СТРАННЫЙ НЕХАОТИЧЕСКИЙ АТТРАКТОР ТИПА ХАНТА И ОТТА В СИСТЕМЕ С КОЛЬЦЕВОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

В. М. Дорошенко

Саратовский национальный исследовательский государственный университет

Рассмотрена физически реализуемая система кольцевой структуры, где при фиксированном иррациональном отношении базовых частот внешнего воздействия («золотое среднее») имеет место странный нехаотический аттрактор, аналогичный аттрактору в абстрактной модели отображения на торе, предложенному и проанализированному ранее Хантом и Оттом, как пример грубого странного нехаотического аттрактора. Представлены данные моделирования динамики на основе численного решения соответствующей неавтономной системы дифференциальных уравнений с квазипериодической зависимостью коэффициентов от времени. Продемонстрировано, что для введенных определенным образом фазовых переменных динамика за характерный период согласуется по топологии с моделью Ханта и Отта. Показано, что рождение странного нехаотического аттрактора соответствует критерию Пиковского–Фойдель. Представлены расчеты, свидетельствующие, что порождаемые системой фурье-спектры в режиме странного нехаотического аттрактора относятся к промежуточному классу между сплошными и дискретными спектрами (сингулярно-непрерывный спектр).

Ключевые слова: Странный нехаотический аттрактор, отображение Ханта и Отта, грубость, фрактальная структура, сингулярно-непрерывный спектр.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-1-16-30

Введение

Нелинейные системы, динамика которых протекает в присутствии зависящего от времени внешнего воздействия, играют значительную роль в науке и технике. Даже в том случае, когда воздействие периодическое, может возникать интересное поведение, сопровождаемое разнообразными нетривиальными эффектами, включая переходы от периодической динамики к хаотической и наоборот.

Если обратиться к рассмотрению более сложного воздействия, например, квазипериодического, при помощи суперпозиции двух гармонических сигналов с иррациональным соотношением частот, то оказывается возможным появление, в частности, таких интересных режимов динамики со специфическими свойствами, как странные нехаотические аттракторы (СНА) [1].

Аттракторы такого типа являются нехаотическими в том смысле, что принадлежащие им фазовые траектории не обладают экспоненциальной чувствительностью

к возмущениям (нет положительных показателей Ляпунова), но, в то же время, структура аттрактора как объекта в фазовом пространстве характеризуется фрактальными свойствами [2]. Такого рода объект впервые был введен в рассмотрение в 1984 году [1]. С тех пор аттракторы данного типа, довольно широко исследуются в системах с квазипериодическим воздействием. Они изучались на различных примерах теоретически, численно [3–17] и экспериментально [18–27]. Несмотря на это, следует отметить, что до сих пор не предложено метода, позволяющего с определенностью диагностировать присутствие СНА на основе численных расчетов. Все известные подходы не дают полной гарантии, что исследуемый аттрактор является странным, то есть сохраняет фрактальную структуру в сколь угодно малых масштабах. Чаще всего СНА является структурой, крайне чувствительной к вариации параметров, так как располагается у границы между регулярными и хаотическими режимами. Соответствующие области в пространстве параметров имеют сложное устройство, и при небольших изменениях управляющего параметра может иметь место трансформация СНА в аттрактор в виде гладкого тора или в странный хаотический аттрактор.

Специальный интерес представляет СНА, введенный Хантом и Оттом для отображений на торе с определенными топологическими свойствами, опираясь на которые, оказывается возможным природу аттрактора обосновать строго [15]. Более того, этот аттрактор, в предположении фиксированного и не подлежащего вариации иррационального отношения базовых частот, характеризуется свойством грубости (робастности), то есть динамика не чувствительна к выбору значений параметров и конкретного вида отображения [15–17].

Модель, предложенная Хантом и Оттом, описывается отображением

$$\begin{aligned}\phi_{n+1} &= \phi_n + \theta_n + \eta F(\phi_n, \theta_n) \pmod{2\pi}, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\omega \pmod{2\pi},\end{aligned}\tag{1}$$

где $\eta F(\phi_n, \theta_n)$ – непрерывная, гладкая функция, имеющая период 2π по обоим аргументам; η – параметр нелинейности; ω – иррациональный параметр, характеризующий частоту квазипериодического воздействия.

В качестве конкретного примера можно рассмотреть отображение (1) с нелинейной функцией $F(\phi_n, \theta_n) = \sin(2\phi)$, задав параметр частоты иррациональным числом $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$ (обратное «золотое среднее»).

Согласно анализу Ханта и Отта, подоплёкой присутствия грубого СНА служит

Рис. 1. *a* – схематическое изображение результата однократного действия отображения (1) на замкнутую кривую, обходящую тор в направлении θ ; *б* – фазовый портрет СНА в отображении (1) при $\eta F(\phi_n, \theta_n) = \sin(2\phi)$, $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$, $\eta = 0.3$

топологическая природа отображений на двумерном торе (рис. 1, *a*). А именно, кривая C , огибающая тор вдоль параллели, трансформируется при воздействии отображения в кривую C' , совершающую один оборот по меридиану и один по параллели. При каждой новой итерации отображения, у образа количество витков по меридиану увеличивается на единицу, а в пределе большого числа шагов стремится к бесконечности. Наличие неоднородности, обусловленной добавленным в первое уравнение нелинейным членом, имеет следствием фрактальную природу распределения инвариантной меры на аттракторе, о чем можно судить по виду диаграммы на рис. 1, *б*, представленной на плоскости переменных (θ, ϕ) при $\eta = 0.3$ [28].

Модель Ханта и Отта является абстрактной, и вопрос нахождения реальных систем, в которых присутствовали бы США именно такого типа, нетривиален. В качестве единственного на данный момент конкретного примера в работе А.Ю. Жалнина и С.П. Кузнецова [28] предложена и исследована численно неавтономная система, составленная из попеременно возбуждающихся автоколебательных элементов.

В статье рассматривается альтернативный вариант построения системы с аттрактором типа Ханта и Отта в виде кольцевой схемы, составленной из линейных фильтров второго порядка с включением усилительного нелинейного элемента и квазипериодической модуляцией коэффициентов передачи между элементами внешним воздействием с двумя несоизмеримыми частотами.

1. Описание системы

Рассмотрим кольцевую систему из двух связанных неавтономных осцилляторов, которым отвечают обобщённые координаты x и y . Модельные уравнения системы имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon \frac{d}{dt} y \sin(\omega_0 t + \theta), \\ \ddot{y} + \gamma \dot{y} + 4\omega_0^2 y &= \varepsilon \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \alpha^2 g(t) \sin(\omega_0 t) \right), \\ \dot{\theta} &= \frac{2\pi\omega}{T}, \quad \omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.\end{aligned}\tag{2}$$

В уравнениях (2) параметр ω_0 – собственная частота первого осциллятора, $2\omega_0$ – собственная частота второго осциллятора, γ – коэффициент затухания, ε – параметр, α – коэффициент усиления. Параметр ω – определен иррациональным числом «золотое среднее», что традиционно для исследований в области квазипериодической динамики в силу простоты представления этого числа цепной дробью и удобства соответствующего теоретического анализа.

Воздействие первого осциллятора на второй описывается комбинационным членом, стоящим в правой части второго уравнения и представляющим собой произведение нелинейной функции $x/\sqrt{1+x^2}$, периодической функции времени $g(t)$ и опорного периодического сигнала под знаком производной.

Функция $g(t)$ описывает модуляцию внешнего сигнала частоты ω_0 , состоящую в том, что модулирующий сигнал включается на короткие интервалы времени длительности τ , следующие с периодом $T = (2\pi N)/\omega_0$,

$$g(t) = \begin{cases} 1, & nT \leq t < \tau, \\ 0, & nT + \tau \leq t < (n+1)T. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь N – целое число и результирующий сигнал является периодическим.

Воздействию второго осциллятора на первый отвечает комбинационный член в первом уравнении, заданный в виде произведения сигнала второго осциллятора на опорный сигнал с частотой, состоящей в иррациональном отношении с собственной частотой первого осциллятора из-за поправки, обусловленной линейно зависящей от времени величиной θ .

Вводя в дополнение к обобщенным координатам обобщенные скорости u и v , перейдем к системе из дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u + \varepsilon y(\sin \omega_0 t \cos \theta + \sin \theta \cos \omega_0 t), \\ \dot{u} &= -\gamma(u + \varepsilon y(\sin \omega_0 t \cos \theta + \sin \theta \cos \omega_0 t)) - \omega_0^2 x, \\ \dot{y} &= v + \varepsilon g \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \sin(\omega_0 t), \\ \dot{v} &= -\gamma(v + \varepsilon g \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \sin(\omega_0 t)) - 4\omega_0^2 y, \\ \dot{\theta} &= \frac{2\pi\omega}{T}, \quad \omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Кратко опишем принцип работы системы. Начнем с ситуации, когда $g(t) = 0$, второй осциллятор не возбужден, а в первом осцилляторе имеют место затухающие колебания на собственной частоте ω_0 с фазой ϕ $x \sim \sin(\omega_0 t + \phi)$.

После того, как множитель $g(t)$ станет отличным от нуля, во втором осцилляторе произойдет возбуждение колебаний с удвоенной частотой

$$y \sim \sin(\omega_0 t + \phi) \sin \omega_0 t = -\frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t + \phi) + \dots$$

Когда исходный колебательный процесс в первом осцилляторе затухнет до пренебрежимо малого уровня, а колебания второго осциллятора уже имеют достаточно большую амплитуду, воздействие, определяемое произведением сигнала второго осциллятора и опорного сигнала, возбуждает колебания в первом осцилляторе с фазой $(\phi - \theta)$

$$x \sim \cos(2\omega_0 t + \phi) \sin(\omega_0 t + \theta) = \frac{1}{2}(\cos(\omega_0 t + \phi - \theta) + \dots).$$

Таким образом, за полный период внешнего воздействия отображение для фазы будет иметь вид

$$\begin{cases} \phi_{n+1} = \phi_n - \theta_n + f(\phi) \bmod (2\pi), \\ \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\omega \bmod (2\pi), \end{cases} \quad (5)$$

где добавка $f(\phi)$ включена, чтобы учесть поправки к описанному выше механизму передачи фазы, и должна быть с очевидностью периодической функцией своего аргумента ϕ . Как можно видеть, уравнение (5) соответствует по форме отображению Ханта и Отта (1).

2. Результаты численного моделирования

Система уравнений (4) решалась численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка. На рис. 2 показаны полученные в результате расчетов примеры временных зависимостей $x(t)$, $y(t)$. Графики построены для установившегося на протяжении 10 периодов режима колебаний, соответствующего параметру усиления $\alpha = 5$.

Используя результаты численного решения системы уравнений, можно убедиться в том, что эволюция фаз первого осциллятора отвечает отображению того же топологического класса, что и модель Ханта и Отта [15–17]. Для этого в процессе численного решения будем находить фазу первого осциллятора ϕ_n для дискретной последовательности моментов времени $t_n = n$ с помощью соотношений

$$\phi_n = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\dot{x}(t_n)}{2\pi x(t_n)}\right) + \pi, & x(t_n) < 0 \\ \arctan\left(\frac{\dot{x}(t_n)}{2\pi x(t_n)}\right) + 2\pi, & x(t_n) \geq 0, \quad y(t_n) < 0 \\ \arctan\left(\frac{\dot{x}(t_n)}{2\pi x(t_n)}\right), & y(t_n) > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Рис. 2. Временные зависимости $x(t)$, $y(t)$ при $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 6$, $\gamma = 0.25$, $\alpha = 5$

Кроме того, в те же моменты времени t_n вычисляются значения переменной θ_n . Если величина ϕ_n попадает в определенный интервал (ширина которого произвольно выбрана равной $\pi/10$), на график наносится точка (θ_n, ϕ_n) , отвечающая данному моменту времени. Также отображается точка $(\theta_{n+1}, \phi_{n+1})$ для момента, наступающего через период T .

На рис. 3 представлены в графическом виде результаты обработки численных данных для фаз, полученные для $\alpha = 5, 10$. Как видно из рисунка, «лента» C , состоящая из точек (θ_n, ϕ_n) , имеет в качестве своего образа «полосу» C' , состоящую из точек $(\theta_{n+1}, \phi_{n+1})$. Расположение этих множеств на диаграмме соответствует тому, что имеет место для модели Ханта и Отта. На графиках видно, что полоса C , обходящая тор по направлению θ , трансформируется при воздействии отображения в полосу C' , совершающую один оборот по меридиану и один – по параллели.

Для подтверждения существования СНА в сконструированной нами системе обратимся к проверке выполнения критерия, предложенного в работе А.С. Пиковского и У. Фойдель [7]. Согласно их рассуждениям, необходимое условие существования СНА состоит в том, что при рациональной аппроксимации параметра, задающего отношение частот, система демонстрирует бифуркации в зависимости от параметра начальной фазы, причем это свойство сохраняется при увеличении порядка аппроксимации.

Для принятого нами значения частотного параметра ω , заданного «золотым средним», рациональные аппроксимации даются отношениями чисел Фибоначчи F_k/F_{k+1} , где $F_0 = 0, F_1 = 1, \dots, F_{k+1} = F_{k-1} + F_k$.

Если вместо иррационального частотного параметра ω взять k -ю рациональную аппроксимацию $x_{n+1} = f(x_n, \theta_n)$, $\theta_{n+1} = \theta_n + \omega_k \bmod(1)$, $\omega_k = p_k/q_k$, то внешнее воздействие будет периодическим, с периодом q_k . В отличие от квазипериодического поведения, когда фазовая переменная эргодическим образом посещает плотное множество точек единичного интервала, теперь она обходит конечное множество $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{q_k-1}\}$. Начальная фаза θ_0 играет при этом роль дополнительного

Рис. 3. Численная иллюстрация основного топологического свойства фазы ϕ для различных значений параметра усиления α : а – 5, б – 10. Здесь $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 6$, $\gamma = 0.25$. Приведенная картина представляет собой развертку тора. Следует считать, что верхняя и нижняя стороны квадрата, а также левая и правая его стороны отождествлены

параметра, и в зависимости от ее выбора мы можем получать различные типы динамики и аттракторов.

На качественном уровне, рассуждая в терминах систем, полученных на основе рациональной аппроксимации, можно представить себе, что при иррациональном значении частоты имеем как бы медленный дрейф параметра начальной фазы, и если система по ходу динамики все время претерпевает бифуркации, то это как раз соответствует присутствию СНА [2].

На рис. 4 представлены карты динамических режимов на плоскости (ε, θ_0) и бифуркационные диаграммы, отвечающие проходу на картах по горизонтали при фиксированном значении φ .

На картах динамических режимов видно, что при малых значениях параметра φ реализуются регулярные режимы с периодом, равным знаменателю подходящей дроби, и бифуркаций нет. Бифуркации имеют место в области, выше некоторого критического уровня φ , где они не исчезают с увеличением порядка аппроксимации. Бифуркации сопровождаются возникновением режимов с различными периодами, кратными знаменателю рациональной аппроксимации, а также непериодическими (хаотическими) режимами, что видно также из бифуркационных диаграмм на рис. 4 (нижний ряд).

На рис. 5, а, б показаны трехмерные портреты аттракторов системы, построенные для двух значений параметра $\alpha = 5, 10$. Вывод точек на графики осуществлялся через интервал времени T . Из рисунков видно, что аттрактор характеризуется наличием неоднородной тонкой структуры, нехарактерной для гладких торов.

Рис. 4. Карты динамических режимов и бифуркационные диаграммы для различных рациональных аппроксимаций F_k/F_{k+1} : а – 3/5; б – 5/8; в – 8/13; г – 13/21

Рис. 5. Трёхмерные аттракторы системы для различных значений α : $a - 5$, $б - 10$; фазовый портрет отображения и его увеличенные фрагменты для значений α : $в - 5$, $г - 10$. Значения остальных параметров $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 6$, $\gamma = 0.25$

На рис. 5, в, г для двух значений параметра $\alpha = 5, 10$ приведены диаграммы в координатах $(\varphi_{n-1}, \varphi_n)$, позволяющие судить о распределении соответствующей аттрактору инвариантной меры на торе. Хорошо видно, что инвариантная мера распределена неравномерно: в отличие от регулярных квазипериодических режимов присутствует волокнистая структура, образованная областями, которые изображающая точка посещает чаще. При рассмотрении увеличенных фрагментов видно видеть, что эта волокнистая фрактальная структура сохраняется. Можно отметить визуальное сходство этих распределений с теми, которые были получены для системы с СНА типа Ханта и Отта на основе автоколебательных элементов в работе [28, рис. 1, б]. По-видимому, подобная динамика характерна для всех систем, описываемых отображением Ханта и Отта.

На рис. 6 приводится график зависимости показателей Ляпунова от параметра α . Расчеты проведены для системы (4) с использованием стандартного алгоритма Бенеттина [29]. В данной системе отсутствует положительный показатель Ляпунова, старший показатель тождественно равен нулю, а остальные четыре показателя, как видно на графике, отрицательные.

Для СНА типа Ханта и Отта в силу его грубости характерна гладкость зависимости всех показателей Ляпунова от управляющего параметра. На графике хорошо видно, что это свойство выполняется для системы, рассматриваемой в настоящей работе.

Рис. 6. График показателей Ляпунова в зависимости от параметра α при $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 6$, $\gamma = 0.25$

3. Спектральные свойства СНА

Фурье-анализ является одним из общепринятых способов обработки сигналов при изучении динамических процессов. Большой интерес для изучения представляют спектральные свойства СНА.

Чтобы наглядно представить специфику спектров, характерную для разных типов динамики временных рядов x_n (здесь n – дискретное время) рассмотрим построение преобразования Фурье на основе вычисления накапливающихся сумм

$$Z(\Omega, N) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{i\Omega n}. \quad (7)$$

Здесь Ω – параметр, представляющий собой частоту интересующей нас спектральной составляющей; N – количество членов в сумме. Дискретный спектр отвечает периодическим и квазипериодическим режимам. Для этих режимов накапливающиеся суммы с ростом N ведут себя по линейному закону $|Z| \sim N$, если Ω соответствует частоте, присутствующей в спектре, или стремятся к нулю, если такой частоты нет.

Для случайных сигналов при любом выборе параметра Ω точка, представляющая накапливающуюся сумму, будет совершать случайное блуждание на комплексной плоскости, которому соответствует линейное нарастание среднего квадрата модуля, так что $|Z| \sim \sqrt{N}$. Это соответствует сплошному спектру. Для СНА накапливающиеся суммы демонстрируют поведение в зависимости от N , характеризуемое другими показателями степени, и в этом случае говорят о сингулярно-непрерывном спектре [2].

На рис. 7 показаны результаты расчетов спектров Фурье для режимов СНА системы (4) в логарифмическом и линейном масштабах.

Чтобы охарактеризовать природу спектра в рамках приведенных выше рассуждений, обратимся к представленным на рис. 8, а диаграммам, где графически иллюстрируется блуждание величины Z_N , представляющей вычисляемую шаг за шагом спектральную сумму (7). Для их построения на плоскости, где по осям координат отложены действительные и мнимые части комплексного числа, последовательно отображаем и соединяем точки, отвечающие значениям суммы на последовательных шагах. В результате получаются графики с нетривиальной фрактальной структурой. На графиках, построенных для нескольких разных значений параметра Ω , можно видеть, что происходит «фрактальный дрейф», который не соответствует вариантам роста сумм с показателем 1 или 1/2, что отвечало бы дискретному или сплошному спектру.

Для количественной характеристики поведения спектральных сумм будем строить графики зависимости модуля $|Z(\Omega, m)|$ от количества членов суммы m , используя логарифмический масштаб по обеим осям координат. Полученные графики представлены на рис. 8, б. Жирная линия на графиках обозначает аппроксимирующую прямую, по которой можно определить средний коэффициент наклона K полученных кривых. Для периодических и квазипериодических колебаний получился бы коэффициент наклона приблизительно равный 1, а для случайного процесса или хаотических колебаний – 1/2. В рассматриваемом случае СНА показатели получаются разными для разных частот Ω , в интервале между 1/2 и 1. Это свидетельствует, что мы имеем дело с сингулярно-непрерывным спектром [2].

Рис. 7. Спектры Фурье для различных значений параметра α в логарифмическом масштабе: $a - 5$, $b - 10$; в линейном масштабе: $в - 5$, $г - 10$

Рис. 8. a – спектральная сумма $Z(\Omega, N)$ при различных значениях Ω ; $б$ – накапливающаяся сумма $Z(\Omega, N)$ при различных значениях параметра Ω . Остальные параметры: $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 6$, $\gamma = 0.25$, $\alpha = 7$

Заключение

В статье показана возможность построения системы, в которой реализуется СНА типа Ханта и Отта в виде кольцевой схемы, содержащей пару линейных фильтров второго порядка (осцилляторов), а также нелинейный усилительный элемент с квазипериодической модуляцией коэффициентов передачи. В такой системе воздействие первого осциллятора на второй происходит посредством сигнала, получаемого комбинацией нелинейной функции, периодического внешнего воздействия и опорного периодического сигнала. Воздействие второго осциллятора на первый осуществляется посредством сигнала на удвоенной частоте второго осциллятора. Внешнее воздействие в данной системе квазипериодическое и содержит базовые частоты, находящиеся в иррациональном отношении, в силу чего и становится возможным существование СНА.

В ходе численного моделирования были получены результаты, свидетельствующие о реализации в исследуемой системе странного нехаотического аттрактора того же типа, что и в искусственно сконструированном отображении на торе, рассмотренном в работе Ханта и Отта, и в конструкции на основе попеременно возбуждающихся автоколебательных элементов в работе А.Ю. Жалнина и С.П. Кузнецова. Это подтверждается представленным рассмотрением основного топологического свойства отображения для фазы, характерного для этих систем.

Для подтверждения присутствия СНА был привлечен критерий Пиковского и Фойдель, для чего были построены и интерпретированы карты динамических режимов и бифуркационные диаграммы, отвечающие рациональным аппроксимациям параметра базовых отношения частот.

Подробно обсуждены спектральные свойства СНА. Помимо непосредственно рассчитанных спектров проведен анализ поведения спектральных сумм. Результаты анализа указывают на то, что имеет место сингулярно-непрерывный тип спектра.

Работа выполнена при поддержке РФФИ в рамках грантов № 14-02-00085 и № 16-32-00449. Автор выражает благодарность В.П. Круглову и С.П. Кузнецову за консультации и обсуждения.

Библиографический список

1. Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic // Physica D. 1984. Vol. 13, № 1–2. P. 261.
2. Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Фойдель У. Странный нехаотический аттрактор // Нелинейные волны – 2004 / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова и В.И. Некоркина. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005. С. 484.
3. Bondeson A., Ott E., Antonsen T.M. Quasiperiodically forced damped pendula and Schrödinger equations with quasiperiodic potentials: implications of their equivalence // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55. № 20. P. 2103.
4. Ding M., Grebogi C., Ott E. Dimensions of strange nonchaotic attractors // Phys. Lett. A. 1989. Vol. 137, № 4–5. P. 167.
5. Ding M., Grebogi C., Ott E. Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems: From quasiperiodic to strange nonchaotic to chaotic // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 39, № 5. P. 2593.

6. *Pikovsky A.S., Feudel U.* Correlations and spectra of strange nonchaotic attractors // *Phys. A: Math. Gen.* 1994. Vol. 27. P. 5209.
7. *Pikovsky A.S., Feudel U.* Characterizing strange nonchaotic attractors // *Chaos.* 1995. Vol. 5, № 1. P. 253.
8. *Pikovsky A.S., Zaks M.A., Feudel U., Kurths J.* Singular continuous spectra in dissipative dynamics // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52, № 1. P. 285.
9. *Feudel U., Pikovsky A.S., Kurths J.* Strange non-chaotic attractor in a quasiperiodically forced circle map // *Physica D.* 1995. Vol. 88. P. 176.
10. *Pokorny P., Schreiber I., Marek M.* On the route to strangeness without chaos in the quasiperiodically forced van der Pol oscillator // *Chaos, Solitons and Fractals.* 1996. Vol. 7, № 3. P. 409.
11. *Kaneko K., Nishikawa T.* Fractalization of a torus as a strange nonchaotic attractor // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, № 6. P. 6114.
12. *Glendinning P.* Intermittency and strange nonchaotic attractors in quasi-periodically forced circle maps // *Phys. Lett. A.* 1998. Vol. 244. P.545.
13. *Osinga H., Wiersig J., Glendinning P., Feudel U.* Multistability and nonsmooth bifurcations in the quasiperiodically forced circle map // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 2001. Vol. 11, № 12. P. 3085.
14. *Prasad A., Negi S.S., Ramaswamy R.* Strange nonchaotic attractors // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 2001. Vol. 11. P. 291.
15. *Hunt B.R., Ott E.* Fractal properties of robust strange nonchaotic attractors // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 87, № 25. P. 254101.
16. *Kim J.-W., Kim S.-Y., Hunt B., Ott E.* Fractal properties of robust strange nonchaotic attractors in maps of two or more dimensions // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. P. 036211.
17. *Kim S.-Y., Lim W., Ott E.* Mechanism for the intermittent route to strange nonchaotic attractors // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. P. 056203.
18. *Ditto W.L., Spano M.L., Savage H.T. et al.* Experimental observation of a strange nonchaotic attractor // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65, № 5. P. 533.
19. *Vohra S.T., Bucholtz F., Koo K.P., Dagenais D.M.* Experimental observation of period-doubling suppression in the strain dynamics of a magnetostrictive ribbon // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 66, № 2. P. 212.
20. *Zhou T., Moss F., Bulsara A.* Observation of a strange nonchaotic attractor in a multistable potential // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 45, № 8. P. 5394.
21. *Zeyer K.-P., Miinster A.F., Schneider F.W.* Quasiperiodic forcing of a chemical reaction: experiments and calculations // *J. Phys. Chem.* 1995. Vol. 99. P. 13173.
22. *Ding W.X., Deutsch H., Dinklage A., Wilke C.* Observation of a strange nonchaotic attractor in a neon glow discharge // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55, № 3. P. 3769.
23. *Yang T., Bilimgut K.* Experimental results of strange nonchaotic phenomenon in a second-order quasi-periodically forced electronic circuit // *Phys. Lett. A.* 1997. Vol. 236. P. 494.
24. *Yu Y.H., Kim D.C., Ryu J.Y., Hong S.R.* Experimental study on the blowout bifurcation route to strange nonchaotic attractor // *J. of the Korean Phys. Society.* 1999. Vol. 34, № 2. P. 130.

25. *Bezruchko B.P., Kuznetsov S.P., Seleznev Y.P.* Experimental observation of dynamics near the torus-doubling terminal critical point // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, № 6. P. 7828.
26. *Sanchez D., Platero G., Bonilla L.L.* Quasiperiodic current and strange attractors in ac-driven superlattices // *Phys. Rev. B.* 2001. Vol. 63. P. 201 306.
27. *Vaszlenko A., Feely O.* Dynamics of phase-locked loop with fm input and low modulating frequency // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 2002. Vol. 12, № 7. P. 1633.
28. *Жалнин А.Ю., Кузнецов С.П.* О возможности реализации в физической системе странного нехаотического аттрактора Ханта и Отта // *ЖТФ.* 2007. Т. 77, № 4. С. 10.
29. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2001. 296 с.

Поступила в редакцию 26.02.2016

STRANGE NONCHAOTIC ATTRACTOR OF HUNT AND OTT TYPE IN A SYSTEM WITH RING GEOMETRY

V. M. Doroshenko

National Research Saratov State University

The physical realizable system of ring structure, with a fixed irrational ratio of basic frequencies of external driving (the golden mean) manifests a strange nonchaotic attractor (SNA), similar to the attractor in the abstract map on a torus proposed and analyzed earlier by Hunt and Ott as an example of robust SNA. Simulation of the dynamics is provided basing on the numerical integration of the corresponding non-autonomous system of differential equations with quasi-periodic coefficients. It has been demonstrated that in terms of appropriately chosen phase variables the dynamics on the characteristic period is consistent with the topology of the mapping of Hunt and Ott. It has been shown that the birth of SNA corresponds to the criterion of Pikovsky and Feudel. Numerical calculations show that the Fourier spectra in sustained mode is of intermediate class between the continuous and discrete spectra (the singular continuous spectrum).

Keywords: Strange nonchaotic attractor, Hunt-Ott map, robustness, fractal structure, singular continuous spectrum.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-1-16-30

References

1. *Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A.* Strange attractors that are not chaotic // *Physica D.* 1984. Vol. 13, № 1–2. P. 261.
2. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S., Feudel U.* Strange nonchaotic attractor // *Nonlinear waves – 2004* / Eds A.V. Gaponov-Grekhov and V.I. Nekorkin. Nizhny Novgorod: IAP RAS, 2005. Vol. 25. P. 484 (in Russian).

3. *Bondeson A., Ott E., Antonsen T.M.* Quasiperiodically forced damped pendula and Schrödinger equations with quasiperiodic potentials: implications of their equivalence // *Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 55, № 20. P. 2103.
4. *Ding M., Grebogi C., Ott E.* Dimensions of strange nonchaotic attractors // *Phys. Lett. A.* 1989. Vol. 137, № 4–5. P. 167.
5. *Ding M., Grebogi C., Ott E.* Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems: From quasiperiodic to strange nonchaotic to chaotic // *Phys. Rev. A.* 1989. Vol. 39, № 5. P. 2593.
6. *Pikovsky A.S., Feudel U.* Correlations and spectra of strange nonchaotic attractors // *Phys. A: Math. Gen.* 1994. Vol. 27. P. 5209.
7. *Pikovsky A.S., Feudel U.* Characterizing strange nonchaotic attractors // *Chaos.* 1995. Vol. 5, № 1. P. 253.
8. *Pikovsky A.S., Zaks M.A., Feudel U., Kurths J.* Singular continuous spectra in dissipative dynamics // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52, № 1. P. 285.
9. *Feudel U., Pikovsky A.S., Kurths J.* Strange non-chaotic attractor in a quasiperiodically forced circle map // *Physica D.* 1995. Vol. 88. P. 176.
10. *Pokorny P., Schreiber I., Marek M.* On the route to strangeness without chaos in the quasiperiodically forced van der Pol oscillator // *Chaos, Solitons and Fractals.* 1996. Vol. 7, № 3. P. 409.
11. *Kaneko K., Nishikawa T.* Fractalization of a torus as a strange nonchaotic attractor // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, № 6. P. 6114.
12. *Glendinning P.* Intermittency and strange nonchaotic attractors in quasi-periodically forced circle maps // *Phys. Lett. A.* 1998. Vol. 244. P. 545.
13. *Osinga H., Wiersig J., Glendinning P., Feudel U.* Multistability and nonsmooth bifurcations in the quasiperiodically forced circle map // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 2001. Vol. 11, № 12. P. 3085.
14. *Prasad A., Negi S.S., Ramaswamy R.* Strange nonchaotic attractors // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 2001. Vol. 11. P. 291.
15. *Hunt B.R., Ott E.* Fractal properties of robust strange nonchaotic attractors // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 87, № 25. P. 254101.
16. *Kim J.-W., Kim S.-Y., Hunt B., Ott E.* Fractal properties of robust strange nonchaotic attractors in maps of two or more dimensions // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. P. 036211.
17. *Kim S.-Y., Lim W., Ott E.* Mechanism for the intermittent route to strange nonchaotic attractors // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. P. 056203.
18. *Ditto W.L., Spano M.L., Savage H.T. et al.* Experimental observation of a strange nonchaotic attractor // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65, № 5. P. 533.
19. *Vohra S.T., Bucholtz F., Koo K.P., Dagenais D.M.* Experimental observation of period-doubling suppression in the strain dynamics of a magnetostrictive ribbon // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 66, № 2. P. 212.
20. *Zhou T., Moss F., Bulsara A.* Observation of a strange nonchaotic attractor in a multistable potential // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 45, № 8. P. 5394.

21. Zeyer K.-P., Miinster A.F., Schneider F.W. Quasiperiodic Forcing of a Chemical Reaction: Experiments and Calculations // J. Phys. Chem. 1995. Vol. 99. P. 13173.
22. Ding W.X., Deutsch H., Dinklage A., Wilke C. Observation of a strange nonchaotic attractor in a neon glow discharge // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55, № 3. P. 3769.
23. Yang T., Bilimgut K. Experimental results of strange nonchaotic phenomenon in a second-order quasi-periodically forced electronic circuit // Phys. Lett. A. 1997. Vol. 236. P. 494.
24. Yu Y.H., Kim D.C., Ryu J.Y., Hong S.R. Experimental Study on the Blowout Bifurcation Route to Strange Nonchaotic Attractor // J. of the Korean Phys. Society. 1999. Vol. 34, № 2. P. 130.
25. Bezruchko B.P., Kuznetsov S.P., Seleznev Y.P. Experimental observation of dynamics near the torus-doubling terminal critical point // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 6. P. 7828.
26. Sanchez D., Platero G., Bonilla L.L. Quasiperiodic current and strange attractors in ac-driven superlattices // Phys. Rev. B. 2001. Vol. 63. P. 201.
27. Vaszlenko A., Feely O. Dynamics of phase-locked loop with fm input and low modulating frequency // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2002. Vol. 12, № 7. P. 1633.
28. Jalnine A.Yu., Kuznetsov S.P. On the realization of the Hunt–Ott strange nonchaotic attractor in a physical system // Zhurnal Tekhnicheskoe Fiziki, 2007, Vol. 77, № 4. P. 10 (in Russian).
29. Kuznetsov S.P. Dynamic chaos. Moscow: Fizmatlit., 2001. 296 s. (in Russian).

Ссылка на статью: Дорошенко В.М. Странный нехаотический аттрактор типа Ханта и Отта в системе с кольцевой геометрией // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 1. С. 16–30.

Paper's reference: Doroshenko V.M. Strange nonchaotic attractor of Hunt and Ott type in a system with ring geometry // Izvestija VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 24, № 1. P. 16–30.

Дорошенко Валентина Михайловна – родилась в 1992 году. Окончила среднюю школу № 93 Саратова (2009) и Саратовский государственный университет им Н.Г. Чернышевского (2014). В настоящее время аспирантка факультета нелинейных процессов СГУ. Участница конференций «Нелинейные дни в Саратове для молодых» (2013, 2014, 2015), VIII, IX и X Конференций молодых ученых «Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» (Саратов, 2013, 2014, 2015), Международной конференции «Динамика, бифуркации и странные аттракторы», посвященной памяти Л.П. Шильникова (Нижний Новгород, 2013), X Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур» (Саратов, 2013), Международных конференций «Hamiltonian Dynamics, Nonautonomous Systems, and Patterns in PDE's» (Нижний Новгород, 2014), «Dynamics, Bifurcations and Chaos 2015» (Нижний Новгород, 2015). Имеет одну научную публикацию в журнале «Вестник СГУ».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: dorvalentina9@gmail.com