PhD in Technical Science, Head of Division – Deputy Head of Department of information systems of the Ministry of Defense of the Russian Federation. Tel. +7 916 138-87-96. E-mail: shevv67@mail.ru

References

1. Rino C.L. A power law screen model for ionospheric scintillation. 1. Wave scatter. *Radio Science*, 1979, vol. 14, no. 6, pp. 1135–1145.
2. Shevchenko V.A. A method for calculating the scintillation index in the presence of anisotropic inhomogeneities in a perturbed ionosphere. *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2015, vol. 13, no. 2, pp. 118–130. (In Russian.)
3. Fremouw E.J., Secan J.A. Modeling and scientific application of scintillation result. *Radio Science*, 1984, vol. 19, no. 3, pp. 687–694.
4. Rino C.L., Fremouw E.J. The angle dependence of singly scattered wavefields. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 1977, vol. 39, no. 8, pp. 859–868.
5. Grandshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tables of integrals, sums, series and products*. 7 izd. St. Petersburg: BKHV-Peterburg, 2011, 1232 p. (In Russian.)
6. Serapinas B.B. *Geodetic basics of maps. Tutorial*. Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 2001, 132 p. (In Russian.)
7. Korn G., Korn T. *Handbook of mathematics for scientists and engineers*. Moscow: Izdatel'stvo «Nauka», 1974, 832 p. (In Russian.)
8. Govorov L.V., Shakin V.A. *Ballistic support of satellite communication systems*. Moscow: Voennoye izdatel'stvo, 1984, 128 p. (In Russian.)
9. Mashbits L.M. *Service areas of satellite communication systems*. Moscow: Radio i svyaz', 1982, 168 p. (In Russian.)
10. Thebault E. et al. International Geomagnetic Reference Field: The 12th Generation. *Earth, Planets and Space*, 2015, vol. 67:79, pp. 1–19.
11. Malin S.R.C., Barraclough D.R. An algorithm for synthesizing the geomagnetic field. *Computers & Geosciences*, 1981, vol. 7, no. 4, pp. 401–405.
12. URL: <https://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/coeffs/IGRF13coeffs.xls> (accessed: 05.06.2020).

Received 16.06.2020

УДК 538.945

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ МАКСВЕЛЛА-ГАРНЕТТА И БРУГГЕМАНА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ГЕТЕРОГЕННОСТИ КИРАЛЬНОГО МЕТАМАТЕРИАЛА НА ОСНОВЕ ГАММАДИОНОВ

Аралкин М.В.¹, Дементьев А.Н.², Осипов О.В.³

¹ Военная академия РВСН им. Петра Великого, Балашиха, РФ

² МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, РФ

³ Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ

E-mail: o.osipov@psuti.ru

Рассмотрены обобщенные математические модели киральных метаматериалов СВЧ на основе различных форм записи материальных уравнений. В статье сделан вывод о необходимости описания кирального метаматериала как гетерогенной среды с учетом зависимости эффективной диэлектрической проницаемости от проницаемостей контейнера и киральных включений. Построены математические модели кирального метаматериала на основе формул Максвелла-Гарнетта и Бруггемана, учитывающие свойства гетерогенности. В качестве исследуемого кирального метаматериала была выбрана метаструктура на основе тонкопроволочных криволинейных гаммадионов с различным числом заходом. Для данной структуры были определены резонансные частоты киральных включений в виде многозаходных тонкопроволочных криволинейных гаммадионов. В качестве примера было проведено решение задачи об отражении (прохождении) плоской электромагнитной волны с линейной поляризацией от планарного слоя кирального метаматериала на основе равномерной матрицы из многозаходных тонкопроволочных криволинейных гаммадионов. Определено влияние количества заходов гаммадиона на отражающие и

пропускающие свойства кирального метаматериала. В статье проанализированы вопросы использования формул Максвелла-Гарнетта и Бруггемана для учета гетерогенности кирального метаматериала и исследовано их влияние на результаты расчета коэффициентов отражения и прохождения волны. В работе доказано, что на ряде дискретных частот планарный слой кирального метаматериала на основе многозаходных тонкопроволочных криволинейных гаммадионов позволяет сконцентрировать падающее электромагнитное поле в плоскости метаструктуры.

Ключевые слова: киральная среда, киральный метаматериал, метаматериал, метаструктура, пространственная дисперсия, частотная селективность, модель Бруггеманна, модель Максвелла-Гарнетта, модель Кондона, гаммадион

Введение

Метаматериалы в настоящее время остаются объектом для исследования многих научных групп всего мира [1–3]. Это связано с тем, что с помощью создания искусственной структуры метаматериала возможно получение уникальных свойств взаимодействия электромагнитного поля с веществом. Любой метаматериал состоит из несущей среды (контейнера) и размещенных в нем периодически или квазипериодически компонент из другого материала естественного происхождения.

В этой связи уникальные электромагнитные свойства, достижимые при создании метаматериалов, могут быть обусловлены как пространственной композицией компонентов, так и их локальной структурой. Практически любой метаматериал может быть представлен в виде контейнера из материала естественного происхождения А, в котором определенным образом распределены компоненты Б из другого материала. Это обуславливает необходимость рассмотрения метаматериала с макроскопической точки зрения как гетерогенной среды.

Особым классом метаматериалов является киральный метаматериал (КММ), в пространственную структуру которого входят компоненты Б, обладающие свойством «зеркальной асимметрии» [4–6]. По сути, компонентами являются микроструктуры, которые могут существовать в двух формах – правой (R) и левой (L), которые соотносятся друг относительно друга как зеркальные отражения в плоском зеркале. Такие метаматериалы начали активно изучаться в конце XX века и получили название киральных сред, а зеркально асимметричные компоненты – киральных элементов. Аналогом киральных сред СВЧ являются оптически активные среды, изучение которых началось еще в XIX веке с работ Бозе, Пастера и др. В киральных средах, как и в любых метаматериалах на основе упорядоченных структур компонентов, принципиальное значение и влияние на электромагнитные свойства оказывает пространственная дисперсия. Основные электромагнитные свойства киральных метаматериалов –

это кросс-поляризация, частотная и поляризационная селективность и т. п. [5–11].

Новым этапом развития метаматериалов стали упоминания возможности создания сред с отрицательным преломлением (существование которых предсказал Веселаго в 1968 году) [8–9]. Причем при создании подобных сред зачастую использовались компоненты именно с зеркально асимметричной пространственной конфигурацией (например, одиночные и двойные разомкнутые кольца и др.).

В данной статье пойдет речь об уточнении обобщенных моделей киральных метаматериалов, а именно об учете в них свойств гетерогенности. Сразу отметим, что предлагаемые математические модели могут быть применены именно к киральным (и биизотропным) средам при условии, что все зеркально асимметричные компоненты размещаются на одинаковых расстояниях и ориентация их геометрических осей является произвольной. Наиболее хорошо изученными видами киральных компонент являются одно- и многозаходные тонкопроволочные спирали, разомкнутые тонкопроволочные кольца с выступающими прямолинейными концами, тонкопроволочные и планарные гаммадионы и др.

В научной литературе мало обсуждается вопрос о том, чем вызваны своеобразные свойства киральных метаматериалов: пространственным размещением компонентов Б в контейнере А или же пространственной конфигурацией используемых зеркально асимметричных компонент Б?

Заметим, что в уравнениях состояния для киральной среды [4] материальные параметры являются эффективными. Однако в них отсутствует учет зависимости от материальных параметров контейнера А и компонентов Б, то есть, по сути, учет гетерогенности.

В предлагаемой работе будет построена математическая модель КММ, в которой будут учтены основные физические и геометрические свойства кирального метаматериала – киральность, гетерогенность и дисперсия.

Гетерогенность. Упорядоченное размещение микроэлементов в контейнере. Для описания дан-

ного свойства в работе использовались модели Максвелла-Гарнетта [12; 14; 15] и Бруггемана [13–15].

Киральность. Компоненты метаматериала обладают зеркально асимметричной конфигурацией. В работе использовались материальные уравнения в формализме Линделла – Сиволы [4].

Дисперсия. Зависимость материальных параметров метаматериала от частоты. Для описания дисперсии использовалась модель Кондона, известная из квантовой теории оптически активных сред, а также уже применяемая для киральных сред СВЧ [16].

В работе построены две математические модели КММ, учитывающие гетерогенность на основе моделей Максвелла-Гарнетта и Бруггемана, а также проведено сравнение их использования при решения электродинамических задач.

Математические модели кирального метаматериала

Киральная среда представляет собой композиционный метаматериал на основе несущей среды (контейнера) и как минимум одного компонента, обладающего свойством зеркальной асимметрии. При построении математической модели КММ будем считать, что в несущем контейнере А размещаются зеркальные компоненты одного типа Б, которые являются тождественными и хаотически ориентированными в контейнере. Обобщенная пространственная конфигурация кирального метаматериала приведена на рисунке 1.

КММ представляет собой совокупность однородного диэлектрического контейнера (А) с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_c и относительной магнитной проницаемостью μ_c , где равномерно размещаются и хаотически ориентируются зеркально асимметричные компоненты Б. Расстояние между ближайшими соседними киральными включениями обозначим через l ; линейный размер области, занятой одним киральным компонентом, через d . КММ представляет собой совокупность однородного контейнера, в котором размещена одно- или двухмерная матрица из зеркально асимметричных компонентов Б с периодом l .

Таким образом, зеркально асимметричные микровключения представляют собой микроскопические электромагнитные частицы, соизмеримые с длиной волны СВЧ-поля, которые являются переизлучателями электромагнитного поля (ЭМП), падающего на КММ.

Вследствие того что киральный метаматериал представляет собой совокупность контейнера и зеркально асимметричных микровключений,

Рисунок 1. Обобщенная структура кирального метаматериала

то для его физико-математического описания необходимо ввести эффективные диэлектрическую и магнитную проницаемости, которые зависят от соответствующих проницаемостей несущей среды и объемов, занятых зеркально-асимметричными компонентами:

$$\epsilon = \epsilon(\epsilon_c, \epsilon_s); \quad \mu = \mu(\mu_c, \mu_s). \quad (1)$$

Произвольный взаимный макроскопически однородный КММ может быть набором трех материальных параметров (1) – эффективными диэлектрической проницаемостью ϵ , магнитной проницаемостью μ и параметром киральности χ . Вставка зависимостей (1) в материальные уравнения для КММ позволяет учесть гетерогенность метаматериала в целом. В качестве соотношений (1) могут быть использованы формулы Максвелла-Гарнетта [12; 14; 15] и Бруггемана [13–15].

Впервые материальные уравнения для оптически активной среды записал американский физик Эдвард Улер Кондон (Edward Uhler Condon) в предположении отсутствия у среды магнитных свойств ($\mu = 1$):

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} - \gamma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad \vec{B} = \vec{H} + \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2)$$

где γ – относительный параметр оптической активности. В 1986 г. М. Сильверман [10] обобщил и симметризировал уравнения (2) на случай искусственной киральной среды:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} - \gamma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad \vec{B} = \mu \vec{H} + \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3)$$

где γ – относительный параметр киральности.

В 1988 г. С. Бассири и др. [11] записали материальные уравнения (3) для случая гармонической зависимости в виде $\vec{E}$ и $\vec{H} \sim \exp(i\omega t)$ для комплексных амплитуд векторов поля:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} - i\xi \vec{H}; \quad \vec{B} = \mu \vec{H} + i\xi \vec{E}, \quad (4)$$

где $\xi = \omega\gamma$ – относительный параметр киральности.

В 1992 г. Линделл и Сивола применили наиболее часто используемую в настоящее время форму записи материальных уравнений для КММ [4]:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \mp i\chi \vec{H}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \pm i\chi \vec{E}. \quad (5)$$

где χ – относительный параметр киральности.

В соотношениях (5) верхние знаки соответствуют КММ на основе зеркально асимметричных компонентов с правой закруткой (правых форм компонентов), а нижние знаки – КММ на основе зеркально асимметричных компонентов с левой закруткой (левых форм компонентов).

В материальных уравнениях (5) диэлектрическая проницаемость ε не учитывает пространственную структуру метаматериала, а также концентрацию включений. В связи с указанным фактом материальные уравнения должны быть дополнены соотношениями для диэлектрической проницаемости метаматериала (эффективной диэлектрической проницаемости), учитывающей проницаемости контейнера, включений, а также их концентрацию. В настоящее время наиболее известными моделями диэлектрической проницаемости гетерогенной среды (метаматериала) являются модели Максвелла-Гарнетта и Бруггемана.

Учет гетерогенности КММ с использованием модели Максвелла-Гарнетта. Для описания пространственной структуры метаматериала воспользуемся моделью (формулой) Максвелла-Гарнетта [12; 14; 15]:

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{\varepsilon + 2\varepsilon_c} = \alpha \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_c}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_c}, \quad (6)$$

где ε – относительная эффективная диэлектрическая проницаемость КММ (как пространственной структуры, состоящей из несущей среды А и компонентов Б); ε_c – относительная диэлектрическая проницаемость несущей среды А; ε_s – относительная диэлектрическая проницаемость области, занятой компонентом Б; α – объемная концентрация компонент Б.

Из (6) получаются следующие соотношения для эффективной диэлектрической проницаемости КММ:

$$\varepsilon = \varepsilon_c \frac{1 + 2\alpha\varepsilon_s}{1 - \alpha\varepsilon_s}; \quad \varepsilon_s = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_c}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_c}. \quad (7)$$

Формулы (8) определяют (согласно модели Максвелла-Гарнетта) эффективную диэлектрическую проницаемость произвольного метаматериала через относительные диэлектрические проницаемости несущей среды А и объемов, занятых компонентами Б.

Подставляя в (5) соотношения (7), имеем

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_c \frac{1 + 2\alpha \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_c}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_c}}{1 - \alpha \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_c}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_c}} \vec{E}(\vec{r}) \mp i\chi \vec{H}(\vec{r}), \quad (8)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu \vec{H}(\vec{r}) \pm i\chi \vec{E}(\vec{r}).$$

Материальные уравнения (8) составляют математическую модель однородного кирального метаматериала с учетом свойства гетерогенности с использованием формулы Максвелла-Гарнетта.

Учет гетерогенности КММ с использованием модели Бруггемана. Для описания гетерогенности метаматериала воспользуемся соотношением Бруггемана [13–15]:

$$(1 - \alpha) \frac{\varepsilon_c - \varepsilon}{\varepsilon_c + 2\varepsilon} + \alpha \frac{\varepsilon_s - \varepsilon}{\varepsilon_s + 2\varepsilon} = 0, \quad (9)$$

где ε – относительная эффективная диэлектрическая проницаемость КММ; ε_c – относительная диэлектрическая проницаемость контейнера А; ε_s – относительная диэлектрическая проницаемость объемов, занятым киральными микровключениями Б; α – объемная концентрация микровключений.

Из формулы (9) получаем соотношение для эффективной диэлектрической проницаемости КММ:

$$\varepsilon(\eta_1, \eta_2) = \sqrt{\frac{\eta_1^2}{4} - \eta_2} - \frac{\eta_1}{2}, \quad (10)$$

где

$$\eta_1 = \frac{[\varepsilon_s(1 - 3\alpha) - \varepsilon_c(2 - 3\alpha)]}{2}; \quad \eta_2 = -\frac{\varepsilon_c\varepsilon_s}{2}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), получаем для эффективной диэлектрической проницаемости в модели Бруггемана

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[\varepsilon_s(1 - 3\alpha) - \varepsilon_c(2 - 3\alpha)]^2}{16} + \frac{\varepsilon_c\varepsilon_s}{2}} - \frac{[\varepsilon_s(1 - 3\alpha) - \varepsilon_c(2 - 3\alpha)]}{4}. \quad (12)$$

Формула (12) определяет (согласно модели Бруггемана) эффективную диэлектрическую проницаемость метаматериала через относительные диэлектрические проницаемости несущей среды А и объемов, занятых микровключениями Б.

Подставляя в (5) соотношения (12), получаем

$$\vec{D}(\vec{r}) = \left\{ \sqrt{\frac{[\varepsilon_s(1 - 3\alpha) - \varepsilon_c(2 - 3\alpha)]^2}{16} + \frac{\varepsilon_c\varepsilon_s}{2}} \right. \quad (13)$$

$$\left. - \frac{[\varepsilon_s(1-3\alpha) - \varepsilon_c(2-3\alpha)]}{4} \right\} \vec{E}(\vec{r}) \mp i\chi \vec{H}(\vec{r});$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu \vec{H}(\vec{r}) \pm i\chi \vec{E}(\vec{r}).$$

Материальные уравнения (13) составляют математическую модель однородного кирального метаматериала с учетом свойства гетерогенности с использованием формулы Бруггемана.

Кроме учета свойства гетерогенности кирального метаматериала, необходимо учесть и свойство дисперсии материальных параметров. Для этого воспользуемся моделью Кондона.

Учет дисперсии. КММ принципиально обладает пространственной дисперсией, следовательно, его диэлектрическая проницаемость и параметр киральности зависят от частоты падающего поля. В научной литературе приводятся следующие частотные зависимости диэлектрической проницаемости и параметра киральности [16]:

$$\varepsilon_s(\omega) = \varepsilon_c + \frac{\beta_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad \chi(\omega) = \frac{A\beta_0^2\omega}{c(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (14)$$

где ε_s – относительная диэлектрическая проницаемость области, занятой киральным компонентом Б; α – объемная концентрация компонента в контейнере А; χ – параметр киральности КММ; c – скорость электромагнитной волны в вакууме; A – параметр, имеющий размерность длины и связанный с расстоянием между элементами; β_0 – параметр, имеющий размерность частоты и связанный с внутренними процессами в среде.

Соотношения (14) являются эквивалентом модели Кондона на СВЧ.

Резонансная частота ω_0 определяется пространственной конфигурацией и линейными размерами зеркальных микровключений. Для КММ на основе разных видов зеркальных компонент вычисление резонансных частот осуществляется различными методами.

Поставляя формулу (14) в материальные уравнения (8), получаем математическую модель кирального метаматериала, учитывающую свойства киральности, гетерогенности (на основе формулы Максвелла-Гарнетта) и дисперсии:

$$\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega) \mp i \frac{A\beta_0^2\omega}{c(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{H}(\omega);$$

$$\vec{B}(\omega) = \mu_c \vec{H}(\omega) \pm i \frac{A\beta_0^2\omega}{c(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}(\omega); \quad (15)$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_c \frac{1 + 2\alpha\varepsilon_x(\omega)}{1 - \alpha\varepsilon_x(\omega)}; \quad \varepsilon_x(\omega) = \frac{\varepsilon_s(\omega) - \varepsilon_c}{\varepsilon_s(\omega) + 2\varepsilon_c};$$

$$\varepsilon_s(\omega) = \varepsilon_s + \frac{\beta_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Подставляя (14) в уравнения (13), получаем математическую модель кирального метаматериала, учитывающую свойства киральности, гетерогенности (на основе формулы Бруггемана) и дисперсии:

$$\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega) \mp i \frac{A\beta_0^2\omega}{c(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{H}(\omega);$$

$$\vec{B}(\omega) = \mu_c \vec{H}(\omega) \pm i \frac{A\beta_0^2\omega}{c(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}(\omega);$$

$$\varepsilon(\omega) = \sqrt{\frac{[\varepsilon_s(1-3\alpha) - \varepsilon_c(2-3\alpha)]^2}{16} + \frac{\varepsilon_c\varepsilon_s}{2}} - \frac{[\varepsilon_s(1-3\alpha) - \varepsilon_c(2-3\alpha)]}{4}; \quad (16)$$

$$\varepsilon_s(\omega) = \varepsilon_s + \frac{\beta_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

При записи выражений (15)–(16) предполагалось, что диэлектрическая проницаемость контейнера (несущей среды) является постоянной и не зависит от частоты.

Использование математических моделей кирального метаматериала для решения задачи о падении плоской электромагнитной волны линейной поляризации на планарный слой КММ

Рассмотрим задачу о падении плоской электромагнитной волны линейной Е- или Н-поляризации на планарный слой из кирального метаматериала. Геометрия задачи представлена на рисунке 2.

Плоская электромагнитная волна падает на планарный слой КММ под углом θ . Область 1 на рисунке 2 является диэлектриком с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_1 и μ_1 . Слой КММ (область 2) описывается материальными параметрами: ε_2 , μ_2 и χ_2 в рамках построенной математической модели (9). Объемная концентрация зеркально асимметричных компонентов в слое КММ равна α_2 . Толщина планарного слоя КММ h . Область 3 является диэлектриком с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_3 и μ_3 . При решении задачи также предполагается, что на всех границах раздела отсутствуют поверхностные заряды и токи.

Также будем считать, что КММ является неограниченно протяженным вдоль оси Oz. При решении задачи будем учитывать явление кросс-

Рисунок 2. Геометрия задач

поляризации, возникающее при отражении (прохождении) электромагнитной волны от слоя из кирального метаматериала, а именно при падении волны с Е-поляризацией будут возникать компоненты отраженного и прошедшего ЭМП с Н-поляризацией и обратно.

Коэффициенты отражения плоской волны от слоя КММ определяются следующей матрицей:

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} r_{hh} & r_{he} \\ r_{eh} & r_{ee} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где r_{hh} – коэффициент отражения ЭМП с Н-поляризацией при падении ЭМП с Н-поляризацией; r_{he} – коэффициент отражения ЭМП с Н-поляризацией при падении ЭМП с Е-поляризацией; r_{ee} – коэффициент отражения ЭМП с Е-поляризацией при падении ЭМП с Е-поляризацией; r_{eh} – коэффициент отражения ЭМП с Е-поляризацией при падении ЭМП с Н-поляризацией.

По аналогии коэффициенты прохождения в области 3 могут быть упакованы в матрицу коэффициентов прохождения, где смысл индексов аналогичен (17):

$$\hat{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} t_{hh} & t_{he} \\ t_{eh} & t_{ee} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Внутри слоя из кирального метаматериала будут распространяться волны с право (ПКП) и левокруговыми (ЛКП) поляризациями – две преломленные из области 1 и 2, отраженные от границы раздела с областью 3. Для их описания можно ввести матрицу коэффициентов отражения-прохождения волн ПКП и ЛКП в области 2:

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} T_R^{(-)} & T_L^{(-)} \\ T_R^{(+)} & T_L^{(+)} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Таким образом, требуется определить матрицы коэффициентов отражения и прохождения основной и кросс-поляризованной компонент поля (10)–(12). Планарный слой КММ описывается следующими материальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{D}}^{(2)} &= \varepsilon_2(\omega) \vec{\mathbf{E}}^{(2)} \mp i \chi_2(\omega) \vec{\mathbf{H}}^{(2)}; \\ \vec{\mathbf{B}}^{(2)} &= \mu_2 \vec{\mathbf{H}}^{(2)} \pm i \chi_2(\omega) \vec{\mathbf{E}}^{(2)}, \end{aligned} \quad (20)$$

где верхние и нижние знаки определяют правую или левую форму зеркально асимметричных компонентов. Соотношения (20) записаны в гауссовой системе единиц. При решении использовались математические модели (15)–(16) и метод частичных областей [18]. Общая структура решения приведена в [17].

На границах раздела выполняются граничные условия для тангенциальных составляющих векторов напряженностей электрического и магнитного полей [14]:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}_\tau^{(1)}(y=0) &= \vec{\mathbf{E}}_\tau^{(2)}(y=0); \\ \vec{\mathbf{H}}_\tau^{(1)}(y=0) &= \vec{\mathbf{H}}_\tau^{(1)}(y=0); \\ \vec{\mathbf{E}}_\tau^{(2)}(y=-h) &= \vec{\mathbf{E}}_\tau^{(3)}(y=-h); \\ \vec{\mathbf{H}}_\tau^{(2)}(y=-h) &= \vec{\mathbf{H}}_\tau^{(3)}(y=-h). \end{aligned} \quad (21)$$

В результате решение сводится к неоднородной системе линейных алгебраических уравнений следующего вида, например, для случая падения ЭМП Н- и Е-поляризации:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{H,E} \vec{\mathbf{R}}_{H,E} &= \vec{\mathbf{A}}_{H,E}; \\ \vec{\mathbf{R}}_E &= [T_R^{(-)}, T_R^{(+)}, T_L^{(-)}, T_L^{(+)}, r_{ee}, r_{eh}, t_{ee}, t_{eh}]^T; \\ \vec{\mathbf{A}}_E &= \left[1, 0, 0, \frac{\cos \theta}{\eta_1}, 0, 0, 0, 0 \right]^T; \\ \vec{\mathbf{R}}_H &= [T_R^{(-)}, T_R^{(+)}, T_L^{(-)}, T_L^{(+)}, r_{hh}, r_{he}, t_{hh}, t_{he}]^T; \end{aligned} \quad (22)$$

Рисунок 3. Пространственная конфигурация микровключения и КММ

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}}_H &= [0, 1, -\eta_1 \cos \theta, 0, 0, 0, 0]^T; \\ \eta_2(\omega) &= \sqrt{\varepsilon_2(\omega)/\mu_2}; \\ \alpha_{R,L}(\omega) &= \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta}{(\sqrt{\varepsilon_2(\omega)\mu_2} \pm \chi_2(\omega))^2}}; \\ k_{R,L}(\omega) &= k_0 (\sqrt{\varepsilon_{BR}(\omega)\mu_2} \pm \chi_2(\omega)); \\ \eta_1 &= \sqrt{\mu^{(1)}/\varepsilon^{(1)}}; \quad k_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon^{(1)}\mu^{(1)}}; \\ k_3 &= k_0 \sqrt{\varepsilon^{(3)}\mu^{(3)}}; \quad \eta_3 = \sqrt{\mu^{(3)}/\varepsilon^{(3)}}; \\ \beta_{R,L}(\omega) &= k_{R,L}(\omega) h \cos \theta_{R,L}; \\ \beta_3 &= k_3 h \cos \theta_3; \quad \varepsilon_{s2}(\omega) = \varepsilon_{s2} + \frac{\beta_{02}^2}{\omega_0^2 - \omega^2}; \\ \chi_2(\omega) &= \frac{A_2 k_0 \beta_{02}^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.\end{aligned}$$

Явный вид матриц $\mathbf{B}_{H,E}$ не приводится в статье. Из решения систем линейных алгебраических уравнений (22) находятся элементы неизвестных матриц коэффициентов отражения и прохождения основных и кросс-поляризованных компонент поля.

Киральный метаматериал на основе тонкопроволочных гаммадионов

Рассмотрим построение частной математической модели КММ на основе матрицы многозаходных гаммадионов. Пространственная конфигурация элемента и КММ на его основе приведены на рисунке 3 (классический двухзаходный гаммадион показан справа, четырехзаходный гаммадион – слева).

Заходы (S -элементы) в структуре N -заходного гаммадиона отличаются друг от друга своими геометрическими параметрами. Однако при создании метаматериала на их основе все гаммадионы должны быть тождественными. Обозначим геометрические параметры i -го S -элемента в структуре гаммадиона через R_i – радиус; d_i – ширина металлической полоски; H_i – высота S -элемента.

Индуктивность и емкость N -заходного гаммадиона определяются следующим образом:

$$C = \sum_{i=1}^N C_i; \quad L = \prod_{i=1}^N L_i \left(\sum_{i=1}^N L_i \right)^{-1}, \quad (23)$$

где L_i – индуктивность i -го S -элемента; C_i – емкость i -го S -элемента ($i = \overline{1, N}$); N – общее число S -элементов в гаммадионе.

Емкость гаммадиона определяется следующим образом:

$$C = C_s + C_{мэ}, \quad (24)$$

то есть в виде суперпозиции емкостей самого гаммадиона и межэлементной емкости.

Собственная емкость гаммадиона определяется как

$$C_s = \varepsilon_{c2} \frac{2\pi N R d}{h}, \quad (25)$$

где h – толщина контейнера метаматериала.

Межэлементная емкость определяется по формуле:

$$C_{мэ} = \varepsilon_{c2} \frac{\pi N R d}{2 A_0}, \quad (26)$$

где A_0 – расстояние между центрами соседних гаммадионов. В итоге выражение для общей емкости N -заходного гаммадиона имеет вид:

$$C = 2\pi N \varepsilon_{c2} R d \left(\frac{4 A_0 + h}{4 A_0 h} \right). \quad (27)$$

Индуктивность N -заходного гаммадиона определяется следующим соотношением:

$$L = \mu_{c2} \frac{2\sqrt{2} N R^2}{d}. \quad (28)$$

Выражение с использованием формулы Томсона для резонансной частоты N -заходного гаммадиона получается из соотношений (27) и (28):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{c2} \mu_{c2}}} \frac{\sqrt{2 A_0 h}}{N R \sqrt{\pi H (4 A_0 + h)}}. \quad (29)$$

Численные результаты

Для проведения численного анализа была выбрана структура, представляющая собой матрицу

Рисунок 4. Частотные зависимости отраженной от планарного слоя КММ мощности (Е-поляризация) при использовании моделей Максвелла-Гарнетта и Бруггемана при $\alpha_2 = 0,1$

Рисунок 5. Частотные зависимости прошедшей через планарный слой КММ мощности (Е-поляризация) при использовании моделей Максвелла-Гарнетта и Бруггемана при $\alpha_2 = 0,1$

Рисунок 6. Частотные зависимости отраженной от планарного слоя КММ мощности (Е-поляризация) при использовании моделей Максвелла-Гарнетта и Бруггемана при $\alpha_2 = 0,15$

Рисунок 7. Частотные зависимости прошедшей через планарный слой КММ мощности (Е-поляризация) при использовании моделей Максвелла-Гарнетта и Бруггемана при $\alpha_2 = 0,15$

из двухзаходных гаммадионов. Контейнер имел $\epsilon_{c2} = 1,6$. Толщина планарного слоя КММ равнялась 0,05 м. Гаммадион обладал следующими значениями геометрических параметров:

$$R_1 = 0,01 \text{ м}, N_1 = 2, r_1 = 0,002 \text{ м}, \\ H_1 = 0,05 \text{ м}, d_1 = 0,05 \text{ м}.$$

Падение ЭМВ на исследуемый планарный слой КММ было нормальным: $\theta = 0$. Были для примера исследованы два случая, когда менялась концентрация киральных компонентов внутри контейнера, то есть $\alpha_2 = 0,1; 0,15$. Также в качестве частного случая была рассмотрена ситуация, соответствующая отсутствию учета гетерогенности КММ.

В результате были рассчитаны частотные зависимости отраженной мощности основной компоненты $20\lg|r_{ee}|$ и прошедшей мощности основной компоненты $20\lg|t_{ee}|$ для случая падения на планарный слой КММ волны с Е-поляризацией поля.

На рисунке 4 приведены частотные зависимости отраженной от планарного слоя КММ мощности (Е-поляризация) при различных значениях концентрации киральных компонентов в диапазоне частот от 1 до 10 ГГц при $\alpha_2 = 0,1$.

На рисунке 5 приведены зависимости прошедшей через планарный слой КММ мощности (Е-поляризация) при различных значениях концентрации киральных компонентов в диапазоне частот от 1 до 10 ГГц при $\alpha_2 = 0,1$.

Из сравнения рисунков 4 и 5 можно сделать вывод о том, что вблизи частот 2,77 ГГц и 6,0 ГГц наблюдаются минимумы прохождения и отражения основной (падающей, Е) компоненты поля. На этой частоте ЭМП концентрируется в планарном слое КММ.

Также можно отметить, что использование гетерогенных моделей Максвелла-Гарнетта и Бруггемана приводит к различным значениям резонансных частот, возникновению эффекта частотно селективной концентрации ЭМП в планарном слое КММ.

На рисунке 6 приведены частотные зависимости отраженной от планарного слоя КММ мощности (Е-поляризация) при различных значениях концентрации киральных компонентов в диапазоне частот от 1 до 10 ГГц при $\alpha_2 = 0,15$. На рисунке 7 приведены зависимости прошедшей через планарный слой КММ мощности (Е-поляризация) при различных значениях концентрации киральных компонентов в диапазоне частот от 1 до 10 ГГц при $\alpha_2 = 0,15$.

Из сравнения рисунков 6 и 7 можно сделать вывод, что вблизи частот 2,77 и 6,0 ГГц наблюдаются минимумы прохождения и отражения основной (падающей, Е) компоненты поля. На этой частоте ЭМП концентрируется в планарном слое КММ.

С ростом частоты расхождение, полученное при расчете характеристик с использованием различных гетерогенных моделей, а также без их использования, возрастает.

Заключение

В работе построены математические модели КММ на основе N -заходных тонкопроволочных произвольно ориентированных гаммадионов, учитывающие свойства киральности, гетерогенности (с использованием формул Максвелла-Гарнетта и Бруггемана) и дисперсии. В результате решения задачи о падении плоской электромагнитной волны линейной поляризации на планарный

слой КММ доказано, что КММ может обладать ярко выраженными частотно селективными свойствами.

В результате численного анализа были обнаружены частотные режимы, в которых КММ выполняет функции преобразователя нормально падающего электромагнитного излучения в переизлучение в области метаструктуры. Обнаруженный эффект может быть использован при разработке частотно селективных концентраторов (хабов) СВЧ-энергии, а также частотно селективных сенсорных метаповерхностей. В работе доказано, что использование гетерогенных моделей Максвелла-Гарнетта и Бруггемана приводит к различным значениям резонансных частот, возникновению эффекта частотно селективной концентрации ЭМП в планарном слое КММ.

Показано, что с ростом частоты расхождение, полученное при расчете характеристик с использованием различных гетерогенных моделей, а также без их использования, возрастает.

Литература

1. Capolino F. Theory and Phenomena of Metamaterials. London: CRC Press – Taylor & Francis Group, 2009. 992 p.
2. Engheta N., Ziolkowski R.W. Metamaterials: Physics and Engineering Explorations. Hoboken: Wiley, 2006. 414 p.
3. Iyer A.K., Alù A., Epstein A. Metamaterials and metasurfaces – Historical context, recent advances, and future directions // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2020. Vol. 68, no. 3. P. 1223–1231. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.2020.2969732>
4. Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media / I.V. Lindell [et al.]. London: Artech House, 1994. 291 p.
5. Lakhtakia A., Varadan V.K., Varadan V.V. Time-Harmonic Electromagnetic Fields in Chiral Media. Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 121 p.
6. Caloz C., Sihvola A. Electromagnetic chirality. Part 1: The microscopic perspective [electromagnetic perspectives] // IEEE Antennas and Propagation Magazine. 2020. Vol. 62, no. 1. P. 58–71. DOI: <https://doi.org/10.1109/MAP.2019.2955698>
7. Controlling THz and far-IR waves with chiral and bianisotropic metamaterials / G. Kenanakis [et al.] // EPJ Appl. Metamaterials. 2015. Vol. 2. P. 15–12. DOI: <https://doi.org/10.1051/epjam/2015019>
8. Veselago V.G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ // Soviet Phys. Uspekhi. 1968. Vol. 10, no. 4. P. 509–514.
9. Shelby R.A. Experimental verification of a negative index of refraction // Science. 2001. Vol. 292, no. 5514. P. 77–79.
10. Silverman M.P. Reflection and refraction at the surface of a chiral medium: comparison of gyrotropic constitutive relations invariant or noninvariant under a duality transformation // J. Opt. Soc. Am. 1986. Vol. 3, no. 6. P. 830–837.
11. Bassiri S., Papas C.H., Engheta N. Electromagnetic wave propagation through a dielectric-chiral interface and through a chiral slab // J. Opt. Soc. Am. 1988. Vol. 5, no. 9. P. 1450–1459.
12. Maxwell G.J.C. Colours in metal glasses and in metallic films // Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A. 1904. Vol. 203. P. 385–420.
13. Bruggeman D.A.G. Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen, I. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten der Mischkörper aus isotropen Substanzen // Ann. Phys. 1935. Lpz. 24. P. 636–679.
14. Сушко М.Я., Криськив С.К. Метод компактных групп в теории диэлектрической проницаемости гетерогенных систем // Журнал технической физики. 2009. Т. 79, № 3. С. 97–101.
15. Юрасов А.Н., Яшин М.М. Теория эффективной среды как инструмент анализа оптических свойств нанокompозитов // Российский технологический журнал. 2018. Т. 6, № 2 (22). С. 56–66.
16. Semchenko I.V., Tretyakov S.A., Serdyukov A.N. Research on chiral and bianisotropic media in Byelorussia and Russia in the last ten years // Progress in Electromagnetics Research. 1996. Vol. 12. P. 335–370.
17. Неганов В.А., Осипов О.В. Отражающие, волноведущие и излучающие структуры с киральными элементами. М.: Радио и связь, 2006. 280 с.
18. Harrington R.F. Time-Harmonic Electromagnetic Fields. New York: McGraw-Hill, 1961. 496 p.

Получено 02.11.2020

Аралкин Михаил Вячеславович, сотрудник кафедры № 28 Военной академии Ракетных войск стратегического назначения им. Петра Великого Министерства обороны РФ. 143900, Российская Федерация, Московская область, г. Балашиха, ул. Карбышева, 8. Тел. +7 916 650-44-33. E-mail: aralkin_mv@inbox.ru

Дементьев Андрей Николаевич, д.т.н., доцент кафедры радиоволновых процессов и технологий института радиотехнических и телекоммуникационных систем МИРЭА – Российского технологического университета. 119454, Российская Федерация, г. Москва, пр. Вернадского, 78. Тел. +7 903 250-04-21. E-mail: dementev_2001@mail.ru

Осипов Олег Владимирович, д.ф.-м.н., доцент, проректор по науке и инновациям, профессор кафедры радиоэлектронных систем Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики. 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Л. Толстого, д. 23. Тел. +7 917 941-10-73. E-mail: o.osipov@psuti.ru

THE USING OF MAXWELL GARNETT AND BRUGGMAN MODELS TO DESCRIBE HETEROGENEITY OF A CHIRAL METAMATERIAL BASED ON GAMMADIONS

Aralkin M.V.¹, Dementyev A.N.², Osipov O.V.³

¹ *Military Academy of the Strategic Missile Forces named after Peter the Great
of the Ministry of Defense of the Russian Federation, Balashikha, Russian Federation*

² *MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russian Federation*

³ *Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation
E-mail: o.osipov@psuti.ru*

This paper assesses the various generalized mathematical models of microwave chiral metamaterials based on various forms of material equations. The article concludes that it is necessary to describe a chiral metamaterial as a heterogeneous media, taking into account the dependence of the effective dielectric permittivity on the container permittivity and permittivity of a volumes with chiral inclusions. In this work, mathematical models of a chiral metamaterial are constructed based on the Maxwell Garnett and Bruggeman formulas, taking into account the properties of heterogeneity. As the investigated chiral metamaterial we chose a metastructure based on fine-wire curved gammadions with different numbers of loops. For this structure, the resonance frequencies of chiral inclusions in the form of multi-loop fine-wire curvilinear gammadions were determined. As an example, we solved the problem of reflection (transmission) of a plane electromagnetic wave with linear polarization from a planar layer of a chiral metamaterial based on a uniform matrix of multi-loop fine-wire curvilinear gammadions. In this work, the influence of the number of gammadion loops on the reflecting and transmitting properties of the chiral metamaterial is determined. The article analyzes the issues of using the Maxwell Garnett and Bruggeman formulas to take into account the heterogeneity of the chiral metamaterial and their influence on the results of calculating the reflection and transmission coefficients of the wave. It is proved in this work that a planar layer of a chiral metamaterial based on multi-loop fine-wire curvilinear gammadions allows concentrating the incident electromagnetic field in the plane of the metastructure.

Keywords: *chiral media, chiral metamaterial, metamaterial, metastructure, spatial dispersion, frequency selectivity, Bruggemann model, Maxwell Garnett model, Condon model, gammadion*

DOI: 10.18469/ikt.2020.18.4.02

Aralkin Mikhail Vyacheslavovich, Military Academy of the Strategic Missile Forces named after Peter the Great of the Ministry of Defense of the Russian Federation, 8, Karbysheva Street, Balashikha, Moscow Region, 143900, Russian Federation; Technician of No. 28 Department. Tel. +7 916 650-44-33. E-mail: aralkin_mv@inbox.ru

Dementyev Andrey Nikolaevich, MIREA – Russian Technological University, 78, Vernadsky Avenue, Moscow, 119454, Russian Federation; Associate Professor of Radio Wave Processes and Technologies of the Institute of Engineering and Telecommunication Systems Department, Doctor of Technical Science. Tel. +7 903 250-04-21. E-mail: dementev_2001@mail.ru

Osipov Oleg Vladimirovich, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23, L. Tolstoy Street, Samara, 443010, Russian Federation; Vice-Rector of Science and Innovation, Professor of Radioelectronic Systems Department, Doctor of Physics and Mathematics. Tel. +7 917 941-10-73. E-mail: o.osipov@psuti.ru

References

1. Capolino F. *Theory and Phenomena of Metamaterials*. London: CRC Press – Taylor & Francis Group, 2009, 992 p.
2. Engheta N., Ziolkowski R.W. *Metamaterials: Physics and Engineering Explorations*. Hoboken: Wiley, 2006, 414 p.
3. Iyer A.K., Alù A., Epstein A. Metamaterials and metasurfaces – Historical context, recent advances, and future directions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2020, vol. 68, no. 3, pp. 1223–1231. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.2020.2969732>
4. Lindell I.V. et al. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media*. London: Artech House, 1994, 291 p.
5. Lakhtakia A., Varadan V.K., Varadan V.V. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields in Chiral Media. Lecture Notes in Physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1989, 121 p.
6. Caloz C., Sihvola A. Electromagnetic chirality. Part 1: The microscopic perspective [electromagnetic perspectives]. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 2020, vol. 62, no. 1, pp. 58–71. DOI: <https://doi.org/10.1109/MAP.2019.2955698>
7. Kenanakis G. et al. Controlling THz and far-IR waves with chiral and bianisotropic metamaterials. *EPJ Appl. Metamaterials*, 2015, vol. 2, pp. 15-1–12. DOI: <https://doi.org/10.1051/epjam/2015019>
8. Veselago V.G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Soviet Phys. Uspekhi*, 1968, vol. 10, no. 4, pp. 509–514.
9. Shelby R.A. Experimental verification of a negative index of refraction. *Science*, 2001, vol. 292, no. 5514, pp. 77–79.
10. Silverman M.P. Reflection and refraction at the surface of a chiral medium: comparison of gyrotropic constitutive relations invariant or noninvariant under a duality transformation. *J. Opt. Soc. Am*, 1986, vol. 3, no. 6, pp. 830–837.
11. Bassiri S., Papas C.H., Engheta N. Electromagnetic wave propagation through a dielectric-chiral interface and through a chiral slab. *J. Opt. Soc. Am*, 1988, vol. 5, no. 9, pp. 1450–1459.
12. Maxwell G.J.C. Colours in metal glasses and in metallic films. *Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A*, 1904, vol. 203, pp. 385–420.
13. Bruggeman D.A.G. Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen, I. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten der Mischkörper aus isotropen Substanzen. *Ann. Phys*, 1935, Lpz. 24, pp. 636–679.
14. Sushko M.Ja., Kris'kiv S.K. The compact group method in the theory of the dielectric constant of heterogeneous systems. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 2009, vol. 79, no. 3, pp. 97–101. (In Russ.)
15. Jurasov A.N., Jashin M.M. Effective medium theory as a tool for analyzing the optical properties of nanocomposites. *Rossiyskiy tekhnologicheskij zhurnal*, 2018, vol. 6, no. 2 (22), pp. 56–66. (In Russ.)
16. Semchenko I.V., Tretyakov S.A., Serdyukov A.N. Research on chiral and bianisotropic media in Byelorussia and Russia in the last ten years. *Progress in Electromagnetics Research*, 1996, vol. 12, pp. 335–370.
17. Neganov V.A., Osipov O.V. *Reflective, Waveguiding and Radiating Structures with Chiral Elements*. Moscow: Radio i svjaz', 2006, 280 p. (In Russ.)
18. Harrington R.F. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. New York: McGraw-Hill, 1961, 496 p.

Received 02.11.2020