенераторов; при $L = N/2$ и $\gamma(1) = \gamma(2) = \dots = \gamma(L)$ – полносвязную сеть. В нашем исследовании мы будем рассматривать, как меняются свойства системы при переходе между этими граничными случаями.

Предположим, что колебания в системе (1) являются периодическими, то есть $\mathbf{x}_i(t + T) = \mathbf{x}_i(t)$ для всех i . В силу трансляционной симметрии уравнений системы (1) в ней существуют решения в виде бегущих вдоль кольца волн $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_1(t - (i - 1)\Delta t)$. Здесь Δt – разность фаз между колебаниями в соседних элементах ансамбля, которая может принимать лишь конечное число эквидистантных значений

$$\Delta t^{(K)} = \frac{KT}{N}, \quad (2)$$

где $K = 0, \pm 1, \dots, \pm(N - 1)$. Будем обозначать режим бегущей волны как $RW^{(K)}$ (Running Wave), где K – индекс, который, в соответствии с формулой (2), определяет величину временного сдвига между колебаниями соседних осцилляторов; в дальнейшем будем называть его «индексом бегущей волны». Волны с положительными индексами распространяются в сторону возрастания порядковых номеров осцилляторов, волны с отрицательными индексами – в противоположном направлении. Поскольку по всем остальным характеристикам «правые» и «левые» волны совершенно одинаковы, в дальнейшем будем рассматривать только неотрицательные значения K .

2. Волны в ансамбле фазовых осцилляторов

Многие характерные закономерности поведения ансамблей автогенераторов периодических колебаний можно определить, исследуя наиболее упрощенную фор-

му парциальной системы в виде фазового осциллятора: $\dot{x} = \Omega$, $h(x) = \sin(x)$. Система (1) в этом случае приобретает вид

$$\dot{x}_i = \Omega + \sum_{d=1}^L \gamma(d) [\sin(x_{i+d} - x_i) + \sin(x_{i-d} - x_i)]$$

и при переходе в движущуюся систему координат посредством замены переменных $x_i = \Omega t + \theta_i$ преобразуется к уравнениям

$$\dot{\theta}_i = \sum_{d=1}^L \gamma(d) [\sin(\theta_{i+d} - \theta_i) + \sin(\theta_{i-d} - \theta_i)], \quad (3)$$

где θ_i – 2π -периодические функции времени. Поскольку коэффициенты связи входят в уравнение (3) в виде сомножителей, мы можем перенормировать параметры связей, разделив их на $\gamma(1)$ и, соответственно, изменив масштаб по времени в $\gamma(1)$ раз

$$\theta'_i = \sum_{d=1}^L c(d) [\sin(\theta_{i+d} - \theta_i) + \sin(\theta_{i-d} - \theta_i)], \quad (4)$$

где $c(d) = \gamma(d)/\gamma(1)$. Возможность перенормировки связей демонстрирует, что колебания системы (3) не зависят от абсолютных значений связей, а определяются лишь характером их зависимости от d и параметром дальнего действия L .

Стационарные решения уравнений (4), $\theta_i(t) = \theta_{i0}$ соответствуют гармоническим колебаниям исходной «полномасштабной» системы: $X_i(t) = \cos(\Omega t + \theta_i(t))$. Если константы θ_{i0} линейно меняются вдоль цепочки осцилляторов, $\theta_{i0} = i\Delta\theta$ ($\Delta\theta$ – разность фаз между колебаниями соседних осцилляторов), то такой режим можно назвать режимом бегущих волн в ансамбле фазовых осцилляторов. Условие (2) в этом случае трансформируется в условие для разностей фаз в бегущей волне:

$$\Delta\theta^{(K)} = \frac{2\pi K}{N}. \quad (5)$$

3. Зависимость устойчивости бегущих волн от дальнего действия связей

Бегущие волны в ансамблях фазовых осцилляторов исследовались в ряде работ [8, 19]. Основное внимание было обращено на условие устойчивости для таких режимов в зависимости от параметров. В случае локальных связей было показано [8, 22], что эта устойчивость определяется фазовым сдвигом между соседними осцилляторами, то есть значением $\Delta\theta^{(K)}$: при $|\Delta\theta^{(K)}| < \pi/2$ волны устойчивы, а при $|\Delta\theta^{(K)}| > \pi/2$ – нет. В работе [19] теоретически определено *достаточное* условие для устойчивости режимов бегущих волн при дальнедействующих связях, монотонно убывающих с расстоянием: $c(1) \geq c(2) \geq \dots \geq c(L) > 0$. Данное условия полностью определяется суммарным набегом фазы на интервале дальнего действия L : при $|\sum_{d=1}^L \Delta\theta_i| < \pi/2$ соответствующий режим бегущей волны является устойчивым. В соответствии с формулой (5) можно установить верхнюю границу значения $\Delta\theta$, при

котором волна остается устойчивой

$$\Delta\theta_{\max} = \frac{\pi}{2L}, \quad (6)$$

соответствующее максимальному индексу волны

$$K_{\max} = \left[\frac{N}{4L} \right], \quad (7)$$

где скобки обозначают целую часть числа.

Установленное в работе Г. Эрментроута и Л. Рена [19] условие (6) является достаточным, то есть гарантирует устойчивость волн с $K < K_{\max}$. Является ли оно также необходимым, подобно условию устойчивости для локально связанных фазовых осцилляторов? Данный вопрос представляется важным и интересным для исследования. Кроме того, как известно, критерий (6) не зависит от конкретного закона спада силы связей с расстоянием и выполняется даже при постоянных связях. Поэтому, существует возможность, что он является более универсальным, чем это установлено в статье [19]. Будет ли данное условие определять также устойчивость при неспадающем характере связей, например, возрастающим, периодическом или случайном? Данный вопрос также является задачей настоящего исследования.

3.1. Стационарные или монотонно уменьшающиеся с расстоянием связи. Рассмотрим, является ли соотношение (7) необходимым условием устойчивости бегущей волны для стационарных или монотонно спадающих с расстоянием функций $c(d)$. Для этого методом численного эксперимента проинтегрируем систему (4), определив в каждом случае наиболее коротковолновый режим, остающийся устойчивым, и соотнесем этот режим с условием (7).

Будем использовать следующие виды зависимостей интенсивностей коэффициентов связи с расстоянием:

- (а) постоянные связи: $c(d) = 1$;
- (б) затухание по степенному закону: $c(d) = d^{-M}$;
- (с) экспоненциальное затухание: $c(d) = \exp(-a(d-1))$,

где $d \in [1 : L]$, $M = 1, 2, 3$ – положительная целочисленная константа, a – положительная вещественная константа. Графики $c(d)$ приведены на рис. 1, a в виде линий l_i , где буква нижнего индекса $i = a, b, c$ соответствует одной из указанных зависимостей.

Численное интегрирование проводилось для ансамбля из ста осцилляторов на интервале $0 \leq t \leq 1000$ при задании начальных условий в малой окрестности ($\sim 10^{-5}$) анализируемых стационарных решений: $\theta_i^{(K)} = 2\pi(i-1)K/N$. Результаты расчетов представлены на рис. 1, б в виде графиков $l_a - l_{c2}$; там же отображена теоретическая зависимость, полученная по формуле (6). Анализ результатов показывает, что для постоянных связей (кривая l_a) и связей, спадающих с расстоянием по обратному закону (кривая l_{b1}), формула Эрментроута дает весьма точную оценку для верхней границы $\Delta\theta$, выше которой режимы бегущих волн теряют устойчивость. Линия l_{b1} идет чуть выше линии l_a , но и в том и в другом случае при больших длинах единственным устойчивым режимом остается синфазный режим, переход к которому наблюдается при постоянных связях при $L = 34$, а при уменьшающихся

Рис. 1. *a* – графики $c(d)$, буквенный индекс линии соответствует виду зависимости: линии l_{b1} , l_{b2} , l_{b3} построены для $M = 1, 2, 3$, соответственно; линии l_{c1} и l_{c2} – для декрементов затухания $a = 0.4$ и $a = 0.8$, соответственно; *b* – зависимость максимального значения разности фаз между соседними осцилляторами ансамбля от дальнего действия связей L , обозначения линий совпадают с соответствующими на под-рисунке (*a*); сплошная линия отображает теоретическую оценку l_t (6)

связях – при $L = 39$. В то же время, при более быстром спадании $c(d)$ наблюдается иное поведение. При уменьшении коэффициентов связи по степенному закону с показателем $M = 2, 3$, а также по экспоненциальному закону, график на начальном этапе соответствует формуле (6), однако, при росте L начинает заметно отдаляться от нее. Например, при $L \geq 10$ кривая l_{c1} идет уже существенно выше линии l_t и, при $L \geq 15$, величина максимального фазового сдвига стабилизируется на уровне $\Delta\theta \simeq 0.19$. Аналогичное поведение характерно и для случая $a = 0.8$ (кривая l_{c2}), а также – для спадания по кубическому закону (линия l_{b3}). В последнем случае наблюдается небольшой участок аномальной зависимости $\Delta\theta_{\max}$ от L , когда увеличение дальнего действия от $L = 4$ до $L = 6$ приводит к росту $\Delta\theta_{\max}$.

Таким образом, при быстром затухании коэффициентов связи с расстоянием численные исследования демонстрируют существование устойчивых режимов бегущих волн с индексами, значительно превосходящими величину (7). Данный результат не противоречит закономерностям, установленным в работе [19], поскольку, как уже было отмечено выше, они устанавливают достаточные, а не необходимые условия устойчивости. Однако нужно отметить, что замеченное расхождение наблюдается только в области малых значений коэффициентов связей. Получается, что в численном эксперименте система «не замечает» слишком слабых связей, что может определяться динамикой системы (4), но может быть вызвано конечной точностью расчетов. Для того чтобы выяснить, не обусловлена ли выявленная зависимость недостаточной точностью вычислений, эксперименты были повторены с измененными параметрами расчетной схемы. Как оказалось, ни изменение шага интегрирования, ни увеличение времени счета, ни увеличение точности представления вещественного числа в компьютере за счет увеличения его разрядной сетки не приводят к сколь-нибудь существенным изменениям полученных данных.

Как показывает анализ экспериментальных результатов, при экспоненциальном затухании интенсивностей связей величина декремента затухания определяет максимальную величину разности фаз между осцилляторами, которая возможна в ансамбле. Если построить зависимость $\Delta\theta_{\max}$ от a , то можно обнаружить, что она близка к линейной в широкой области значений параметров. График такой зависи-

Рис. 2. Зависимость максимального значения разности фаз устойчивых режимов от декремента затухания a при экспоненциальном спаде коэффициентов связи с расстоянием

мости приведен на рис. 2. Видно, что экспериментальные точки достаточно точно ложатся на прямую $\Delta\theta_{\max} = 0.56a$, которая отображена на том же рисунке штриховой линией. Таким образом, в ансамбле с экспоненциальным затуханием коэффициентов связи можно ожидать колебательные режимы с фазовым сдвигом в пределах $-0.56a \leq \Delta\theta \leq 0.56a$. Данная закономерность не зависит от числа осцилляторов в ансамбле и воспроизводится для цепочек разной длины.

3.2. Немонотонные связи. Про-

ведем исследования устойчивости бегущих волн при зависимостях $c(d)$, свободных от ограничений, используемых в работе [19]. Помимо рассмотренных выше монотонно спадающих связей, таковыми будут осциллирующие или возрастающие с расстоянием связи. Выберем следующие виды осциллирующих зависимостей:

- (д) периодическая модуляция: $c(d) = 1 + a \sin\left(\frac{2\pi(d-1)}{M}\right)$;
- (е) случайное распределение: $c(d) = \xi(d)$;
- (ф) меандр: $c(d) = 0.5 \left(1 + \text{sign}\left[\cos\left(\frac{2\pi(d-1)}{M}\right)\right]\right)$,

где a – вещественная положительная константа, M – целочисленная положительная константа, $\xi(d)$ – генератор шума с равномерным распределением в диапазоне $[0 : 1]$, $d \in [1 : L]$; при расчетах использовались значения $a = 0.2$, $M = 5$. Вид функций $c(d)$ приведен на рис. 3, а, а результаты расчетов максимальной разности фаз, при которой колебания сохраняют устойчивость, – на рис. 3, б.

Как видно из рисунка, все графики располагаются рядом с теоретической кривой (б). Из сопоставления кривых l_d и l_e с линией l_a , представленной на рис. 1, б, как периодическая так и случайная модуляция силы связей, происходящая

Рис. 3. а – графики $c(d)$; индекс линии соответствует виду зависимости; б – зависимость максимального значения разности фаз между соседними осцилляторами ансамбля от дальности связей L ; буквенный индекс линии соответствует виду зависимости $c(d)$, показанной на под-рисунке (а); штриховая линия l_t соответствует теоретической оценке (б)

в пределах интервала $[0 : 1]$, почти не влияет на устойчивость сосуществующих бегущих волн. Определенное расхождение между экспериментальными результатами и теоретическим предсказанием (6) наблюдается лишь для меандровой зависимости (f), при которой часть значений d «выключается» из интервала взаимодействия L . Для таких «слепых зон» кривая l_f представляет собой горизонтальную ступеньку, что обуславливает расхождение между l_d и l_t . После выхода из «слепой зоны» линия l_f скачком возвращается к теоретическому предсказанию (6). При больших дальностях, когда $L \gg M$, кривые практически перестают отличаться друг от друга.

Таким образом, мы видим, что флуктуации интенсивностей силы связей, ограниченные сверху единицей, слабо влияют на характер устойчивости режимов бегущих волн в системе (4) и на практике могут не приниматься во внимание. Как и в случае стационарных связей, устойчивость режима $RW^{(K)}$ определяется суммарным набегом фазы на интервале дальности действия L . Даже в том случае, когда отдельные диапазоны длин оказываются «выключенными» из интервала взаимодействия, набег фазы в этих «слепых зонах» должны учитываться при расчете устойчивости режима.

3.3. Возрастающие с расстоянием связи. Еще одним видом зависимости $c(d)$, выходящим за рамки ограничений, используемых в работе [19], является монотонный рост силы связей с расстоянием между осцилляторами. Несмотря на то, что подобный характер связей представляется аномальным для типичных природных или технических систем, он, тем не менее, может иметь интерес для каких-то специальных случаев. Рассмотрим два вида таких зависимостей (рис. 4, а):

- (г) линейный рост: $c(d) = 1 + a(d - 1)$;
- (h) экспоненциальный рост: $c(d) = \exp(a(d - 1))$.

Полученные в ходе численного исследования графики $\Delta\theta_{\max}(L)$ представлены на рис. 4, б. В расчетах использовались значения коэффициентов линейного роста: $a = 0.15$ (кривая l_{g1}), $a = 0.4$ (кривая l_{g2}), $a = 0.8$ (кривая l_{g3}) и значение инкремента экспоненты $a = 0.15$ (кривая l_h). Во всех рассмотренных случаях наблюдается качественно одинаковый характер зависимостей: сначала, при небольших L ,

Рис. 4. а – графики $c(d)$, буквенный индекс линии соответствует виду зависимости: линии l_{g1} , l_{g2} , l_{g3} построены для $a = 0.1$, 0.4 , 0.8 , соответственно; линия l_h – для инкремента $a = 0.15$; б – зависимость максимального значения разности фаз между соседними осцилляторами ансамбля от дальности действия связей L , обозначения линий совпадают с соответствующими на под-рисунке (а)

Рис. 5. Зависимость максимального дальнего действия, при котором существуют устойчивые несинфазные режимы, от инкремента a при экспоненциальном возрастании коэффициентов связи с расстоянием

возрастания коэффициентов связи с расстоянием по экспоненциальному закону приведена на рис. 5. Для $a \geq 0.1$ она достаточно хорошо аппроксимируется степенной функцией $L'(a) = 4.76a^{-0.65}$, график которой построен на том же рисунке пунктирной линией.

4. Эволюция бассейнов притяжения аттракторов при росте дальнего действия связей

Возможность реализации того или иного колебательного режима в эксперименте определяется не только его устойчивостью, но и размером области притяжения соответствующего аттрактора. В работе [9] было показано, что в ансамбле генераторов ван дер Поля с локальными связями коротковолновые режимы имеют существенно меньшие бассейны притяжения по сравнению с бассейнами аттракторов длинноволновых режимов. В связи с этим коротковолновые режимы практически не имеют шанса быть обнаруженными в системе при произвольном задании начальных условий. Каково соотношение между размерами бассейнов притяжения аттракторов при нелокальном характере связей? Как меняются бассейны притяжения волн разной длины с увеличением интервала взаимодействия L ?

Проведем оценку размеров бассейнов притяжения бегущих волн $RW^{(K)}$ в зависимости от дальнего действия L . В силу высокой размерности фазового пространства системы (4) построение бассейнов притяжения прямым перебором начальных значений не представляется возможным. Поэтому, будем оценивать относительные размеры бассейнов притяжения разных режимов по вероятностям их появления при случайном задании начальных условий с равномерным распределением: $\theta_i(0) = \xi(i)$, где $\xi(i)$ – случайная функция целочисленного аргумента. По результатам численного интегрирования уравнений (4) с указанных начальных условий определяются вероятности появления бегущих волн с индексом K :

$$P^{(K)} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M_K}{M},$$

где M – число наборов начальных условий, M_K – число появлений устойчивого режима с индексом K .

графики идут вдоль теоретической зависимости l_t , затем, при достижении определенного критического значения дальнего действия L' , происходит «срыв» к нулю. В результате, в ансамбле с монотонно растущими с расстоянием связями переход к моностабильному состоянию, при котором в фазовом пространстве исчезают все режимы бегущих волн и остаются лишь синфазные колебания, происходит при существенно меньших значениях L , чем в ансамбле со стационарными связями. Зависимость критического значения L' от параметра a для

Результаты численного счета для постоянных связей $c(d) = 1$, полученные при переборе 100000 начальных условий, представлены на рис. 6. При локальной связи (рис. 6, а) в эксперименте наблюдались лишь бегущие волны с $K = 0$ до $K = 8$. Более коротковолновые режимы за время счета не были обнаружены. Как следует из диаграммы, наиболее вероятно появление волны $RW^{(1)}$. При этом синфазный режим $RW^{(0)}$ и волна $RW^{(2)}$ имеют близкие значения вероятностей появления, которые существенно превосходят эти значения для остальных режимов. При $K \geq 3$ вероятность появления волны меньше одного процента и быстро убывает с ростом индекса волны.

Рост дальности действия связей приводит к дальнейшему «вымыванию» коротковолновых режимов, вероятность появления которых уменьшается с ростом L за счет перераспределения вероятностей в пользу синфазного режима. В результате, при $L = 10$ (рис. 6, д) волны с $K > 3$ перестают наблюдаться в системе (4), хотя и сохраняют устойчивость; при $L = 16$ наблюдаются только режимы с $K = 0, 1$; при $L = 24$ – вероятность возникновения последнего несинфазного режима становится порядка 1% (рис. 6, е).

На рис. 7 построены графики зависимости вероятности появления волны с индексом K от интервала дальности действия связей L . Результаты приведены для четырех режимов: для синфазных колебаний (линия l_0), для волны

Рис. 6. Диаграммы вероятностей установления различных мод при увеличении дальности действия связей в ансамбле: при $L = 1$ (а); 3 (б); 6 (в); 10 (д); 16 (е); 24 (е). Сплошные линии соответствуют постоянным связям $c(d) = 1$, кружки – связям, убывающим обратно расстоянию $c(d) = 1/d$, крестики – связям, убывающим по экспоненциальному закону $c(d) = \exp(-0.4d)$; вертикальная пунктирная линия на под-рисунках (б)–(е) отмечает границу устойчивости бегущих волн, согласно формуле (7)

Рис. 7. Зависимости вероятностей появления различных мод от дальности действия L при случайном задании начальных условий; нижний индекс в обозначении линий соответствует индексу моды

вая мода бегущих волн $RW^{(1)}$ (кривая l_1) имеет большую вероятность возникновения, чем синфазный режим при коротких связях $L \leq 5$, достигая своего максимума при $L = 3$, а затем вероятность монотонно спадает до нуля при росте дальности действия. Все остальные моды монотонно уменьшаются с ростом дальности действия, демонстрируя чрезвычайно малую вероятность появления соответствующих режимов при дальнедействующих связях.

При связях, интенсивности которых уменьшаются с расстоянием, качественный вид зависимостей вероятностей от L сохраняется, однако, сами величины $P^{(K)}$ меняются. На рис. 6 помимо случая постоянных связей построены также графики $P^{(K)}$ для связей уменьшающихся обратно расстоянию: $c(d) = 1/d$ (значения вероятностей отображаются кружками) и связей, уменьшающихся по экспоненциальному закону: $c(d) = \exp(-ad)$ при $a = 0.4$ (значения вероятностей отображаются крестиками). И в том и в другом случаях характерно увеличение вероятностей появления более коротковолновых режимов, по сравнению со случаем постоянных связей. В некоторых случаях (см. например, рис. 6, г, д, е) наблюдаются режимы, находящиеся за границей устойчивости, определяемой формулой (7).

Таким образом, ансамбли с большим радиусом действия связей при случайном задании начальных условий практически всегда демонстрируют синфазные колебания. Наиболее длинноволновые режимы могут встретиться лишь при малых интервалах действия связей; коротковолновые же режимы не имеют шансов быть обнаруженными вовсе. Тем не менее, все устойчивые волновые режимы $RW^{(K)}$ могут быть реализованы в системе (4), если начальные условия задавать специальным образом. Например, задавая $\theta_i(0)$ равномерно вдоль ансамбля с фиксированным шагом $\Delta\theta$: $\theta_i(0) = i\Delta\theta$. Результаты расчетов результирующих режимов для данного способа выбора начальных условий приведены на рис. 8. При $L = 1$ зависимость K от величины шага $\Delta\theta$ представляет собой лестничную структуру (линия l_1), «ступеньки» которой имеют почти равную ширину. При увеличении дальности действия уменьшается число «ступенек» (линии $l_2 - l_5$), поскольку с ростом L меньшее число волн остаются устойчивыми, однако, размеры «ступенек» практически не претерпевают изменения. Наблюдается лишь незначительное смещение их в сторону больших $\Delta\theta$.

с $K = 1$ (линия l_1), волны с $K = 2$ (линия l_2) и волны с $K = 3$ (линия l_3). Графики для более коротковолновых мод располагаются существенно ниже кривой l_3 и качественно схожи с ней. Как видно из графиков, вероятность возникновения синфазных колебаний монотонно возрастает при росте дальности действия связей от $P^{(0)} \simeq 0.22$ в кольце локальных фазовых осцилляторов до $P^{(0)} = 1$ при $L = 25$ (при $L \geq N/4$ синфазные колебания – глобально устойчивый режим). Характер зависимости хорошо аппроксимируется зависимостью $P^{(0)}(L) \sim \sqrt{L}$. Наиболее длинноволно-

Рис. 8. Зависимости индекса моды K от выбора шага задания начальных условий $\Delta\theta$ для ансамблей с разным дальностью действия; нижний индекс в обозначении линий – параметр дальности действия связей L

Заключение

Проведены численные исследования и получены эмпирические закономерности зависимости устойчивости мультистабильных состояний и их бассейнов притяжения от параметра дальности действия L в кольце фазовых осцилляторов с нелокальными связями. Полученные результаты были сопоставлены с аналитической формулой из работы [19]. Исследование показало, что в ансамбле фазовых осцилляторов наблюдается мультистабильность в виде набора сосуществующих режимов бегущих вдоль кольца волн, каждая из которых характеризуется своим значением разности фаз $\Delta\theta$ между соседними осцилляторами. В случае стационарных связей, либо связей не слишком быстро меняющихся с расстоянием, хорошей оценкой «сверху» для $\Delta\theta$ будет «критерий Эрментроута»: суммарный набег фазы на интервале взаимодействия не должен превосходить значения $\pi/2$. Данная оценка остается справедливой даже при наличии «слепых зон» в интервале взаимодействия, то есть в том случае, когда связи оказываются выключенными для определенных дистанций внутри интервала. Увеличение L ведет к «вымыванию» коротковолновых режимов и при большой дальности взаимодействия – к установлению глобально устойчивого режима синфазных колебаний.

При быстро изменяющихся с расстоянием связях формула из работы [19] не является более необходимым условием устойчивости бегущих волн в ансамбле. Если сила связи уменьшается с расстоянием по экспоненциальному или обратному степенному закону с показателем два и выше, наблюдается «стабилизация» значе-

ния $\Delta\theta_{\max}$, при которой дальнейший рост L не влияет на число сосуществующих режимов. При этом, в ансамбле со сколь угодно большой дальностью связей сохраняется мультистабильность. При связях, интенсивность которых растет с расстоянием, критерий Эрмента более не является достаточным условием устойчивости бегущих волн. Переход к глобально устойчивому синфазному режиму происходит тем быстрее, чем быстрее растут коэффициенты связи с расстоянием.

Исследование бассейнов притяжения показало, что с ростом дальности действия происходит уменьшение размеров бассейнов для коротковолновых режимов с одновременным ростом бассейна притяжения синфазных колебаний. При случайном задании начальных условий лишь синфазные колебания и несколько самых длинноволновых режимов реализуются в ансамбле; коротковолновые режимы, даже будучи устойчивыми, имеют слишком малую вероятность к появлению, особенно при увеличении дальности действия связей.

Все результаты численных исследований, представленные в работе, получены для фиксированного значения размеров ансамбля: $N = 100$. Сопоставление экспериментальных значений $\Delta\theta_{\max}$, рассчитанных для других N ($N = 50$ и $N = 200$), показало, что величина максимального фазового сдвига, как этого и следовало ожидать, инвариантна к длине кольца. Однако подобной инвариантностью не обладают закономерности эволюции бассейнов притяжения, полученные в последнем разделе. Здесь при изменении N сохраняется лишь качественный вид зависимостей, в то же время сами значения вероятностей выхода на тот или иной режим изменятся.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 1008).

Библиографический список

1. Blekhnman I.I., Landa P.S., Rosenblum M.G. Synchronization and chaotization in interacting dynamical systems // Appl. Mech. Rev. 1995. Vol. 11, part 1. P. 733–752.
2. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. Синхронизация автоколебаний и колебаний, индуцированных шумом // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47. С. 133–165.
3. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. Москва: Техносфера, 2003.
4. Малафеев В.М., Полякова М.С., Романовский Ю.М. О процессе синхронизации автогенераторов, связанных через проводимость // Известия вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13. С. 936.
5. Мынбаев Д.К., Шиланков М.И. Взаимная фазовая синхронизация генераторов, соединенных по кольцевой схеме // Радиотехника и электроника. 1981. № 2. С. 361.
6. Мальцев А.А., Силаев А.М. Режимы работы цепочки автогенераторов с «жесткими» предельными циклами, связанных с помощью реактивных элементов // Известия вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. С. 826.

7. Дворников А.А., Уткин Г.М., Чуков А.М. О взаимной синхронизации цепочки резистивно связанных автогенераторов // Известия вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. С. 1388.
8. Ermentrout G.B. The behaviour of rings of coupled oscillators // J. of Math. Biol. 1985. Vol. 23. P. 55.
9. Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 4. С. 37–54.
10. Matias M.A., Guezem J., Perez-Munuzuri V., Marino I.P., Lorenzo M.N., Perez-Villar V. Observation of a fast rotating wave in rings of coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78, № 2. P. 219–222.
11. Marino I.P., Perez-Munuzuri V., Perez-Villar V., Sanchez E., Matias M.A. Interaction of chaotic rotating waves in coupled rings of chaotic cells // Physica D. 2000. Vol. 128. 224–235.
12. Shabunin A., Astakhov V., Anishchenko V. Developing chaos on base of traveling waves in a chain of coupled oscillators with period-doubling. Synchronization and hierarchy of multistability formation // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2002. Vol. 12, № 8. P. 1895–1908.
13. Nekorkin V.I., Makarov V.A., Velarde M.G. Spatial disorder and waves in a ring chain of bistable oscillators // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1996. Vol. 6. P. 1845.
14. Kuramoto Y. Chemical Oscillations Waves and Turbulence. Berlin: Springer, 1984.
15. Ermentrout G.B., Kopell N. Symmetry and phase locking in chains of weakly coupled oscillators // Comm. Pure Appl. Math. 1986. Vol. 49. P. 623–660.
16. Ermentrout G.B., Kopell N. Phase transitions and other phenomena in chains of coupled oscillators // SIAM J. of Appl. Math. 1990. Vol. 50. P. 1014–1052.
17. Ermentrout G.B. Synchronization in a pool of mutually coupled oscillators with random frequencies // J. of Math. Biol. 1985. Vol. 22. P. 1–9.
18. Crawford J.D., Davies K.T.R. Synchronization of globally coupled phase oscillators: singularities and scaling for general couplings // Physica D. 1990. Vol. 125. P. 1–46.
19. Ren L., Ermentrout G.B. Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators // Physica D. 2000. Vol. 143. P. 56.
20. Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S. Multistability formation and synchronization loss in coupled Hennon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63. P. 056212.
21. Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P. Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symmetrically coupled period-doubling systems // Chaos, Solitons and Fractals. 2003. Vol. 15. P. 695–711.
22. Гуртовник А.С., Неймарк Ю.И. Синхронизмы в системе циклически слабосвязанных осцилляторов // Динамические системы: Межвузовский сборник научных трудов. Изд. Нижегородского университета. 1991. С. 84.

Поступила в редакцию 16.05.2016
После доработки 29.06.2016

MULTISTABILITY IN AN ENSEMBLE OF PHASE OSCILLATORS WITH LONG-DISTANCE COUPLINGS

A. V. Shabunin

National Research Saratov State University,
Astrakhanskaya, 83, 410012 Saratov, Russia
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

The work is devoted to investigation of multistability of running waves in a ring of periodic oscillators with diffusive non-local couplings. It analyzes the influence of long-range couplings and their change with distance on the stability of spatially-periodic regimes with different wave numbers.

The research are carried out by numerical (computer) experiments. The system under study is an ensemble of identical phase oscillators. It is, on the one hand the most simple model providing opportunities for analytical studies; on the other hand its properties can be generalized to an arbitrary ensemble of almost harmonic self sustained oscillators.

The studies have shown that multistability is observed in the ensemble of phase oscillators as a set of coexisting modes of waves running along the ring, the every of which characterizing by its own phase-shift between oscillations in the neighboring sites. In the case of stationary or slowly varying couplings a running wave mode remains stable while the total phase shift on the interval of interaction keeps to be less than $\pi/2$. When the couplings are decreased sufficiently fast, the stabilization of the maximum value of the phase shift is observed, so the further increase of range of interaction no longer affects the number of coexisting modes. Thus, the multistability keeps to exist in an ensemble with an arbitrarily distance of interconnection. The study the basins of attraction of the running waves have demonstrated that basins of long-wavelength modes are increased and simultaneously basins of short-wavelength modes are decreased while the range of interconnection grows.

Keywords: Synchronization, multistability, running waves, phase oscillators.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-3-38-53

Paper reference: Shabunin A.V. Multistability in an ensemble of phase oscillators with long-distance couplings // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24. Issue 3. P. 38–53.

References

1. *Blekhman I.I., Landa P.S., Rosenblum M.G.* // *Appl. Mech. Rev.* 1995. Vol. 11, part 1. P. 733–752.
2. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E.* // *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2002. Vol. 47, № 2. P. 117–148.
3. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, 2003.
4. *Malafeev V.M., Polyakova M.S., Romanovsky Yu.M.* // *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Radiofizika*. 1970. Vol. 13. P. 936 (in Russian).
5. *Mynbaev D.K., Shilenkov M.I.* // *Radiotekhnika i elektronika*. 1981. № 2. P. 361 (in Russian).
6. *Maltzev A.A., Silaev A.M.* // *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Radiofizika*. 1979. Vol. 22. P. 826 (in Russian).
7. *Dvornikov A.A., Utkin G.M., Chukov A.M.* // *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Radiofizika*, 1984. Vol. 27. P. 1388 (in Russian).
8. *Ermentrout G.B.* // *J. of Math. Biol.* 1985. Vol. 23. P. 55.

9. *Shabunin A.V., Akopov A.A., Astakhov V.V., Vadivasova T.E.* // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2005. Vol. 13, № 4. P. 37–54 (in Russian).
10. *Matias M.A., Guemez J., Perez-Munuzuri V., Marino I.P., Lorenzo M.N., Perez-Villar V.* // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, N 2. P. 219–222.
11. *Marino I.P., Perez-Munuzuri V., Perez-Villar V., Sanchez E., Matias M.A.* // *Physica D*. 2000. Vol. 128. 224–235.
12. *Shabunin A., Astakhov V., Anishchenko V.* // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2002. Vol. 12, N 8. P. 1895–1908.
13. *Nekorkin V.I., Makarov V.A., Velarde M.G.* // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1996. Vol. 6. P. 1845.
14. *Kuramoto Y.* *Chemical Oscillations Waves and Turbulence*. Berlin: Springer, 1984.
15. *Ermentrout G.B., Kopell N.* // *Comm. Pure Appl. Math.* 1986. Vol. 49. P. 623–660.
16. *Ermentrout G.B., Kopell N.* // *SIAM J. of Appl. Math.* 1990. Vol. 50. P. 1014–1052.
17. *Ermentrout G.B.* // *J. of Math. Biol.* 1985. Vol. 22. P. 1–9.
18. *Crawford J.D., Davies K.T.R.* // *Physica D*. 1990. Vol. 125. P. 1–46.
19. *Ren L., Ermentrout G.B.* // *Physica D*. 2000. Vol. 143. P. 56.
20. *Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S.* // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 63. P. 056212.
21. *Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P.* // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2003. Vol. 15. P. 695–711.
22. *Gurtovnik A.S., Neimark Yu.I.* // *Dinamicheskie sistemy: Mezhevuzovskiy sbornik nauchnyh trudov*. Nizhegorodskiy Universitet. 1991. P. 84 (in Russian).

Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доктор физико-математических наук (2008), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 75 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
 E-mail: shabuninav@info.sgu.ru