Вестник научно-технического развития Bulletin of Science and Technical Development

Номер 5 (153), май 2020 г.

DOI: 10.18411/vntr2020-153

Издается с 2007 года

Издание зарегистрировано в Министерстве РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации Эл. № ФС77-29768.

ISSN 2070-6847

*Журнал выпускается под научным руководством Федерального государственного
бюджетного учреждения науки Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН*

ОГЛАВЛЕНИЕ № 5 (153), 2020

Людмила Яковлевна Банах, Леонид Иосифович Тывес. Траектории плавающих колец в роторных механизмах. Кинематика и эксперимент.....стр. 3 - 9

Иосиф Исаакович Вульфсон. Особенности возбуждения колебаний при пересечении резонансных зон.....стр. 10 – 26

Александр Владимирович Иляхинский, Владимир Митрофанович Родюшкин. О возможности контроля процесса деформирования сплава АМгб1 по акустическим параметрам.....стр. 27 – 33

Олег Иванович Косарев, Алла Константиновна Пузакина. Излучение цилиндрической оболочки.....стр. 34 – 37

Издание зарегистрировано в Министерстве РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации Эл. № ФС77-29768.

ISSN 2070-6847

УДК 534.1, 621.1

ТРАЕКТОРИИ ПЛАВАЮЩИХ КОЛЕЦ В РОТОРНЫХ МЕХАНИЗМАХ. КИНЕМАТИКА И ЭКСПЕРИМЕНТ

Людмила Яковлевна Банах, Леонид Иосифович Тывес

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения
им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия

banl@inbox.ru, l-tyves@hovrino.net

Аннотация. Исследуется кинематика движений плавающих колец роторного механизма при установившихся низкооборотных режимах вращения. С этой целью изготовлена экспериментальная установка. Кольцо установлено с зазором относительно ведущего цилиндрического звена и обегает его при постоянном контакте с ним. Показано, что движение кольца при «лунном» движении ведущего звена представляет собой прямую асинхронную прецессию, при котором его точки описывают траектории типа эпитрохоиды.

Ключевые слова: ротор, механизм, плавающее кольцо, контакт, прецессия кольца, траектории.

Поддержано грантом РФФИ № 18-08-00-171а.

THE FLOATING RINGS TRAJECTORIES IN ROTOR MECHANISMS. KINEMATICS AND EXPERIMENT

L.Ya. Banakh, L.I. Tyves

Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Moscow, Russia

banl@inbox.ru, l-tyves@hovrino.net

Abstract. The kinematics of motion for floating rings in rotary mechanism under steady low-speed rotation speed is studied. For this purpose, an experimental stand was created. The ring is installed with a clearance relative to the leading cylindrical link and runs around it with a constant contact. It is shown that the ring motion during the "lunar" motion of the leading link is a forward asynchronous whirling, in which its points describe the trajectories as epitrochoids types.

Key words: rotor, mechanism, floating ring, contact, the ring whirling, trajectory.

Постановка задачи. В роторных механизмах нередко происходит контакт вращающегося ротора с элементами роторной системы. При этом могут быть выделены две различные ситуации: 1) контакты ротора с неподвижным или упруго-закрепленным жестким статором; 2) контакты ротора с подвижными элементами (плавающие или пальчиковые уплотнения, гидростатические опоры с плавающими втулками, инерционные вибродробилки). При этом плавающие элементы в свою очередь могут контактировать со статором или другими плавающими элементами.

Контактные режимы в этих двух случаях существенно различны. В первом случае возникает обкатка ротора изнутри по статору, что сопровождается проскальзыванием ротора и приводит к быстрому износу подшипников и тяжелым аварийным ситуациям. Ротор при обкатке совершает асинхронную прецессию в направлении, противоположном скорости вращения (обратная прецессия). При этом скорость прецессии чрезвычайно велика, и давление на статор может в десятки раз превышать вес самого ротора [1-6]. Вследствие того, что прецессия обратная траектории точек ротора представляют собой гипотрохоиды.

Второй тип контактных режимов - это вращение ротора внутри легких подвижных элементов системы, например, в подшипниках с плавающей втулкой, внутри плавающих уплотнений [7-10]. Плавающие уплотнения обеспечивают хорошую герметизацию уплотнения. Такие режимы при низких скоростях вращения ротора специально поддерживаются в инерционных вибродробилках [2]. Возникновение контактных режимов может привести к повреждению и даже разрушению плавающих элементов. При этом плавающее кольцо «обегает» ротор снаружи в режиме прямой прецессии [3]. В дальнейшем (в отличие от режима обкатки ротора по неподвижному основанию) будем называть такие режимы *обеганием* кольца вокруг ротора. Такого класса системы относятся к механизмам с высшими кинематическими парами.

В статье рассматривается система «ротор- плавающее кольцо». Приводится анализ траекторий, полученных на экспериментальной установке, моделирующей процесс «обегания». Процесс обегания – это достаточно сложный многочастотный режим. Поэтому, прежде чем исследовать этот процесс в роторных системах, необходимо вначале на модельной установке исследовать кинематику движений кольца при малых скоростях вращения, найти его траектории и выявить основные закономерности. Найдены экспериментальные траектории движения кольца при различных параметрах системы, что позволяет развить и уточнить результаты теоретического исследования [11].

Описание экспериментальной установки. Для моделирования процесса обегания была сконструирована и изготовлена экспериментальная установка, кинематическая схема и общий вид которой представлены на рис. 1 а, б.

На основании 1 (рис.1, б) установлен двигатель 2 вращения ведущего вала модели с рычагом 3, шарнирно связанным на одном конце с осью 4, на которой укреплены шайба 5, моделирующая ротор, и одну из шестерён зубчато-ременной передачи 8. На другом конце рычага 3 установлен противовес 12, уравнивающий рычаг 3 с несомыми элементами относительно оси его вращения. Кольцо 6, охватывающее шайбу 5 с зазором, лежит на бумажном листе 11 на стеклянной подложке 10. Плоскость стеклянной подложки и, соответственно, бумажного листа перпендикулярна осям вращения рычага 3 и шайбы 5. Зазор между нижней плоскостью шайбы 5 и бумажным листом 11 не превышает 0,5 мм.

Ступица второй шестерни 7 зубчато-ременной передачи 8 установлена либо с возможностью вращения вместе с ведущим валом модели с рычагом 3, либо с фиксацией относительно неподвижной ступицы на основании 1. Для имитации лунного вращения модели ротора ось 4 с шайбой 5 и первой шестерёнкой зубчато-ременной передачи 8 фиксируется относительно рычага 3 винтом 9. Перенос винта 9 в позицию 9' с фиксацией вращений второй шестеренки 7 относительно основания 1 преобразует движение шайбы 5 в круговое поступательное движение. В этом случае шайба 5 и кольцо 6 образуют систему типа «хула-хуп». В настоящей работе исследуется кинематика роторной системы с «лунным» движением ротора.

Рис. 1: а) общий вид экспериментальной установки для кинематического анализа траекторий кольца при «обегании»: 1- двигатель, 2- кольцо, 3- шайба, 4- рычаг, передающий вращение от двигателя к шайбе 3; б) кинематическая схема экспериментальной установки; в) кадр видеосъемки вращения кольца при его обегании вокруг ротора.

Установка оснащена приборами освещения 13, установленными сверху, и видеокамерой 14 – снизу. На кольцо 6 имеются видимые на кадрах видеосъемки метки (рис.1в). Путём покадровой обработки строятся траектории движения кольца.

Параметрами данной установки являются: длина рычага $a = 40 \text{ мм}$, радиус вращающейся шайбы $r = 10 \text{ мм}$, внутренние радиусы сменных колец, совершающих обегание: $R = 11,5 \text{ мм}$, 19 мм , 35 мм .

При указанных соотношениях параметров a , r эта установка отличается от традиционных систем «ротор - плавающее кольцо». Отличие так же и в скоростях вращений. В экспериментальной установке они много ниже первой критической скорости вращения роторных систем. Однако, в ней отражена специфическая особенность роторных систем, а именно, «лунное» движение неуравновешенного ротора. При установившемся движении вследствие равенства частот вынужденных колебаний ротора частоте прецессии каждая точка ротора сохраняет свое положение относительно оси вращения, то есть имеет место прямая синхронная прецессия ротора [13].

Некоторые особенности режима обегания в экспериментальной установке. Прежде, чем перейти к описанию кинематической модели системы «вращающаяся шайба - плавающее кольцо», оценим влияние центробежных сил и сил трения, действующих на кольцо в установившемся режиме движения. В рассматриваемой модели ось шайбы вертикальна, а кольцо скользит как по горизонтальной плоскости, так и по цилиндрической поверхности относительно шайбы.

В установившемся режиме движения при постоянной скорости вращения кольца относительно его центра масс момент сил инерции кольца равен нулю.

Силы сухого трения кольца при скольжении по горизонтальной поверхности в случае низких скоростей вращения не симметричны относительно вектора скорости центра масс кольца. Сила трения на участке кольца с меньшим значением скоростей скольжения (то есть расположенном ближе к оси вращения «ротора») больше, чем сила трения на участке кольца с большим значением скоростей скольжения. Первые приближаются к силам трения покоя, а

вторые к силам трения движения. Гипотетически, эта асимметрия сил трения позволяет представить их в виде вектора силы трения, равного сумме сил трения приведенных к центру масс кольца, и направленного по касательной к траектории его движения, и момента сил трения, равного произведению разности сил трения на упомянутых участках кольца на средний радиус кольца. Такая же ситуация может иметь место вследствие разности технологических сопротивлений среды, в которой перемещается кольцо, и её нетрудно воспроизвести в экспериментах.

Сумма векторов силы трения и центробежных сил определяет как точку контакта ротора и кольца, так и величину взаимного давления в ней. От соотношения величины силы трения, создаваемой этим давлением, и усилием, создаваемым упомянутым выше моментом сил сопротивления на кольце, зависит скорость вращения кольца.

Для оценки влияния сил трения был проведен эксперимент, в котором на горизонтальную подложку был наклеен круг наждачной бумаги. При этом скорость вращения кольца увеличилась, но не достигла скорости прецессии.

Однако следует отметить, что указанные особенности относятся только к данной экспериментальной установке. Что же касается роторных систем, то в них нет горизонтальной подложки а, следовательно, и сил сухого трения между горизонтальной поверхностью и кольцом.

Кинематическая модель движений системы «вращающаяся шайба-плавающее кольцо» в режиме обегания. При соотношениях между параметрами системы, приведенными выше, взаимное расположение геометрических центров шайбы и кольца имеет вид, представленный на рис.2.

Рис. 2. Взаимное расположение центров: О- центр вращения системы, 1- шайба, 2- плавающее кольцо, 3- траектория точки N шайбы, наиболее удаленной от оси вращения, 4- траектория центра кольца O_2 , 5- траектория центра шайбы O_1 .

Геометрический центр O_1 шайбы совершает круговые движения с амплитудой a вокруг оси вращения О (окружность 5 на рис. 2). Рис. 2 соответствуют следующие обозначения в тексте: $OO_1 = a$, $O_1N = r$ - радиус шайбы, $O_1O_2 = \delta$, $PO_2 = R$ - радиус кольца. Точка N орбиты шайбы - наиболее удаленная от центра вращения. Эта точка при вращении шайбы описывает окружность радиуса $r + a$, центр которой лежит на оси вращения О (окружность 3 на рис. 2). Вращение рычага 4 имитирует вращение центра ротора, а длина рычага a - пропорциональна

величине дисбаланса, шайба 3 при этом совершает «лунное» движение, что имитирует прямую синхронную прецессию неуравновешенного ротора [12]. Это заставляет предположить, что точка контакта на шайбе остается одной и той же.

Действительно, как показали эксперименты, при малом трении между кольцом и опорной плоскостью и сравнительно невысоких скоростях вращения ротора, когда силы инерции кольца также невелики, контакт кольца происходит в такой точке шайбы P , что угол PO_1N примерно равен $\pi/2$. При установившемся движении точка контакта P на шайбе остается практически одной и той же (рис. 2), в то время как точки контакта на кольце различны. Кольцо обкатывает шайбу без отрыва, при этом геометрический центр кольца O_2 также описывает окружность (окружность 4), концентричную окружности 3. Радиус этой окружности, определяется из треугольника $O O_1 O_2$ (рис.2) и равен $\delta = (a^2 + (R - r)^2)^{1/2}$, где R - радиус кольца.

Как показали эксперименты, скорость прецессии геометрического центра кольца совпадает со скоростью прецессии геометрического центра шайбы, как по величине, так и по направлению, то есть $\omega = \Omega$. Это объясняется тем, что прямая, соединяющая центры шайбы и кольца перпендикулярна касательной в точке контакта. Следовательно, когда точка контакта на « роторе» постоянна, скорость вращения этой прямой совпадает со скоростью вращения точки контакта. Поскольку шайба совершает прямую синхронную прецессию со скоростью ω вокруг центра вращения O , то она сообщает кольцу скорость прецессии $\Omega = \omega$ вокруг того же центра O .

Таким образом, каждая из точек плавающего кольца участвует в двух движениях: вращении вокруг центра кольца со скоростью ω_1 и прецессии центра кольца Ω в том же направлении. Уравнения траектории точек кольца имеет вид:

$$\begin{aligned}x(t) &= R \sin \omega_1 t + \delta \sin \Omega t \\y(t) &= R \cos \omega_1 t + \delta \cos \Omega t\end{aligned}\quad (1)$$

Скорость вращения кольца можно определить из следующих условий. Радиус кольца больше радиуса шайбы, поэтому за время полного оборота шайбы внутри кольца оно повернется вокруг своего центра на угол, равный $\beta = 2\pi(r/R)$. Следовательно, скорость вращения кольца ω_1 составит:

$$\omega_1 = \omega r/R \quad (2)$$

Уравнения (1) в случае прямой прецессии кольца описывают эпитрохоиды, количество петель которых n определяется отношением скорости вращения кольца к скорости прецессии его центра: $n = 1 + \omega_1/\Omega$.

При вращении ротора с большими скоростями необходимо проводить исследование динамических процессов с учетом гидродинамических сил в зазоре, а также сил сухого трения [10].

Экспериментальные траектории точек кольца при «обегании». При обработке экспериментальных данных возникли определенные трудности при фиксации положений точек кольца на траектории. Использование записывающих устройств приводило к введению дополнительного демпфирования между кольцом и диаграммой, что существенно искажало процесс обегания. Поэтому положение точки кольца отмечалось на диаграмме без контакта с кольцом при различных углах поворота рычага («ротора»). На каждом кадре фиксировалось

положение двух диаметрально расположенных точек кольца, что позволило определить также траекторию центра кольца и скорость его прецессии. Эти траектории при различных соотношениях между радиусами колец и шайбы при одном обороте шайбы приведены на рис.3. Траектории получены при одинаковых коэффициентах трения между кольцом и шайбой, а также между ними и средой, что позволило провести их сравнительный анализ.

На рис. 3, а, б, в представлены траектории точек колец в режиме обегания за один оборот шайбы, полученные на экспериментальной установке. Из (2), в частности, следует, что скорость вращения кольца меньше скорости вращения шайбы, и поэтому при вращении шайбы метки кольца будут отставать от метки шайбы, что и наблюдалось в наших экспериментах. При наличии проскальзывания скорость вращения кольца снижается.

Таким образом, прецессия центра кольца - прямая (в отличие от режима обкатки, когда прецессия обратная). Вследствие этого траектории точек кольца представляют собой эпитрохоиды.

В том случае, если радиусы кольца R и шайбы r близки между собой (рис. 3, а), траектории точек кольца представляют собой окружности радиуса r^* , что подтверждается соотношениями (1).

Рис. 3. Экспериментальные траектории точек кольца в режиме обегания: I – траектория центра кольца, II- III- траектории диаметрально противоположных точек кольца: а) $R/r=1,1$, б) $R/r=1,9$, в) $R/r=3,5$

Траектории рис. 3 получены при одинаковых коэффициентах трения между кольцом и шайбой, а также между ними и средой. Это позволяет провести сравнение скоростей вращения кольца и шайбы для различных соотношений их радиусов. Получены следующие отношения скорости вращения кольца ω_1 к его скорости прецессии Ω : а) при $R=19$ мм:

$\omega_1/\Omega=1.6$ и траектория кольца –эпитрохоида с одной петлей (рис. 3, б), б) при $R=30\text{мм}$: $\omega_1/\Omega=2.7$ и траектория кольца –эпитрохоида с двумя петлями (рис. 3. в).

Выводы

- траектории точек кольца в роторных системах представляют собой эпитрохоиды, количество петель которых n определяется отношением скорости вращения кольца к скорости прецессии его центра;
- прецессия центра кольца- прямая (в отличие от режима обкатки, когда прецессия - обратная);
- траектория центра кольца представляет собой окружность, а скорость прецессии совпадает со скоростью вращения возбудителя колебаний (ротора)

Список литературы

1. Банах Л.Я. Некоторые явления, возникающие при движении вала в подшипнике с зазором//Машиноведение. – 1965. - № 1. - С.70-79. .
2. Блехман И.И. Вибрационная механика. - М.: Наука, 1994. - 398 с.
3. Banakh L. Contact problems in rotor systems //Vibroengineering. Procedia. - October 2016. - ISSN 2345-0533. - Vol. 8. - P. 90-96.
4. Shatochin V.F. Vibrations of turbogenerator rotors with rolling of rotor to stator. Modeling techniques and software tools. - Lap Lambert Academic Publishing, 2016. - 308 p.
5. Костюк А.Г., Шатохин В.Ф., Волоховская О.А. Особенности движения ротора с задеванием о статор // Теплоэнергетика . - 2013. - № 9. - С. 21-27.
6. Никифоров А.Н. Обобщенная математическая модель ротора Джеффкотта-Лавала с учетом проскальзывания при контактах и несоосности со статором //Вестник научно-технического развития. – 2012. - № 5(57)., С. 41-56.
7. Банах Л.Я., Никифоров А.Н. Снижение уровня вибрации быстроходных роторных систем при помощи плавающих уплотнительных колец //Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2013. - № 4. - С. 20-25.
8. Rozhdestvensky Yu, Boyarshinova A. and etc. Dynamics Analysis of Rotor with Floating Rings Package Bearing//8-th IFToMM Int.Conf. on Rotor Dynamics. - Seoul. Korea. - 2010.
9. Li. C.H., Rohde S. M. On the Steady and Dynamic Performance Characteristics of Floating Ring Bearings //ASME Paper No 80-C2/Lub-17. 1980
10. Ахметханов Р.С., Банах Л.Я., Рудис М.А. Анализ нестационарных колебаний быстро-вращающихся роторных систем с учетом газодинамических сил //Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2001. - № 6. - С. 16-22
11. Банах Л.Я., Бармина О.В., Кельнер М.С. Кинематика движений в роторной системе при контакте ротора с плавающими элементами //Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2017. - № 4. - С. 26-30.
12. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов. - Изд. АН СССР, 1959. - 247 с.

Дата поступления: 27 июня 2020 г.

УДК 621.01:534.1

ОСОБЕННОСТИ ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ПЕРЕСЕЧЕНИИ РЕЗОНАНСНЫХ ЗОН

© Иосиф Исаакович Вульфсон

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна", СПГУПТД, Санкт-Петербург, Россия

jvulf@yandex.ru

Аннотация. Анализируется ряд способов снижения возбуждения вибраций при пересечении резонансных зон цикловых машин с постоянными и переменными положениями центра масс. При параметрических резонансах для сохранения динамической устойчивости предложены способы определения пороговых значений диссипативных характеристик и длительности зоны пересечения. Полученные результаты могут быть использованы для повышения производительности машин, точности воспроизведения программного движения рабочих органов, реализации технологических требований, а также эргономических условий работы человека-оператора.

Ключевые слова: центр масс, резонанс, параметрические колебания, динамическая устойчивость.

FEATURES OF EXCITATION OF VIBRATIONS AT THE INTERSECTION OF RESONANT ZONES

© I.I. Vulfson

Saint Petersburg State University of Industrial Technologies and Design, Saint-Petersburg, Russia

jvulf@yandex.ru

Abstract. A number of ways to reduce vibration excitation at the intersection of resonant zones of cyclical machines with constant and variable positions of the center of mass are analyzed. For parametric resonances, methods for determining the threshold values of dissipative characteristics and the duration of the intersection zone are proposed to preserve dynamic stability. The results obtained can be used to improve the productivity of machines, the accuracy of reproducing the program movement of working bodies, the implementation of technological requirements, as well as the ergonomic working conditions of the human operator.

Key words: center of mass, resonance, parametric oscillations, dynamic stability.

1. Псевдорезонансы. Термины «псевдорезонанс» или «ложный» резонанс были предложены Я.Г. Пановко применительно к вынужденным колебаниям при быстром пересечении частотных диапазонов в резонансной зоне с целью понизить максимальные значения

амплитуд колебаний [1]. Поясним это на простом примере линейной колебательной системы с одной степенью свободы, описываемой дифференциальным уравнением

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = F_0 \cos \omega t \quad (1)$$

Поделив все члены уравнения (1) на a , запишем его в следующем виде:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = W_0 \cos(\omega t - \gamma), \quad (2)$$

где $b/a = 2n$; $c/a = k^2$; $F_0/a = W_0$; $\gamma = \arctg[2n / (k^2 - \omega^2)]$; $(0 \leq \gamma \leq \pi)$.

Сначала рассмотрим случай, когда отсутствует сила сопротивления ($b = 0$, $n = 0$). Решение складывается из решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения Y :

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + Y(t). \quad (3)$$

Зададимся начальными условиями $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$. Тогда $q_0 = C_1 + Y(0)$; $\dot{q}_0 = C_2 k + \dot{Y}(0)$, следовательно,

$$q = \underbrace{q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt}_1 - \underbrace{Y(0) \cos kt - \frac{\dot{Y}(0)}{k} \sin kt}_2 + \underbrace{Y(t)}_3. \quad (4)$$

Группа слагаемых 1 описывает свободные колебания, частота которых равна собственной частоте, а амплитуда зависит от начальных условий. Группа слагаемых 2 определяет так называемые сопровождающие колебания, частота которых также равна собственной частоте, но в отличие от свободных колебаний, амплитуда здесь не зависит от начальных условий, а определяется нарушением непрерывности частного решения Y и его производных [2]. Слагаемое 3 соответствует вынужденным колебаниям, зависящим как от параметров вынуждающей силы, так и от параметров колебательной системы.

При рассмотрении системы в окрестности резонанса ($\omega = k$) можно, не теряя общности, исключить из рассмотрения свободные колебания, приняв $q_0 = 0$, $\dot{q}_0 = 0$. В этом случае согласно формуле (4) получаем неопределенность, для раскрытия которой представим $q(t)$ в следующем виде:

$$q = \frac{W_0 t}{k + \omega} \frac{\sin[0,5(k - \omega)t]}{0,5(k - \omega)t} \sin[0,5(k + \omega)t] \quad (5)$$

При $\omega \rightarrow k$ получаем $q \approx [W_0 t / (2k)] \sin(kt)$.

Отсюда следует, что при отсутствии сил сопротивления резонансная амплитуда практически растет по линейному закону, поэтому при быстром пересечении резонансной зоны можно избежать аварийных последствий, т.е. возникает так называемый псевдорезонанс. Этот режим обычно реализуется при разгоне машины и в меньшей степени – при выбеге. При учете линейной силы сопротивления амплитуда и фаза колебаний определяются как

$$A = \frac{W_0}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}}; \quad \gamma = \arctg \frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}. \quad (6)$$

При резонансе $q = [W_0 / (2n\omega)] \sin(\omega t)$; $A_{\max} = W_0 / (2n\omega)$; $\gamma = \pi / 2$.

Заметим, что признаком резонансного состояния системы обычно принято считать периодические колебания с собственными частотами. Между тем, экспериментальные исследования свидетельствуют о существовании случаев, когда подобные колебания возникают в нерезонансных зонах, т.е. при отсутствии $\omega \rightarrow k$. Это подтверждается приведенными на рис.1 осциллограммами колебаний петлеобразующих органов основовязальных машин при существенной разнице собственных частот и частот возбуждения [2,3]. Основной причиной подобного эффекта являются нарушения непрерывности геометрических характеристик, т.е. функции положения и ее производных: $\Pi(\varphi), \Pi'(\varphi), \Pi''(\varphi), \Pi'''(\varphi)$.

Рис.1. Осциллограммы при нерезонансном периодическом возбуждении.

При анализе амплитудной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристик в инженерных расчетах предпочтительна безразмерная форма зависимостей (6). Введем в рассмотрение коэффициент динамичности κ , равный отношению амплитуды вынужденных колебаний A к так называемой статической амплитуде $A_{ст} = F_0 / c$. Статическая амплитуда – это деформация системы под действием амплитудного значения вынуждающей силы, приложенной в статических условиях. Согласно (6)

$$\kappa = \frac{A}{A_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4z^2\delta^2}}, \quad (7)$$

где $z = \omega/k$ – коэффициент частотной расстройки, равный отношению частоты вынуждающей силы к собственной частоте; $\delta = n/k = \vartheta/(2\pi)$ – коэффициент демпфирования; ϑ – логарифмический декремент.

Функции $\kappa(z)$, являющейся безразмерной формой АЧХ, отвечает кривая, показанная на рис.2. При $z = 0$ ($\omega = 0$) имеем $\kappa = 1$. С ростом z функция $\kappa(z)$ сначала возрастает, достигая максимума в окрестности резонанса ($z \approx 1$). Значению κ_{max} отвечает минимум подкоренного выражения знаменателя формулы (7).

Легко убедиться, что $\kappa_{max} = \kappa(z_*) = 1 / (2\delta\sqrt{1 - \delta^2})$, где $z_* = \sqrt{1 - \delta^2}$. При $z = 1$ (резонанс) $\kappa_{\delta \rightarrow 0} = 1 / (2\delta)$. Принимая во внимание, что обычно $\delta < (0,1 \div 0,2)$, можно утверждать, что $\kappa_{max} \approx \kappa_{рез}$. Однако при больших значениях δ ($\delta^2 > 0,5$), что возможно при установке специальных демпфирующих устройств или при учете характеристик двигателей, функция $\kappa(z)$ не имеет экстремума и является убывающей.

В резонансной зоне ($z > 1$) функция $\alpha(z)$ асимптотически стремится к нулю. Без учета силы сопротивления ($\delta = 0$)

$$\alpha(z) = 1/|1 - z^2|. \quad (8)$$

Анализ зависимостей (7) и (8) показывает, что при малых δ диссипативные факторы играют определяющую роль лишь непосредственно в резонансной зоне. При $z < 0,7$ и $z > 1,4$ результаты практически совпадают, поэтому в нерезонансных зонах нередко пользуются более простой зависимостью. В частности, при $z > \sqrt{2}$ имеем $\alpha(z) < 1$. Это означает, что амплитуда вынужденных колебаний оказывается меньше, чем статическая амплитуда, реализуемая в окрестности $\omega = 0$. Это обстоятельство часто используется с целью виброизоляции колебательных систем.

α

Рис.2. График АЧХ

Рис.3. График ФЧХ

При кинематическом возмущении какая-либо точка или сечение системы получает принудительное движение по заданному закону. Так, например, для модели подрессоренного экипажа (рис.4,а) источником возмущений является профиль дороги, а для толкателя кулачкового механизма (рис.4,б) – закон движения, определяемый профилем кулачка. В обоих примерах входное сечение колебательной системы перемещается по закону $x(t)$; при этом перемещение ведомой массы m складывается из переносного движения $x(t)$ и относительного движения – $q(t)$, вызванного возбуждаемыми колебаниями. Соответствующее дифференциальное уравнение при отсутствии других возмущений имеет вид

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = -m\ddot{x}(t). \quad (9)$$

С помощью нормальных (главных) координат приведенная в этом и следующем параграфах методика может быть легко распространена на систему с конечным числом степеней свободы [2, 3].

Рис. 4. Типовые динамические модели.

Наиболее естественным способом определения решения дифференциального уравнения (2), на первый взгляд, является его интегрирование с помощью численных методов до выхода на установившийся режим. Однако такой способ приводит к значительной накопленной погрешности и повышенной трудоемкости расчета. Поэтому воспользуемся более точным и экономичным методом построения замкнутой формы решения. Исследуем поведение системы, описываемой дифференциальным уравнением (9), на произвольном периоде колебаний $0 < t < \tau$. При этом решение описывается зависимостью, в которую входят начальные условия $q(0) = q_0$ и $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$. Однако в данном случае начальные условия нам не известны, так как рассматриваемому периоду при установившемся колебательном режиме предшествует неограниченное число циклов. Для определения q_0 и $\dot{q}_0$ воспользуемся условиями периодичности вынужденных колебаний:

$$\left. \begin{aligned} q(q_0, \dot{q}_0, t=0) &= q(q_0, \dot{q}_0, \tau); \\ \dot{q}(q_0, \dot{q}_0, t=0) &= \dot{q}(q_0, \dot{q}_0, \tau). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Теперь мы располагаем системой двух уравнений с двумя неизвестными q_0 , $\dot{q}_0$, и можем воспользоваться зависимостью, справедливой при установившемся режиме на произвольном периоде колебаний. Повторив процедуру интегрирования с этими начальными условиями, находим окончательное решение $q(t)$, определяющее динамическую ошибку. Тем самым найдены начальные условия, соответствующие установившемуся колебательному режиму:

$$q_0 = C_1; \quad \dot{q}_0 = C_2 k - C_1 n = k(C_2 - C_1 \delta) \approx k C_2 \quad (\delta = n/k \ll 1), \quad (11)$$

где C_1 ; C_2 – произвольные постоянные.

Повторив процедуру интегрирования с этими начальными условиями, находим окончательное решение $q(t)$, определяющее динамическую ошибку. Амплитуда сопровождающих колебаний в начале цикла равна

$$D_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \mu \sqrt{[Y^0(\tau) - \Delta x_0]^2 + k^{-2} [\dot{Y}^0(\tau) - \Delta \dot{x}_0]^2}, \quad (12)$$

где μ – коэффициент накопления возмущений, определяемый как

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - 2e^{-\vartheta N} \cos 2\pi N + e^{-2\vartheta N}}}. \quad (13)$$

Семейство кривых $\mu(N, \vartheta)$, где $N = k / \omega_0$, ϑ – логарифмический декремент приведено на рис.5. Коэффициент μ может быть как больше единицы (усиление колебаний), так и меньше (ослабление колебаний).

Рис. 5. Графики коэффициентов накопления возмущений

Максимальное значение μ^+ лежит в окрестности целых N , а минимальное значение μ^- , – когда $2N$ – нечетное число. Из формулы (13) следует

$$\mu^+ = [1 - \exp(-\vartheta N)]^{-1}; \quad \mu^- = [1 + \exp(-\vartheta N)]^{-1}. \quad (14)$$

Значению μ^+ отвечает совпадение фазы ранее возбужденных колебаний и колебаний в рассматриваемом цикле. При $\mu = \mu^-$ эти колебания находятся в противофазе. Подчеркнем важную особенность этого способа, связанную с возможностью рационального сочетания численных и аналитических методов: численным интегрированием здесь определено лишь частное решение на ограниченном отрезке времени; условия же, отвечающие выходу на установившийся режим, выявлены аналитически. Последнее существенно сказывается на точности решения. Разумеется, при относительно простых функциях возбуждения получение замкнутой формы решения можно осуществить и без обращения к численным методам, непосредственно используя аналитическую форму частного решения. Применение численно-аналитического способа особенно целесообразно в тех случаях, когда в геометрических передаточных функциях или внешних силах имеются разрывы непрерывности, что обычно характерно для кулачковых механизмов. При более сложной форме описания вынуждающей силы целесообразно воспользоваться **численно-аналитическим способом**, который состоит из следующих этапов:

- численное интегрирование дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях. Определяем $\Delta Y = Y(\tau)$ и $\Delta \dot{Y} = \dot{Y}(\tau)$;
- определение по формуле (11) констант C_1 , C_2 и начальных условий, отвечающих установившемуся режиму;
- повторное численное интегрирование с полученными начальными условиями.

При этом способе численным интегрированием найдены лишь отдельные промежуточные функции, вычисленные на ограниченном отрезке времени, равном одному периоду τ , в то время как установившийся режим ($t \rightarrow \infty$) определен аналитически с помощью условий периодичности. Как уже отмечалось, это существенно сказывается на повышении точности решения, а также на уменьшении трудоемкости расчета.

2. Вынужденные колебания с квазипостоянной амплитудно-частотной характеристикой. Особенности колебательных систем данного класса проиллюстрируем на примере динамической модели, приведенной на рис.6 для цикловых механизмов (звенья 1,2,3) установленных на подвижной платформе 0 с упругим подвесом [2,3,5]. Между выходным звеном 3 и корпусом установлена пружина, осуществляющая силовое замыкание кинематической цепи. В дальнейшем при динамическом анализе мы будем рассматривать лишь один механизм с приведенными инерционными и упругодиссипативными характеристиками, поскольку дублирование механизмов связано только с уравниванием горизонтальных составляющих динамических реакций и не играет принципиальной роли с позиций рассматриваемой задачи.

Примем следующие условные обозначения: m_i – массы; c_i – коэффициенты жёсткости; ψ_i – коэффициенты рассеяния; φ, ω – угол поворота и угловая скорость звена 1; y_1, y_2 – координаты звеньев 0 и 3.

Рис.6. Схема механизма с аномальной характеристикой.

На кривошипе 1 в общем случае может быть дополнительно установлен груз массой m_D . Пусть при отсутствии этой массы кривошип уравновешен, т.е. его центр масс S совпадает с

точкой O . Тогда, при установке дополнительного груза центр масс этого звена переместится в точку D .

В качестве обобщённой координаты примем $q = y_1$, причём за нуль отсчёта примем положение равновесия системы при $\varphi = 0$. При этом кинетическая и потенциальная энергия описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} T &= 0,5[(m_0 + m_1)\dot{q}^2 + m_D(\dot{q} + R\omega\cos\omega t)^2 + m_2(\dot{q} + r\omega\cos\omega t)^2]; \\ V &= 0,5[c_0q^2 + c_1(q + r\sin\omega t)^2]. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь m_2 – сумма масс звеньев 2 и 3; $R = OD$; $r = OB$.

После подстановки (1) в уравнение Лагранжа второго рода при учёте эквивалентной силы линейного сопротивления получаем

$$m_2\ddot{q} + \beta\dot{q} + (c_0 + c_1)q = -[c_1r - \omega^2(m_DR + m_2r)]\sin\omega t, \quad (16)$$

где $m_\Sigma = m_0 + m_1 + m_2 + m_D$; $\beta = (c_0 + c_1)\psi_* / (2\pi\omega)$ – приведенный коэффициент линейного сопротивления; ψ_* – приведенный коэффициент рассеяния.

Если принять $c_1r = \omega_*^2(m_DR + m_2r)$, то имеет место динамическая разгрузка, при которой на определённой частоте $\omega = \omega_*$ кинематическое возбуждение полностью компенсируется восстанавливающей силой в упругом элементе с коэффициентом жесткости c_1 . Однако в данном случае перед нами стоит другая задача – осуществить колебания платформы с амплитудой, не зависящей (или слабо зависящей) от изменения ω . Согласно (16) амплитуда вынужденных колебаний определяется как

$$A = \frac{|c_1r - \omega^2(m_DR + m_2r)|}{(c_0 + c_1)\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\delta^2z^4}}, \quad (17)$$

где $z = \omega / p$; $p = \sqrt{[(c_0 + c_1) / m_\Sigma](1 - \delta^2)} \approx \sqrt{(c_0 + c_1) / m_\Sigma}$ – собственная частота; $\delta = \psi_* / (4\pi)$ – диссипативный коэффициент.

Для более ясного физического представления об исследуемой задаче сначала рассмотрим частный случай, при котором отсутствуют неуравновешенный груз ($m_D = 0$) и диссипативные силы ($\delta = 0$). Тогда формула (17) принимает вид

$$A = r \frac{|1 - \omega^2 / k^2|}{(1 + \zeta)|1 - \omega^2 / p^2|}, \quad (18)$$

где $k = \sqrt{c_1 / m_2}$; $\zeta = c_1 / c_0$.

Требование $\frac{dA}{d\omega} = 0$ приводит к очевидному условию $k = p$; при этом $c_1 / c_0 = m_2 / (m_1 + m_0)$ и $A = r / (1 + \zeta) = \text{const}$.

Полученный результат свидетельствует о нетривиальной ситуации, когда «амплитудно-частотная характеристика» не зависит от частоты возмущения. Легко убедиться в том, что собственная частота системы p при этом равна собственным частотам двух подсистем, полученных при разрыве кинематической связи в шарнирах B (см. рис.6). Это означает, что при «жёстком» соединении обеих подсистем собственная частота остаётся неизменной. Далее вернёмся к рассмотрению общего случая, соответствующего исходной модели. Тогда

$$A = \frac{|c_1 r - \omega^2 (m_2 r + m_D R)|}{(c_0 + c_1) \sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\delta^2 z^4}} = \frac{rk^2 |1 - \omega^2 (1 + \rho \mu_D) / k^2|}{p^2 (1 + \zeta) \sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\delta^2 z^4}}, \quad (19)$$

где $\rho = R / r$, $\mu_D = m_D / m_2$.

При выполнении условия $k^2 / (1 + \rho \mu_D) = p^2$ на основании (19) получаем

$$A = \frac{r |1 - z^2|}{(1 + \zeta) \sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\delta^2 z^4}}. \quad (20)$$

Принимая во внимание, что $p^2 = k^2 (1 + \zeta) / \mu_\Sigma$, где $\mu_\Sigma = 1 + \mu_0 + \mu_1 + \mu_D$, $\mu_i = m_i / m_2$, имеем дополнительное уравнение связи между безразмерными параметрами:

$$\zeta = \mu_\Sigma / (1 + \rho \mu_D) - 1 > 0 \quad (21)$$

Отметим, что при заданном дополнительном условии безразмерная собственная частота $\tilde{p} = p / k$ зависит только от произведения $\rho \mu_D$. В безразмерной форме окончательная зависимость, описывающая амплитудно-частотную характеристику, имеет вид $a = a_* \kappa(z, \delta)$, где безразмерные амплитуды вынужденных колебаний платформы и статической амплитуды равны

$$a = A / r, \quad a_* = (1 + \zeta)^{-1} = (1 + \rho \mu_D) / \mu_\Sigma.$$

Введем в рассмотрение коэффициент динамичности $\kappa(z, \delta)$, определяемый как

$$\kappa = 1 / \sqrt{1 + 4\delta^2 z^4 / (1 - z^2)^2}. \quad (22)$$

Далее определим колебания выходного звена 3

$$y_2 / r = \sin \omega t - a \sin(\omega t - \gamma), \quad (23)$$

где $\gamma = \arctg[2\delta z / (1 - z^2)]$.

Используя (11), можно показать, что

$$b = \max(y_2 / r) = \sqrt{(1 - a \cos \gamma)^2 + a^2 \sin^2 \gamma}, \quad (24)$$

где b – амплитуда звена 3.

На рис.7 приведено полученное на основании (21)–(24) семейство квазипостоянных амплитудно-частотных характеристик $a(z)$ для платформы 1 и $b(z)$ – для ведомого звена 3.

При построении графиков приняты следующие исходные данные:

$\mu_0 = 2$; $\mu_D = 0,5$; $\delta = 0,03$. Двойная индексация кривых соответствует $a - \rho$, $b - \rho$ (цифры отвечают численному значению параметра $\rho = R / r$).

Рис.7. Семейство АЧХ

Анализ графиков выявляет следующие особенности АЧХ:

- За исключением узкого частотного диапазона в окрестности резонансной зоны ($z = 1$) амплитуды вынужденных колебаний платформы и ведомого звена практически сохраняют постоянное значение.
- При резонансе ($z = 1$) амплитуда платформы обращается в нуль (антирезонанс), а для ведомого звена принимает значение $b = 1$ ($A_2 = \max(y_2) = r$), что соответствует резонансу.

При $\rho = 0$, $\rho = 1$ имеем $a < b$, а при $\rho = 3$ амплитуда платформы превышает амплитуду звена 3. Представляет интерес граничный случай $a = b$. При отсутствии диссипации в (13), принимая $b = a$, ($\gamma = 0, \pi$), получаем $a = b = 0,5$. Поскольку $a = a_*$, граничное значение $\rho = \rho_*$ определяется как $\rho^* = 0,5(\mu_0 + \mu_D - 1) / \mu_D$, то $a < b$, а при $\rho > \rho^*$ - $a > b$.

Для более подробного изучения поведения системы непосредственно в резонансной зоне на рис. 8 выделён соответствующий частотный диапазон. Помимо режимов, отображённых на рис.7, приведены АЧХ для режима $\rho^* = 1,5$. Анализ графиков показывает, что при $\rho < \rho^*$ фаза колебаний платформы и выходного звена при входе в резонансную зону сохраняется неизменной (кривые $a - 0$, $b - 0$), и наоборот, при $\rho > \rho^*$ меняются на противоположную (кривые $a - 3$, $b - 3$). При $\rho = \rho^*$ и некотором удалении от резонансной зоны, как и следовало ожидать, $a \approx b \approx a_*$. Этот режим проиллюстрирован на рис.8,б (a – кривая 1; b – кривая 2). Заметим, что аналогичная ситуация возникает при динамическом гашении, когда на определённой частоте реакция со стороны гасителя на объект виброзащиты «уравновешивает» внешнее возмущение.

Рис.8. АЧХ в резонансной зоне

На рис.9 приведены графики $y_1(t)$, $y_2(t)$, полученные компьютерным моделированием при $\rho = \rho^* = 1,5$ (остальные данные см. выше). В нерезонансной зоне ($z = 0,7$; рис.9, а) амплитуды колебаний соответствуют полученным выше значениям (см. рис. 5, б), а фазы колебаний γ звеньев 0 и 3 смещены на π . В резонансной зоне ($z = 0,997$) амплитуда платформы стремиться к нулю, а амплитуда ведомого звена – к единице (рис. 8, 9).

Рис.9. Колебания в нерезонансной и резонансной зоне: 1 – $y_1(t)$; 2 – $y_2(t)$.

Следует отметить, что при пересечении резонансной зоны система иногда не успевает полностью выйти на установившийся режим (см. рис.6,в), однако резкое уменьшение амплитуды колебаний платформы в резонансной зоне проявляется достаточно чётко.

3. Динамические характеристики при переменных значениях параметров. Ниже воспользуемся известным способом перехода к «безразмерному времени» $\varphi = \omega t$, где ω –

угловая скорость. При этом реализуется трансформация перехода к «безразмерным частотам» $\bar{k}_i = k_i / \omega \neq \text{const}$. При достаточной удаленности от параметрических возбуждений функция $q(\varphi)$ отображена на рис.10.

Рис.10. Графики $q(\varphi)$: 1. Среднее значение $\bar{k}_i = k_i / \omega$; 2. $\max \bar{k}_i$, 3. $\min \bar{k}_i$

Этот случай характерен для разгона и торможения двигателя, а также в процессе рабочего режима при изменении положения центра масс системы. Анализ графика наглядно показывает, что при «мгновенном» пересечении резонансной зоны $\Delta\varphi$ имеем $q \approx \text{const}$.

При увеличении q происходит рост отрезка времени пребывания в резонансной зоне. Таким образом, здесь мы опять столкнулись с типичным «ложным» резонансом, устранение которого возможно при быстром пересечении этой зоны.

Приведенные выше результаты справедливы при постоянном положении центра масс машинного агрегата. Однако в колебательных системах многих машинных агрегатов происходят перемещения центра масс, вызванные программными движениями рабочих органов и изготавливаемых изделий, а также механизмами привода, подъемно-транспортными функциями и другими факторами. Это является источником возникновения реономных связей, что приводит к нестационарности частотных характеристик привода машины, к появлению динамических эффектов, связанных с возбуждением параметрических колебаний и к возможности нарушений условий динамической устойчивости [2, 5-11]. Использование изложенного выше способа ложного резонанса в данном случае, на первый взгляд, вызывает некоторые сомнения, так как амплитуда при параметрическом резонансе в отличие от резонанса при вынужденных колебаниях возрастает очень интенсивно – по экспоненте. Выход из этого положения принципиально возможен, если исключить возможность пересечения частотного диапазона главного параметрического резонанса. Однако, как показывает анализ, при учете характеристик электродвигателя и ряда других факторов снижение виброактивности системы обычно эффективно реализуется за пределами низшей частоты, что требует пересечения этой резонансной зоны. Другой способ связан с повышением уровня диссипации системы. Можно показать, что для исключения возбуждения главного параметрического резонанса должно соблюдаться условие $\varepsilon < \varepsilon_* = \psi / \pi$, где ε, ψ – глубина пульсации и коэффициент рассеяния [3,5,7]. При этом

$k^2(t) = k_0^2(1 - \varepsilon \sin \Omega_1 t)$; $\Omega_1 = 2k_0$. Здесь k_0^2 – среднее значение; Ω_1 – частота главного

параметрического резонанса. В качестве базового объекта динамической модели примем жесткий элемент, установленный на двух упругих опорах (рис.11).

Рис. 11. Динамическая модель

Недостатками принятого варианта являются большие энергетические потери из-за преодоления диссипативных сил при подавлении параметрического резонанса. Для большей определенности при дальнейшем качественном динамическом анализе конкретизируем функции L_1, L_2 согласно следующим зависимостям:

$$L_1(\varphi) = h(0,5 + \lambda + \sigma \cos \varphi); L_2(\varphi) = h(0,5 - \lambda - \sigma \cos \varphi); (\lambda + \sigma < 0,5). \quad (25)$$

Параметры λ и σ соответствуют постоянной и переменной составляющим отклонения координаты центра масс от среднего положения. При $\sigma = 0$

$$L_1 = h(0,5 + \lambda) = a; L_2 = h(0,5 - \lambda) = b. \quad (26)$$

Тогда задача совпадает с распространенным случаем фиксированного неподвижного положения центра масс. При $\sigma \neq 0$ в данной задаче $h(\lambda + \sigma) = 0,5[L_1(0) - L_2(0)]$. Отсюда следует $\sigma = 0,5[L_1(0) - L_2(0)] / h - \lambda$. Отметим, что параметр L не зависит от φ : $L = L_1(\varphi) + L_2(\varphi) = h$.

В машинах с цикловыми механизмами нередко доминирует медленное изменение параметров. В практике это нередко приводит к ложному выводу, что влиянием нестационарных связей можно пренебречь. Однако в современных технологических машинах нередки случаи, при которых возникает необходимость в осуществлении многочастотного движения рабочего органа, когда приведенные инерционные и упругие характеристики содержат не только низкочастотные, но и высокочастотные составляющие [10, 11]. Аналогичная ситуация также возникает при использовании вибрационной линеаризации с целью уменьшения эффективных значений сил кулонова трения. Отмеченные факторы создают реономную связь и источник параметрического возбуждения. Практические приёмы определения областей динамической неустойчивости обычно базируются либо на различных модификациях метода малого параметра и других асимптотических методах, либо на численных методах. Процедура решения подобных задач далеко не элементарна, особенно если иметь в виду не эталонные упрощённые модели с одной степенью свободы, а реальные колебательные системы современных машин и механизмов, в которых параметрическое возбуждение имеет многокомпонентную структуру. Ниже задача решается на базе метода условного осциллятора, что позволяет избежать ряда трудностей, возникающих в данном случае при

использовании традиционных методов решения [6]. Выше были учтены лишь медленные составляющие движения центра масс. Однако, как показано в работах [3,11], при исследовании параметрического возбуждения нельзя пренебрегать влиянием высших частот. Поэтому наряду с формулами (4) ниже будут использованы аналогичные зависимости следующего вида:

$$L_1^* = L_1 + r \cos j\varphi; \quad L_2^* = L_2 + r \cos j\varphi, \quad (27)$$

где число j соответствует номеру учитываемой высокочастотной гармоники (рис.12). Здесь и ниже звездочка при параметрах обозначает использование функций $L_i^*(\varphi)$, что отвечает учету влияния высокочастотных гармоник.

Рис. 12. Графики L, L_i^*, L_i ($i = 1; 2$)

Рис. 13. Графики J, J^*

На рис.13 приведены графики моментов инерции J и J^* для частного случая, когда каждый из радиусов инерции $\rho = \sqrt{J/m}$, $\rho^* = \sqrt{J^*/m}$ соответственно равен среднему геометрическому между величинами L_1, L_2 и L_1^*, L_2^* .

Для определенности при численной оценке влияния переменности параметров примем $L=1$, $r=0,4L$, $j=8$, $c_1=100$ Н/м, $\tilde{n}_2=30$ Нм. В качестве обобщенных координат примем вертикальное перемещение центра масс $y=q_1$ и угол поворота качающегося объекта q_2 с моментом инерции J или J^* . Исследуемая динамическая модель описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{q}_1 + 2\delta_1^* m k_1^* \dot{q}_1 + (c_1 + c_2)q_1 + (c_1 L_1^* - c_2 L_2^*)q_2 &= Q_1; \\ J^* \ddot{q}_2 + 2\delta_2^* J^* k_2^* \dot{q}_2 + (c_1 L_1^* - c_2 L_2^*)q_1 + (c_1 L_1^{*2} + c_2 L_2^{*2})q_2 &= Q_2. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Здесь Q_1, Q_2 – обобщенные силы; $k_1^*(\varphi), k_2^*(\varphi)$ значения собственных частот (рис.14); $(\cdot)' = d/d\varphi$; $\delta_i^* = \mathfrak{D}_i^*/(2\pi)$ (рис.15) – коэффициент демпфирования; $\mathfrak{D}_i^*$ – логарифмический декремент.

Рис. 14. Собственные частоты:

 1. — k_1^* ; 2. — k_2^* ; 3. — k_1 ; 4. — k_2

 Рис.15. Коэффициент диссипации: 1.— k_1 ; 2.— k_2 ; 3.

 s — номер параметрического резонанса

Рис. 16. Параметрический резонанс при высокочастотном возбуждении

При анализе параметрического возбуждения и использовании «ложного резонанса» может возникнуть сомнение в эффективности этого способа из-за интенсивного роста амплитуд, требующего почти мгновенного перехода через резонансную зону. Однако, графики на рис.16, построенные согласно решению системы уравнений (28), свидетельствуют об относительно длительной задержке, предшествующей проявлению динамической неустойчивости. В более наглядном виде этот эффект отображен на рис.17 на графиках огибающих резонансных амплитуд и на фазовой плоскости, а также на графике Ω/k_2 (рис.18).

Как показал анализ, причиной данного эффекта является значительное уменьшение моментов инерции в этой зоне (см. рис.13), что привело к росту «собственных» частот, и к пересечению областей неустойчивости. На рис. 18 приведены три области параметрического резонанса и график, соответствующий главному параметрическому резонансу с частотой Ω . На графике также показано критическое значение глубины пульсации $\varepsilon < \varepsilon_*$, зависящее от уровня диссипации, при котором система сохраняет динамическую устойчивость.

Рис.17. К анализу эффекта задержки режима динамической неустойчивости.

Рис.18. Зоны динамической неустойчивости

Для принятой модели критическое значение коэффициента демпфирования равно

$$\delta > \delta_* = 3\mu\Pi'_*\Pi''_*\omega_0[2k_1\sqrt{1+\mu\Pi'^2_*}]^{-1}$$

Выводы. В статье решается задача оптимального пересечения резонансных зон и анализа зависимости виброактивности от перемещений центра масс машинного агрегата. Важным результатом проведенного исследования является устранение нарушений условий динамической устойчивости в частотном диапазоне параметрических резонансов.

Список литературы

1. Пановко Я. Г. Механика деформируемого твердого тела. - М.: Наука, 1985. - 288 с.
2. Вульфсон И.И. Динамика машин. Колебания. - М.: Юрайт, 2017. - 274 с.
3. Вульфсон И.И. Динамика цикловых машин. – СПб.: Политехника, 2013. - 425 с.

4. Вульфсон И.И., Тетерина В.В. Экспериментальное исследование усилий, возникающих в приводных тягах петлеобразующих органов основовязальной машины ОВ-7.- М.: ЦНИИТЭИ «Машиностроение для легкой промышленности». Вып.5, 1968. - С.28-34.
5. Вульфсон. И.И. , Коловский М.З. Нелинейные задачи динамики машин. – Л.: Машиностроение, 1968. - 284 с.
6. Вульфсон И.И. Параметрический синтез колебательных систем механизмов с аномальными характеристиками // СПб. Теория механизмов и машин (под ред. А.Н. Евграфова). - 2003. - №2. - С. 40 – 49.
7. Вульфсон И.И. О колебаниях систем с параметрами, зависящими от времени// Прикладная математика и механика. - 1969. - Т.33, №2. - С. 331–337.
8. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 600 с.
9. Вульфсон И.И. К проблеме снижения виброактивности приводов машин при учете динамических характеристик электродвигателя // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2017. - №4. - С. 12–19.
10. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. - М.: Наука, 1976. – 431 с.
11. Вульфсон И.И. Условия динамической устойчивости при совместном учёте медленных и быстрых изменений параметров// Вестник научно-технического развития. - 2015. - Т.91, №3. - С.3-13.

Дата поступления: 11 июня 2020 г.

УДК 534.2

О ВОЗМОЖНОСТИ КОНТРОЛЯ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ СПЛАВА АМг61 ПО АКУСТИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРАМ

© Александр Владимирович Иляхинский, Владимир Митрофанович Родюшкин

Институт проблем машиностроения РАН (ИПМ РАН) - филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения "Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН", Нижний Новгород, Россия

Ilyahinsky-aleks@bk.ru, vlkn2005@yandex.ru

Аннотация. В работе решается практическая задача использования принципов нелинейной акустики при исследовании процесса деформирования образцов сплава АМг61. Для контроля состояния сплава использована поверхностная упругая волна. Процесс распространения упругой волны в деформируемом сплаве АМГ61 в силу нелинейных эффектов сопровождается генерацией удвоенной частоты, как продольной составляющей волны, так и сдвиговой, "запрещенной" уравнениями классической теории упругости. Показано, что нелинейный акустический параметр, наравне с активностью акустической эмиссии, чувствителен к смене механизмов эволюции дефектной структуры. Зафиксировано формирование скачка нелинейности в процессе деформирования сплава АМг61, что может свидетельствовать о перестройки структуры металла.

Ключевые слова: деформирование, сплав АМг61, упругая волна, преобразователь, гармоника, нелинейность, устройство, акустическая эмиссия, измерение, контроль.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00715а; № 19-08-00965а)

ON THE POSSIBILITY OF MONITORING THE DEFORMATION PROCESS OF AMg61 ALLOY BY ACOUSTIC PARAMETERS

© A.V. Ilyahinsky, V.M. Rodyushkin

Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia

Ilyahinsky-aleks@bk.ru, vlkn2005@yandex.ru

Abstract. The paper solves the practical problem of using the principles of nonlinear acoustics in the study of the deformation process of amg61 alloy samples. A surface elastic wave is used to control the state of the alloy. The process of propagation of an elastic wave in a deformable amg61 alloy due to nonlinear effects is accompanied by the generation of a doubled frequency, both the longitudinal component of the wave and the shear one, which is "forbidden" by the equations of the classical theory of elasticity. It is shown that the nonlinear acoustic parameter, along with the activity of acoustic emission, is sensitive to changes in the mechanisms of evolution of the defective structure. The formation of a non-linearity jump in the process of deformation of the amg61 alloy was recorded, which may indicate a restructuring of the metal structure.

Keywords: *deformation, amg61 alloy, elastic wave, transducer, harmonic, nonlinearity, device, acoustic emission, measurement, control.*

Acknowledgements. *The research was supported by Russian Foundation for Basic Research, project No. 18-08-00715 a; No. 19-08-00965 a.*

Для контроля процесса деформирования металла используются различные акустические эффекты, из них наиболее часто в исследованиях упоминается акустическая эмиссия. Например в работах [1, 2] для изучения конструкционных металлических материалов использована взаимосвязь параметров поврежденности с характеристиками акустической эмиссии. В работе [3] процесс разрушения образца из сплава АМгб контролировался по параметр активности сигналов АЭ, чувствительный к смене механизмов излучения. В [4] при анализе акустической эмиссии, сопровождающей процесс разрушения материалов сделан вывод, что процесс разрушения представляет собой направленную эволюцию дефектной структуры как реакции материалов на приложенное к ним механическое напряжение. По мере исчерпания возможностей сопротивления нагружению на каком-то одном масштабном уровне в системе включаются следующие более высокие масштабные уровни, пока материал не исчерпывает все возможности сопротивления разрушению на всех масштабных уровнях.

Однако в последнее время внимание привлечено к акустическим явлениям, обусловленным нелинейным свойствами деформируемого металла. В твердых телах с дефектами и механическими напряжениями наряду с нелинейностью сил межмолекулярного взаимодействия (классическая нелинейность) проявляется структурная (неклассическая) упругая нелинейность, приводящая к нелинейной связи между механическим напряжением и деформацией. Нелинейные акустические эффекты в твердом теле при малых деформациях незначительны, поэтому в подавляющем большинстве работ описываются квадратичными поправками, ответственными за генерацию второй акустической гармоники [5]. Во многих работах [6-11] наблюдаемые нелинейные эффекты не могут быть объяснены в рамках классической пятиконстантной теории упругости. Эти эффекты объясняются не столько молекулярной структурой среды, сколько наличием в исследуемых образцах структурной нелинейности, обусловленной дефектной структурой исследуемого материала или нелинейной упругостью границ зерен, контактов и дефектных включений. Аномально высокая структурная нелинейность характерна для тел, обладающих микроструктурой или дефектами сплошности (трещины, поры, отслоения и т. п.). Такая структурная нелинейность, возможные механизмы которой рассмотрены в [12], может на несколько порядков превышать классическую упругую нелинейность [13]. Уравнения упруго - пластической среды, описывающие процесс накопление структурных повреждений [14,15], наглядно демонстрируют, что наличие даже малых пластических деформаций приводит к появлению удвоенной частоты (второй гармоники) в спектре сдвиговой волны, распространяющейся в материале. В [16] получены уравнения, описывающие динамические процессы в материалах, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию. Показано, что при распространении в таком материале сдвиговой волны появляется квадратичная нелинейность, приводящая к возможности генерации сдвиговой волны удвоенной частоты, "запрещенной" уравнениями классической теории упругости. В [10] описана генерация второй гармоники при зондировании сред со структурной нелинейностью, которая обусловлена дефектами.

Результаты исследований в упомянутых работах предполагают, что нелинейные эффекты могут служить источником информации о структуре твердого тела и могут быть использованы при создании новых методов неразрушающего контроля различных материалов и конструкций.

Для ответа на практический вопрос: как принципы нелинейной акустики могут быть использованы при оценке состояния материала, в работе экспериментально исследовано наряду с явлением акустической эмиссии, поведение нелинейного акустического параметра (НАП) при деформировании образцов сплава АМГ61.

Изучение взаимосвязи НАП со стадийностью пластической деформации сплава АМГ61 проводилось с использованием поверхностных волн Рэлея. Применение такого типа зондирующих волн обусловлено возможностью их практического использования для ультразвукового контроля деталей и заготовок любой формы [17].

Поверхностные акустические волны (ПАВ) имеет эллиптическую поляризацию и содержит две упругие компоненты: поперечную и продольную. Процесс распространения упругой волны в деформируемом сплаве АМГ61 в силу нелинейных эффектов сопровождается генерацией удвоенной частоты, как продольной составляющей волны, так и сдвиговой, "запрещенной" уравнениями классической теории упругости.

Отсюда следует, что экспериментально измеренное отношение амплитуд первой и второй гармоник в течении всего процесса деформирования будет характеризовать зависимость НАП от структурного состояния металла образца. Для этого использовать стандартную процедуру ультразвукового контроля, основанную на возбуждении короткого импульса упругих волн проблематично. Изначальный спектр таких импульсов маскирует информационные составляющие в прошедшем среде сигнале. В инженерной практике принимают (в первом приближении независимо от формы сигнала): $\Delta t \cdot \Delta f \approx 1$. То есть, что чем длиннее импульс - Δt , тем ширина его спектра частот - Δf уже. Поэтому проблема экспериментального обоснования спектрального метода акустического зондирования состояла в генерации сигнала с узкой полосой спектра и низким уровнем шумов. Решение этих проблем потребовало создания специализированного экспериментального устройства [19], позволяющее измерять отношение амплитуды первой и второй гармоник.

Работа устройства заключается в следующем. По поступающей от компьютера по USB команде микроконтроллер запускает генератор, который формирует радиоимпульс с частотой заполнения 1 МГц и длительностью 3,5 мс, сигнал подается на пьезоизлучатель, имеющий резонансную частоту 1 МГц. Спектральные характеристики исходного сигнала, измеренные прибором DPO4032 фирмы Tektronix, приведены на рис.1.

После взаимодействия со средой при прохождении ПАВ в деформируемом образце, сигнал фиксируется пьезоприёмником, имеющим резонансную частоту 2 МГц. Сигнал с приемного ПЭП поступает на усилитель, имеющим, для расширения динамического диапазона, завал АЧХ на частоте 1 МГц по сравнению с 2 МГц около 20 дБ, затем сигнал оцифровывается 16-разрядным АЦП с частотой квантования 5 МГц и запоминается в буферном ОЗУ. После этого микроконтроллер выполняет спектральный анализ полученного сигнала и вычисляет отношение амплитуд спектральных компонент на частотах 2 МГц и 1 МГц. Результат по USB передается в компьютер.

Следует заметить, что исследования нелинейности, как правило, проводятся в лабораторных условиях [20-22] удовлетворяя интерес исследователей, в то время как используемое представленное экспериментальное устройство позволяет исследовать металл на реальных конструкциях, что переводит его в ранг средств неразрушающего контроля.

Рис.1. Спектральные характеристики сигнала: уровень второй гармоники -83дБ, уровень третьей -53дБ

Экспериментальные исследования проводились на образцах сплава АМг61. Одноосная упруго - пластическая деформация материала создавалось путем испытания на растяжение плоских пропорциональных образцов тип 1 № 21 по ГОСТ 1497 толщиной 6 мм с шириной рабочей части 20 мм .

Деформирование образцов проводилось на универсальной испытательной машине фирмы Tinius Ollsen Ltd, модель H100KU со скоростью перемещения активного захвата 5 мм/мин, позволяющее изменять приложенную к образцу силу по заданной программе. Предельная нагрузка, реализуемая на машине - 100 000 Н; погрешность измерения нагрузки 0.5%; скорость траверсы 0,001-500 мм/мин.; разрешающая способность системы измерения перемещения траверсы/деформации образца 0,001 мм жесткость рамы при нормальных точках нагружения не менее 470 кН/мм. Величина силы и деформации измерялась электронным датчиком, ходе эксперимента поступала в компьютер для ее хранения и последующего анализа.

В процессе деформирования широкополосным датчиком акустической эмиссии фиксировались изменения уровня акустической активности, вызванной перестройкой структуры АМг6. Для наблюдения за упругими импульсами АЭ использовался цифровой осциллограф.

Одновременно с упругими импульсами АЭ при деформировании образцов контролировался НАП. Следует заметить, что генерация в зондирующем сигнале ПАВ второй гармоники могут быть обусловлена различными причинами: нелинейностью пьезокерамических элементов в преобразователях; контактной нелинейностью; нелинейностью, связанной с ангармонизмом межатомного взаимодействия и, наконец, структурной нелинейностью в деформируемом металле. В процессе деформирования металла первые три причины генерации сигнала второй гармоники неизменны. Поэтому можно считать, что наблюдаемые флуктуации НАП в основном определяется структурной нелинейностью металла.

На рис. 2 приведены диаграмма нагружения, поведение амплитуды акустической эмиссии и НАП при деформировании образцов сплава АМг61.

Рис.2. Поведение амплитуды акустической эмиссии при деформировании образцов сплава АМг61

Приведенные данные демонстрируют увеличение измеренной акустической эмиссии в стадии предразрушения, что согласуется с результатами работы [3]. Однако на ранних стадия упругопластического деформирования проследить процесс разрушения по активности сигналов АЭ на примере образца из сплава АМг6 затруднительно.

На рис. 3 представлена графики поведения НАП при деформировании образцов сплава АМг61.

Рис.3. Поведение НАП при деформировании образцов сплава АМг61.

Полученные данные свидетельствуют, что на ранних стадия упругопластического деформирования НАП более чувствителен, чем параметр АЭ, при этом флуктуации активности АЭ коррелируют с поведением НАП, что косвенно говорит в пользу адекватности данных о НАП при контроле за процессом деформирования АМг61. Следовательно, экспериментально зафиксированное формирование скачков нелинейности в процессе деформирования сплава АМг61 может быть использовано как свидетельство перестройки структуры металла [23,24].

Как видно из приведенных результатов, НАП является, наравне с параметрами акустической эмиссии, по которым судят о нахождении металла в предразрывном состоянии,

чувствительным к смене механизмов излучения и может быть полезной для моделей прогнозирования ресурса.

Список литературы

1. Ботвина Л.Р., Петерсен Т.Б. Об аналогии акустического и сейсмического режимов на различных стадиях разрушения // Доклады РАН. - 2001. - Т.376, №3. - С. 331-334.
2. Ботвина Л.Р., Петерсен Т.Б., Жаркова Н.А., Тютин М.Р., Будueva В.Г. Акустические свойства малоуглеродистой стали на различных стадиях разрушения // Деформация и разрушение материалов. - 2005. - №4. - С.35-41.
3. Тютин М.Р. Применение b - параметра акустической эмиссии как критерия разрушения материалов // Международная конференция «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов». Москва. 10-13 ноября 2015 г./ Сборник материалов. – М: ИМЕТРАН, 2015. - С.112-113.
4. Гиляров В.Л., Слуцкер А.И., Корсуков В.Е. Пространственное и временное самоподобие в процессах разрушения и деформирования нагруженных материалов // Структура и свойства перспективных металлов и сплавов / тезисы докладов XI международного семинара «Актуальные проблемы прочности» (30.05-4.10 2002 г. Великий Новгород). - Великий Новгород, 2002. - С.10.
5. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. - М.: Наука, 1966. - 309 с.
6. Коробов А.И., Агафонов А.А., Изосимова М.Ю. Нелинейные упругие волны в твердотельном изотропном клине с дефектами // Журнал технической физики. - 2018. - Т. 88, № 3. - С. 385-391.
7. Баллад Е. М., Коршак Б. А., Можаяев В. Г., Солодов И. Ю. Генерация третьей гармоники и акустическая нелинейность высших порядков в твердых телах // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. – 2001. - № 6. - С.44-48
8. Конюхов Б.А., Шалашов Г.М. Об эффектах третьего приближения при распространении упругих волн в изотропных твердых телах // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1974. - № 4. - С. 125–132.
9. Асаинов А.Ф., Ко Сел Лен, Солодов И.Ю. Нелинейное рассеяние поверхностных акустических волн механическими дефектами твердого тела //Акустический журнал. - 1993. - Т.39, № 4. - С.592-597.
10. Назаров В.Е., Сутин А.М. Генерация гармоник при распространении упругих волн в твердых нелинейных средах // Акустический журнал. - 1989. - Т. 35, № 4. - С. 711-716.
11. Зайцев В.Ю., Назаров В.Е., Турна В., Гусев В.Э., Кастаньеде Б. Экспериментальное исследование нелинейных акустических эффектов в зернистых средах // Акустический журнал. - 2005. - Т.51, № 5. - С.633-644.
12. Руденко О.В. Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // Успехи физических наук. - 2006. - Т.176, № 1. - С.77–95.
13. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах // Успехи физических наук. - 1970. - Т. 102. - С. 549–586.
14. Бакушев С.В. Продольно-поперечные волны деформаций слабого разрыва // Проблемы прочности и пластичности. - 2014. - Т.76, № 2. - С.114 – 121.
15. Доронин А.М., Ерофеев В.И. Генерация второй гармоники сдвиговой волны в упруго-пластической среде // Письма о материалах. - 2016. - Т. 6, № 2. - С.102-104.

16. Ерофеев В.И., Мишакин В.В., Родюшкин В.М., Шарабанова А.В. Генерация сдвиговых волн удвоенной частоты в материалах, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // Дефектоскопия. – 2006. - № 4.- С.28-36.
17. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. - М.: Наука, 1981. - 287 с.
18. Ширгина Н.В., Кокшайский А.И., Коробов А.И. Нелинейные упругие явления при распространении акустических волн на плоской шероховатой границе твердых тел // Ученые записки физического факультета московского университета. – 2017. - №4. - 1740802.
19. Ванягин А.В., Родюшкин В.М. Измерение акустической нелинейности повреждённого металла // Измерительная техника. – 2017. - №10. - С.42-44.
20. Зайцев В.Ю., Назаров В.Е., Таланов В.И. Неклассические» проявления микроструктурно-обусловленной нелинейности: новые возможности для акустической диагностики // Успехи физических наук. - 2006. - Т.176, № 1. - С.97–102.
21. Мишакин В.В., Родюшкин В.М. «Нелинейность как индикатор преддефектного состояния материала» // Безопасность труда в промышленности. – 2009. - №7. - С.48-53.
22. Руденко О.В., Чинь Ань Ву. «Нелинейные акустические свойства контакта шероховатых поверхностей и возможности акустодиагностики статистических характеристик неровностей» // Акустический журнал. - 1994. - Т.40. - №4. - С.668-672.
23. Зуев Л.Б., Семухин Б.С., Бушмелов К.И. Изменение скорости ультразвука при пластической деформации Al // Журнал технической физики. - 2000. - Т.70. - №1. - С.52-56.
24. Зуев Л.Б., Данилов В.И. Физические основы прочности материалов. - Долгопрудный: ИД «Интеллект», 2013. - 324 с.

Дата поступления: 29 мая 2020 г.

УДК 534.26

ИЗЛУЧЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕКОЙ ОБОЛОЧКИ**Олег Иванович Косарев, Алла Константиновна Пузакина***Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия*oikosarev@yandex.ru

Аннотация. Предложен численно-аналитический метод расчета гидроакустического излучения цилиндрической оболочки в дальнем поле, включающий расчет вынужденных колебаний оболочечной конструкции, погруженной в жидкость, к которой приложены дискретные вынуждающие силы.

Ключевые слова: излучение, цилиндрическая оболочка, дальнее поле.

RADIATION OF A CYLINDRICAL SHELL**O.I. Kosarev, A.K. Puzakina***Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Moscow, Russia*oikosarev@yandex.ru

Abstract. A numerical and analytical method is proposed for calculating a cylindrical shell radiation in a far field. The method involves calculating the forced vibrations of a shell structure immersed in a fluid to which discrete exciting forces are applied.

Keywords: sonar radiation, finite cylindrical shell, far field.

Для расчета звукового давления излучаемого цилиндрической оболочкой в дальнем поле (диаграммы направленности) используется формула Кирхгофа, приведенная к виду [1]

$$p = \frac{e^{-ikR_1^n}}{2R} \left[\mu J'_n(\mu) \int_0^L p(x) e^{i\lambda x} dx - a\rho\omega^2 J_n(\mu) \int_0^L w(x) e^{i\lambda x} dx \right] \quad (1)$$

где $\lambda = kx \cos \theta$. В формулу (1) входит звуковое давление $p(x)$ и перемещение $w(x)$ на поверхности оболочки, которые связаны импедансом излучения. Главным элементом в данной задаче является определение перемещения $w(x)$ из расчета вынужденных колебаний оболочечной конструкции.

Разработан численно-аналитический метод расчета вынужденных колебаний цилиндрических оболочек в жидкости. Идея метода состоит в следующем. Система условно разбивается на подсистемы, включающие оболочки и кольца. Для каждой оболочки составляются дисперсионные уравнения и определяются их корни. Решение свободных колебаний оболочки записывается в виде вектора перемещений, (u, v, w, w') . Функция распределения перемещений оболочек по их длине записываются через перемещения

торцевых сечений. Внутренние силы в оболочках тоже приводятся к торцам оболочек. Определяются матрицы динамических жесткостей колец. Уравнение вынужденных колебаний всей системы состоит из диагонально расположенных блок-матриц четвертого порядка (ленточного типа). Это позволяет упростить и ускорить решение уравнений высокого порядка (нескольких сотен).

Уравнения движения цилиндрической оболочки в перемещениях, основанные на моментной теории упругих оболочек Кирхгофа - Лява, имеют вид [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \varphi} - \rho_* h a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_1 a &= 0 \\ \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial \xi} + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial H}{\partial \xi} \right) - \rho_* h a \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + q_2 a &= 0 \\ \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} \right) - T_2 - \rho_* h a \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_3 a &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

где u, v, w - осевые, окружные и радиальные перемещения оболочки, T_1, T_2, S, H, M_1, M_2 - упругие силовые факторы, q_1, q_2, q_3 - поверхностные нагрузки, a - радиус оболочки, h - толщина оболочки, $\xi = x/a$ и φ - координаты в осевом и окружном направлениях, t - время, ρ_* - плотность материала оболочки, $0 \leq x \leq L$, L - длина оболочки.

Решения уравнений свободных колебаний конечной цилиндрической оболочки (2) записываются в форме

$$\begin{aligned} u &= U \cos(n\varphi) e^{i\omega t}, \quad v = V \sin(n\varphi) e^{i\omega t}, \quad w = W \cos(n\varphi) e^{i\omega t}, \\ U &= \sum_{j=1}^8 C_{jn} \frac{\Delta_{jn}^{(2)}}{\Delta_{jn}^{(1)}} e^{i\alpha_{jn}\xi}, \quad V = \sum_{j=1}^8 C_{jn} \frac{\Delta_{jn}^{(3)}}{\Delta_{jn}^{(1)}} e^{i\alpha_{jn}\xi}, \quad W = \sum_{j=1}^8 C_{jn} e^{i\alpha_{jn}\xi}, \end{aligned} \quad (3)$$

где n - окружные гармоники ряда Фурье, $n=0, 1, 2, 3, \dots$, α_{jn} - корни дисперсионного уравнения, $j=1-8$ - порядковые номера корней, C_{jn} - искомые коэффициенты, Δ_{jn} - миноры матрицы уравнения движения оболочки, $\omega=2\pi f$ - угловая частота колебаний, f - частота колебаний. В решение (3) входят подлежащие определению корни дисперсионного уравнения α_{jn} и коэффициенты C_{jn} . Для получения дисперсионного уравнения примем $q_1=q_2=q_3=0$ и решение уравнения (2) представим в упрощенном виде

$$v = V \cdot e^{i\alpha y} \sin n\varphi; \quad u = U \cdot e^{i\alpha y} \cos n\varphi; \quad w = W \cdot e^{i\alpha y} \cos n\varphi$$

В результате подстановки этих решений в уравнение (2) получим уравнение свободных колебаний оболочки в матричном виде [10]

$$\begin{bmatrix} L_{11} + \omega_*^2 & L_{12} & L_{13} \\ -L_{12} & L_{22} + \omega_*^2 & L_{23} \\ -L_{13} & L_{23} & L_{33} + \omega_*^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \frac{a}{q} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_s \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

Дисперсионное уравнение (5) для конечной цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость, имеет вид [2]

$$\frac{\Delta_0(\alpha)}{\Delta^1(\alpha)} - \frac{\rho_0 \omega^2 a H_n^{(2)}(ka)}{q k H_n^{(2)'}(ka)} = 0, \quad (5)$$

где $\Delta_0(\alpha)$ – определитель, $\Delta^1(\alpha)$ – минор матрицы (4). Каждое из решений U, V, W (2) состоит из восьми слагаемых по числу конечных граничных условий оболочки. Соответственно числу слагаемых для каждой гармоники n и для каждой частоты колебаний ω надо определить восемь корней α_j .

Для составления уравнений вынужденных колебаний оболочечной конструкции, состоящей из набора оболочек, соединенных между собой кольцами, каждое уравнение движения записывается для перемещений трех соседних подсистем с номерами: k -текущей, $k-1$ -предыдущей и $k+1$ - последующей. Подсистемами являются оболочки и кольца. Внутренние силы оболочки, приложенные, например, к кольцу k , выражаются через перемещения концов оболочек, присоединенных к кольцу слева (в конце предыдущей оболочки $k-1$) и справа (в начале последующей оболочки $k+1$).

Матричное уравнение движения оболочечной конструкции формируется следующим образом. С учетом принятых обозначений уравнение движения кольца номера k в матричной форме имеет вид

$$M_k Z_k = P_k - F_k^{(1)} + F_k^{(2)}, \quad (6)$$

где P_k – вектор возмущающих сил, $F_k^{(1)}, F_k^{(2)}$ – векторы внутренних сил, приложенные от оболочек к кольцу слева и справа, M_k – матрица динамических жесткостей кольца номера k . Z_k – вектор перемещений кольца. Подставляя в уравнение движения кольца значения сил и перемещений оболочек, получим систему уравнений порядка $4(N+1)$, где N – общее количество оболочек, $N+1$ – общее количество колец. В уравнениях движения порядковые номера колец обозначим q , где $0 \leq q \leq p$. Уравнения (6) составляются для каждого кольца последовательно. Уравнения для первого кольца $q=0$, для каждого промежуточного кольца от $q=1$ до $q=N-1$ и для последнего кольца $q=N$ имеют вид

$$\begin{aligned} & \left[M_0 - H_0^4 G_1^*(0) C_1^1 H_0^2 \right] Z_0 - H_0^4 G_1^*(0) C_1^2 H_1^1 Z_1 = P_0 \\ & H_q^3 G_q^*(\ell_q) C_q^1 H_{q-1}^2 Z_{q-1} + \\ & + \left[M_q + H_q^3 G_q^*(\ell_q) C_q^2 H_q^1 - H_q^4 G_{q+1}^*(0) C_{q+1}^1 H_q^2 \right] Z_q - H_q^4 G_{q+1}^*(0) C_{q+1}^2 H_{q+1}^1 Z_{q+1} = P_q \\ & H_p^3 G_p^*(\ell_p) C_p^1 H_{p-1}^2 Z_{p-1} + \left[M_p + H_p^3 G_p^*(\ell_p) C_p^2 H_p^1 \right] Z_p = P_p. \end{aligned} \quad (7)$$

Общее матричное уравнение (7) для оболочечной конструкции имеет ленточную диагональную структуру расположения блок - матриц размером 4×4 и в сумме может иметь порядок нескольких сотен. В результате решения этой системы определяются векторы перемещений колец Z_q .

После определения векторов перемещений Z_q на кольцах q можно построить АЧХ колебаний в заданных сечениях (кольцах) оболочечной конструкции, а также формы вынужденных колебаний для каждой оболочки и всей оболочечной конструкции в целом. Метод расчета реализован в виде алгоритмов и компьютерных программ, написанных на языке Fortran. На рис.1 представлены примеры диаграмм направленности (1) в дальнем поле в зависимости от угла наблюдения θ для оболочки: длина $L=70$ м, радиус $a=4$ м, толщина $h=0.04$ м., материал – сталь, возмущающая сила $P=1000$ Н на левом конце.

Рис.1

Список литературы

1. Косарев О.И., Остапишин Н.М., Пузакина А.К. Звуковое давление в дальнем поле, создаваемое колеблющейся конечной цилиндрической оболочкой // Проблемы машиностроения и автоматизации. - 2017. - №4. - С.98-103.
2. Косарев О.И. Дисперсионное уравнение свободной конечной цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2019. - №5. - С.36-44.

References

1. Kosarev O.I., Ostapishin N.M., Puzakina A. K. Sound pressure in the far field generated by an oscillating finite cylindrical shell.// Engineering and automation problems. - 2017. - №4. - P.98-103.
2. Kosarev O.I. Dispersion equation of a free finite cylindrical shell in a liquid // Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin. - 2019. - №5. - P.36-44.

Дата поступления: 18 июня 2020 г.