УДК 531.66+51-74

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОГО УДАРА. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

© Дмитрий Зиновьевич Ямпольский

Общество с ограниченной ответственностью «УДАРМАШ», Москва, Россия

udarmash@mail.ru

Аннотация. Предложен численный метод расчета продольного соударения упругих стержней с закругленными торцами, основанный на решении волновых уравнений с учетом контактного нагружения торцов в соответствии с теорией Герца. Проведены расчеты стержней различной конфигурации и сопоставление результатов с экспериментальными данными. Показано, что погрешность расчета амплитуд напряжений и длительностей ударных импульсов предложенным методом не превышает 10...13 %.

Ключевые слова: удар, стержневые системы, метод расчета, экспериментальные данные, погрешность расчета.

NUMERICAL SIMULATION OF LONGITUDINAL IMPACT. COMPARISON WITH EXPERIMENT

© D.Z. Yampolsky

The limited liability company «UDARMASH», Moscow, Russia

udarmash@mail.ru

Abstract. The numerical calculation method of collision of elastic rods with rounded ends, based on the solution of wave equations subject to contact loading ends in accordance with the Hertz theory, is proposed. Calculations of rods of different configurations and comparison of the results with experimental data are carried out. It is shown that the error of calculation of amplitudes of stresses and durations of shock pulses by the proposed method does not exceed 10...13 %.

Key words: impact, rod systems, calculation method, experimental data, calculation error.

Ударным процессам в стержневых системах посвящено множество аналитических исследований [1-15], основанных на волновой теории Сен-Венана [1]. Из всех работ следует выделить метод расчета ударных напряжений, разработанный в лаборатории удара и вибрации бурильных машин Института горного дела им. А.А.Скочинского (метод ИГД), поскольку он базируется на большом объеме корректно выполненных экспериментов применительно к стальным ударникам и штангам отбойных молотков и перфораторов [9-12]. Мы будем сравнивать наши расчеты с данными этих экспериментов.

Метод ИГД использует идею Сирса [5] о совмещении волновой теории Сен-Венана с теорией контактной упругости Герца [4], что позволяет учесть как общую, так и местную (контактную) деформацию стержней, и дает хорошее совпадение с результатами

эксперимента. Метод позволил установить физические закономерности удара, определить зависимость амплитуды и длительности ударного взаимодействия от скорости соударения, геометрических размеров соударяемых деталей (длины, соотношения диаметров, кривизны торцов), применить полученные решения для исследования процессов ударного разрушения горных пород [13] и способствовал созданию мощных пневматических отбойных молотков и перфораторов со сниженной вибрацией. По результатам этих исследований вышла в свет монография Е.В. Александрова и В.Б. Соколинского "Прикладная теория и расчеты ударных систем" [14].

К сожалению, метод ИГД не получил дальнейшего развития: отчасти из-за существенных математических трудностей при аналитическом решении нелинейных дифференциальных уравнений (даже при расчете соударения относительно несложных по геометрии деталей), отчасти из-за несовершенства измерительной аппаратуры и отсутствия в руках его авторов (60-е годы прошлого века) мощной цифровой вычислительной техники.

Сегодня эти трудности преодолимы: есть прецизионная тензометрическая аппаратура для регистрации ударных процессов [16] и персональные компьютеры для численного решения дифференциальных уравнений [17-18].

Основываясь на идее Сирса [5], построим численный метод моделирования удара.

Рассмотрим схему, показанную на рис. 1. Ударник 1, движущийся поступательно со скоростью v , наносит удар по неподвижной штанге 2 соосно с ней. Длина ударника l , длина штанги L , соударяемые торцы ударника и штанги сферические. Механические свойства ударника и штанги соответственно: плотность ρ_1 и ρ_2 , стержневая скорость звука a_1 и a_2 , модуль Юнга E_1 и E_2 , коэффициент Пуассона μ_1 и μ_2 .

Рис. 1. Схема соударения ударника 1 и штанги 2:

v – поступательная скорость ударника; N – сила контактного взаимодействия;

$0x_1$ и $0x_2$ – оси координат для ударника и штанги

Взаимодействие ударника и штанги считаем упругим. Полагаем, что в процессе удара поперечные сечения стержней остаются плоскими. Движением частиц в поперечном направлении и внутренним трением в стержнях (в силу малой длительности соударения) пренебрегаем.

Тогда волновые уравнения для данной системы запишутся в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{dS_1(x)}{dx} \cdot \frac{1}{S_1(x)} \cdot \frac{du(x, t)}{dx} - \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{dS_2(x)}{dx} \cdot \frac{1}{S_2(x)} \cdot \frac{dw(x, t)}{dx} - \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $u(x, t)$ и $w(x, t)$ – смещения поперечных сечений ударника 1 и штанги 2 в момент времени t (для ударника по оси Ox_1 , для штанги по оси Ox_2 ; с целью удобства описания индексы осей опускаем); x – координата сечения в положении равновесия в начальный момент времени; $S_1(x)$ и $S_2(x)$ – площади поперечных сечений ударника и штанги.

Примем следующие начальные условия соударения (ударник и штанга не возмущены) для ударника:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ u'_t(x, 0) &= v, (v < 0), \\ u'_x(x, 0) &= 0, x \in [0, l]; \end{aligned}$$

для штанги:

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= 0, \\ w'_t(x, 0) &= 0, \\ w'_x(x, 0) &= 0, x \in [0, L]. \end{aligned}$$

Согласно Герцу [4] сила взаимодействия N , возникающая при контакте ударника и штанги, равна

$$N(t) = k|u(0, t) + w(0, t)|^{3/2}, \quad (2)$$

$$k = \frac{4}{3 \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right) \sqrt{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}},$$

где R_1 и R_2 – радиусы сфер соударяемых торцов ударника и штанги соответственно.

Исходя из (2), граничные условия запишем в виде:

для ударника:

$$u'_x(0, t) = -\frac{N(t)}{E_1 S_1(0)}, u'_x(l, t) = 0;$$

для штанги:

$$w'_x(0, t) = -\frac{N(t)}{E_2 S_2(0)}, w'_x(L, t) = 0.$$

Противоположные соударяемым торцы ударника и штанги свободны от напряжений.

Для построения численного решения системы (1) примем расчетную сетку с шагом по длине стержней Δx и по времени Δt :

$$u_{i,j} = u(i\Delta x, j\Delta t), S_{1,i} = S_1(i\Delta x), i = 0, \dots, n, n = \frac{l}{\Delta x}, j = 0, 1, 2, \dots$$

$$w_{q,j} = w(q\Delta x, j\Delta t), S_{2,q} = S_2(q\Delta x), q = 0, \dots, m, m = \frac{L}{\Delta x}, j = 0, 1, 2, \dots$$

Заменяя производные конечными разностями, получаем уравнения:

$$\begin{cases} u_{i,j+1} = \lambda_1^2 [u_{i+1,j} + u_{i-1,j}] + 2(1 - \lambda_1^2)u_{i,j} + \lambda_1^2 \left[\frac{S_{1,i+1}}{S_{1,i}} - 1 \right] (u_{i+1,j} - u_{i,j}), \\ w_{q,j+1} = \lambda_2^2 [w_{q+1,j} + w_{q-1,j}] + 2(1 - \lambda_2^2)w_{q,j} + \lambda_2^2 \left[\frac{S_{2,q+1}}{S_{2,q}} - 1 \right] (w_{q+1,j} - w_{q,j}), \end{cases} \quad (3)$$

где $\lambda_1 = a_1 \Delta t / \Delta x$, $\lambda_2 = a_2 \Delta t / \Delta x$.

Начальные и граничные условия, соответственно, преобразуются к виду:

$$u_{i,0} = 0, \quad u_{i,1} = u_{i,0} + v \Delta t, \quad u_{n,j} = u_{n-1,j}, \quad (4)$$

$$w_{q,0} = 0, \quad w_{q,1} = 0, \quad w_{m,j} = w_{m-1,j}. \quad (5)$$

Соотношения (4) – (5) задают первый шаг итерации по времени.

Второй и последующие шаги по времени выполним следующим образом.

По формулам (3) и (5) последовательно рассчитываем значения $u_{i,j+1}$ и $w_{q,j+1}$ для всех узлов сетки по длине ударника и штанги, кроме нулевых узлов. Значения $u_{0,j+1}$ и $w_{0,j+1}$ в нулевых узлах получаем из нелинейной системы уравнений:

$$\begin{cases} u_{0,j+1} = u_{1,j} - \Delta x \frac{k}{E_1 S_{1,0}} |u_{0,j+1} + w_{0,j+1}|^{3/2}, \\ w_{0,j+1} = w_{1,j} - \Delta x \frac{k}{E_2 S_{2,0}} |u_{0,j+1} + w_{0,j+1}|^{3/2}, \end{cases}$$

которая решается методом последовательных приближений Зайделя [19].

Но более предпочтителен, на наш взгляд, способ, основанный на использовании закона сохранения количества движения.

В рассматриваемой физической системе (см. рис. 1) единственная сила, изменяющая импульс ударника и штанги, это контактная сила N . Поэтому для временного интервала Δt можно записать:

$$N(t) \Delta t = P_{1,j+1} - P_{1,j}, \quad (6)$$

$$N(t) \Delta t = P_{2,j+1} - P_{2,j},$$

где

$$P_{1,j} = \rho_1 \int_0^l S_1(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx, \quad P_{1,j+1} = \rho_1 \int_0^l S_1(x) \frac{\partial u(x,t + \Delta t)}{\partial t} dx,$$

$$P_{2,j} = \rho_2 \int_0^L S_2(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} dx, \quad P_{2,j+1} = \rho_2 \int_0^L S_2(x) \frac{\partial w(x,t + \Delta t)}{\partial t} dx -$$

количества движения ударника и штанги в моменты времени t и $t + \Delta t$ соответственно.

При численном интегрировании используем метод Симпсона. Интегралы $P_{1,j}$ и $P_{2,j}$ вычисляем по значениям $u_{i,j}$ и $w_{q,j}$, полученным в результате предыдущей итерации. А при

вычислении интегралов $P_{1,j+1}$ и $P_{2,j+1}$ применяем следующий прием: поскольку в интегралы входят неизвестные смещения нулевых узлов, заменим их нулевыми значениями и вместо интеграла $P_{1,j+1}$ получим интеграл $\bar{P}_{1,j+1}$, а вместо интеграла $P_{2,j+1}$ – интеграл $\bar{P}_{2,j+1}$. Тогда, согласно формуле Симпсона, искомые значения $u_{0,j+1}$ и $w_{0,j+1}$ будут равны:

$$\begin{aligned} u_{0,j+1} &= u_{0,j} + \frac{3\Delta t}{\rho_1 S_{1,0} \Delta x} \left[P_{1,j} - \bar{P}_{1,j+1} + k\Delta t |u_{0,j} + w_{0,j}|^{3/2} \right], \\ w_{0,j+1} &= w_{0,j} + \frac{3\Delta t}{\rho_2 S_{2,0} \Delta x} \left[P_{2,j} - \bar{P}_{2,j+1} + k\Delta t |u_{0,j} + w_{0,j}|^{3/2} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение, полученное таким способом, позволяет с высокой точностью удовлетворить требованиям законов сохранения количества движения и энергии данной физической системы.

По результатам очередной итерации рассчитываем напряжения в ударнике $\sigma_1(x, t)$ и в штанге $\sigma_2(x, t)$:

$$\sigma_1(x, t) = E_1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad \sigma_2(x, t) = E_2 \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}. \quad (8)$$

Критерий окончания удара – разрыв контакта ударника со штангой: $u_{0,j} + w_{0,j} > 0$.

Известно, что численные решения волновых уравнений, и, соответственно, системы (1), устойчивы при $\lambda_1 < 1$ и $\lambda_2 < 1$ [17-18]. Устойчивость изложенного метода расчета ударного процесса обеспечивается при более жестких условиях: $\lambda_1 < 0,75$ и $\lambda_2 < 0,75$.

Для вычислений по формулам (2) – (8) была написана программа для ПЭВМ, моделирующая удар с помощью численного эксперимента. Программа позволяет проследить во времени изменение состояния ударника и штанги: смещение сечений, скоростей и напряжений в этих сечениях.

Перейдем к расчетам и сравнению их с экспериментальными данными.

Рассмотрим несколько примеров соударения стержней, выполненных из инструментальной стали. Нас будут интересовать импульсы ударных напряжений в штанге, их форма, амплитуда и длительность, количество движения и энергия, а также скорость и коэффициент отскока ударника.

Пример 1. Соударение цилиндров равного диаметра.

В работе [10] исследуется соударение ударника и штанги, имеющих цилиндрическую форму, равное и постоянное по длине поперечное сечение диаметром 34 мм. Длина ударника $l = 200$ мм, его масса $m = 1,426$ кг. Штанга считается полубесконечной¹ (для расчета выбираем $L = 1000$ мм). Радиус соударяемого торца ударника $R_1 = 400$ мм, соударяемый торец штанги плоский (в расчетах принимаем $R_2 = 10000$ мм). Скорость ударника перед ударом $v = 5$ м/с.

Упругие характеристики ударника и штанги:

$$\rho_1 = \rho_2 = 7845 \text{ кг/м}^3, \quad E_1 = E_2 = 196 \text{ ГПа}, \quad a_1 = a_2 = 5000 \text{ м/с}, \quad \mu_1 = \mu_2 = 0,3.$$

¹ Длина штанги выбирается такой, чтобы отраженная от ее противоположного конца ударная волна не влияла на прямой ударный импульс.

Параметры расчетной сетки: $\Delta x = 0,1$ мм; $\Delta t = 0,01$ мкс.

На рис. 2 представлен экран разработанной программы. Слева показаны диаграммы состояния штанги, справа – ударника. Эпюры смещений, скорости и напряжений в поперечных сечениях деталей соответствуют моменту времени завершения удара $t = 175,6$ мкс.

Рис. 2. Волновые процессы в штанге (слева) и ударнике (справа) в момент завершения удара

В нижней части экрана представлены: исходные данные для расчета, текущие параметры ударника и штанги (количество движения P_y и $P_{ш}$, кинетическая и потенциальная энергия (K_y , P_y и $K_{ш}$, $P_{ш}$), результаты расчета удара и параметры ударного импульса.

На рис. 3 показаны экспериментальный и расчетные импульсы напряжений в штанге² при различных радиусах соударяемого торца ударника R_1 .

Экспериментальной кривой 1 (красный пунктир) соответствует расчетная кривая 2. Обе кривые достигают Сен-Венановского уровня напряжений $\sigma_{св} = 5 \cdot 10^{-7} E_2 v / a_2 = 98,1$ МПа) и имеют примерно одинаковую длительность ударного импульса. Кривые практически совпадают в интервале $t = 0 \dots 20$ мкс, но далее темп возрастания напряжений у расчетной кривой ниже: разница в интервале $t = 20 \dots 60$ мкс достигает 9 %. Аналогично наблюдается совпадение кривых в интервале $t = 60 \dots 100$ мкс и снижение темпа на спаде расчетного импульса по сравнению с экспериментом в интервале $t = 100 \dots 178$ мкс.

Из практики испытаний ударных машин известно, что при ударе происходит расклеп торца ударника³ и изменение его кривизны. Следует также отметить, что на диаметре 34 мм

² Ударные напряжения принято отображать: сжатие со знаком «+», растяжение со знаком «-».

достаточно сложно изготовить радиус 400 мм: его трудно отличить от радиуса 500 мм или радиуса 600 мм.

Рис. 3. Напряжения в штанге при различных радиусах кривизны торца ударника R_1 :
 1 – эксперимент; расчетные кривые: 2 – 400 мм, 3 – 500 мм, 4 – 600 мм, 5 – 800 мм;
 6 – максимальный уровень напряжений по Сен-Венану; 7 – чертеж ударника;
 8 – экспериментальный и расчетные ударные импульсы, представленные в работе [10]

Поэтому мы дополнительно провели расчеты для ударников с увеличенным радиусом соударяемого торца⁴. На рис. 3 дополнительно показаны: кривая 3, соответствующая $R_1 = 500$ мм, кривая 4 для $R_1 = 600$ мм и кривая 5 для $R_1 = 800$ мм.

Сравнение кривых проводилось по параметрам ударных импульсов. Параметры расчетных импульсов получены из программы в момент завершения удара (см. рис. 1), а параметры экспериментального импульса рассчитывались по следующим формулам:

количество движения импульса P , Н·с,

$$P = S_{2,0} \int_0^T \sigma(t) dt, \quad (9)$$

энергия ударного импульса W , Дж,

³ Пластические деформации торца ударника возникают из-за малой площади контактной площадки, на которой действуют значительные по величине контактные напряжения.

⁴ Радиусы менее 400 мм не рассматривались, т.к. с уменьшением радиуса растет длительность удара [14].

$$W = \frac{a_2 S_{2,0}}{E_2} \int_0^T \sigma^2(t) dt, \quad (10)$$

где T – длительность удара, с; $\sigma(t)$ – зарегистрированное напряжение в штанге, Па.

Скорость отскока ударника v_0 , м/с, и коэффициент отскока k определялись из соотношений

$$v_0 = \frac{P}{m} - v, \quad k = \left| \frac{v_0}{v} \right|. \quad (11)$$

Средняя квадратичная погрешность δ_p расчетного импульса напряжения $\sigma_p(t)$ по сравнению с экспериментальным импульсом вычислялась по формуле

$$\delta_p = 100 \sqrt{\frac{\int_0^{T^*} (\sigma_p(t) - \sigma(t))^2 dt}{\int_0^{T^*} \sigma^2(t) dt}}, \quad (12)$$

где $T^* = \max\{T, T_p\}$ – длительность наиболее продолжительного импульса: расчетного – T_p или экспериментального – T ; соответствующие ординаты меньшего по длительности импульса при этом заменялись нулевыми значениями.

Результаты расчетов по формулам (9) – (12) представлены в Таблице 1.

Таблица 1.

Расчетные и экспериментальные параметры ударных импульсов

Параметры ударного импульса	Эксперимент	Расчет							
		$R_1 = 400$ мм		$R_1 = 500$ мм		$R_1 = 600$ мм		$R_1 = 800$ мм	
		Значение	Погрешность, %	Значение	Погрешность, %	Значение	Погрешность, %	Значение	Погрешность, %
Длительность удара, мкс	176,0	177,8	1,0 %	175,6	0,2 %	174,1	-1,1 %	172,0	-2,3 %
Максимальное напряжение, МПа	97,7	97,6	-0,1 %	97,8	0,1 %	97,9	0,2 %	98,0	0,3 %
Количество движения, Н·м	8,57	8,62	0,6 %	8,54	-0,3 %	8,55	-1,0 %	8,39	-2,1 %
Энергия ударного импульса, Дж	17,4	16,9	-3,0 %	17,0	-2,6 %	17,0	-2,4 %	17,1	-2,0 %
Скорость отскока, м/с	1,01	1,05	4,0 %	1,00	-1,3 %	0,95	-5,6 %	0,89	11,9 %
Коэффициент отскока	0,202	0,210	4,0 %	0,199	-1,3 %	0,191	-5,6 %	0,191	-11,9 %
Средняя квадратичная погрешность, %			5,1 %		2,7 %		3,3 %		6,8 %

Наиболее близкой к экспериментальной кривой 1 оказалась кривая 3, соответствующая ударнику с радиусом торца $R_1 = 500$ мм, средняя квадратичная погрешность которой составила 2,7 %. Можно предположить, что истинный радиус торца ударника в эксперименте был не 400 мм, а 500 мм.

Тем не менее, в интервале 28...58 мкс разница в ординатах экспериментальной и расчетной кривой 3 достигает 4...5 %: экспериментальная кривая проходит выше и имеет более длинную горизонтальную площадку, соответствующую Сен-Венановскому уровню напряжений.

Следует отметить, что представленные в работе [10] расчеты этого соударения, выполненные по методу Сирса [5] и по методу ИГД ($\Delta t = 5$ мкс), также дают хорошее совпадение с результатом эксперимента (см. графики на рис. 3 внизу, поз. 8), но и на этих графиках наблюдаются аналогичные расхождения с экспериментальной кривой.

Пример 2. Штанга и ударник цилиндрической формы и одинакового диаметра, радиус соударяемого торца ударника равен половине диаметра.

В работах [9, 11] представлены расчетные и экспериментальные данные такого соударения со следующими исходными данными: диаметр ударника и штанги 35 мм; длина ударника $l = 200$ мм; его масса $m = 1,429$ кг; радиус торца $R_1 = 17,5$ мм; скорость ударника перед ударом $v = 5$ м/с; длина штанги $L = 1500$ мм; соударяемый торец штанги плоский ($R_2 = 10000$ мм).

Упругие характеристики ударника и штанги:

$$\rho_1 = \rho_2 = 7650 \text{ кг/м}^3, E_1 = E_2 = 211 \text{ ГПа}, a_1 = a_2 = 5250 \text{ м/с}, \mu_1 = \mu_2 = 0,3.$$

Рис. 4. Эквивалентная схема расчетной модели: 1 – ударник; 2 – штанга; 3 – нелинейная пружина; l^* – эквивалентная длина ударника

Эквивалентная схема модели (1) – (8) показана на рис. 4. В ней соударяемые сферические торцы ударника 1 и штанги 2 заменены нелинейной пружиной 3.

В предыдущем примере масса, заключенная в сферическом торце ударника, равнялась 5 г, т.е. была пренебрежимо мала по сравнению с массой ударника 1,426 кг. В рассматриваемом примере масса сферического торца ударника 88 г, что составляет 6 % от массы ударника. Возникает вопрос, можно ли ей пренебречь в расчетах ударного импульса?

Для ответа на этот вопрос были предложены следующие варианты расчета:

- вариант 1: ударник длиной $l^* = l = 200$ мм;
- вариант 2: ударник длиной $l^* = 194,2$ мм – сфера заменена эквивалентным по объему цилиндром диаметром 35 мм;
- вариант 3: ударник длиной $l^* = 182,5$ мм – масса сферы не учитывается;
- вариант 4: сфера заменяется на эквивалентный по объему конус ($l^* = 200$ мм, диаметр соударяемого торца конуса равен 10,6 мм).

Результаты расчетов представлены на рис. 5 и в Таблице 2.

Рис. 5. Ударные импульсы при различных вариантах расчета:

1 – эксперимент; 2 – вариант 1 ($l^* = 200$ мм); 3 – вариант 2 ($l^* = 194,2$ мм);

4 – вариант 3 ($l^* = 182,5$ мм); 5 – вариант 4 (конус вместо сферы $l^* = 200$ мм, диаметр торца 10,63 мм);

6 – экспериментальная осциллограмма (N – сила в кгс; $T = 2l/a_1 = 23$ мкс – период собственных колебаний ударника; T_m – время достижения максимума 93 мкс; $N_m = 7950$ кгс)

Таблица 2.

Параметры ударных импульсов при различных вариантах расчета

Варианты расчета		Вариант 1 200 мм		Вариант 2 194,2 мм		Вариант 3 182,5 мм		Вариант 4 Конус вместо сферы	
Параметр	Экспе- римент	Значе- ние	Погреш- ность, %	Значе- ние	Погреш- ность, %	Значе- ние	Погреш- ность, %	Значе- ние	Погреш- ность, %
Масса ударника, кг	1,429	1,472	3,0 %	1,429	0,0 %	1,343	6,0 %	1,429	0,0 %
Амплитуда, МПа	80,4	81,6	1,5 %	80,7	0,4 %	78,8	1,9 %	79,8	-0,8 %
Время дости- жения мак- симума, мкс	95,0	96,3	1,4 %	94,8	-0,2 %	92,6	2,6 %	95,8	0,8 %
Длительность удара, мкс	225,0	249,5	10,9 %	245,3	9,0 %	236,6	5,2 %	247,5	10,0 %
Скорость отскока, м/с	2,12	1,98	-6,2 %	2,01	-4,8 %	2,07	1,9 %	2,04	-3,5 %
Коэффициент отскока	0,423	0,397	-6,2 %	0,403	-4,8 %	0,415	1,9 %	0,408	-3,5 %

Количество движения, Н·с	9,26	10,3	11,0 %	10,0	8,2 %	9,50	2,6 %	10,1	8,6 %
Энергия импульса, Дж	13,7	15,5	13,1 %	15,0	9,2 %	13,9	1,4 %	14,9	8,6 %
Ср. квадратичная погрешность, %			12,7 %		10,0 %		4,9 %		11,6 %

Наиболее близкой по параметрам ударного импульса и коэффициенту отскока ударника оказалась кривая 3, соответствующая варианту 4. Ее средняя квадратичная погрешность составила 4,9 %, а коэффициент отскока ударника отличается от эксперимента всего на 1,9 %.

Таким образом, в данном рассматриваемом примере оправдано пренебречь массой, заключенной в сферическом торце ударника, чтобы получить результат расчета, близкий к экспериментальным данным.

Пример 3. Соударение штанги с ударником большего поперечного сечения.

Стальной ударник длиной $l = 200$ мм и диаметром 64 мм, имеющий постоянное поперечное сечение, ударяет по стальной штанге диаметром 33,5 мм со скоростью $v = 5$ м/с. Масса ударника 5,048 кг. Радиус соударяемого торца ударника $R_1 = 300$ мм; торец штанги плоский. Длина штанги $L = 1500$ мм. Упругие параметры ударника и штанги соответствуют примеру 1.

Эксперимент описан в работе [14], рис.53.

На рис. 6 показаны ударные импульсы напряжения в штанге: экспериментальный 1 и расчетный 2. Поскольку в данной работе не указан уровень амплитуды зарегистрированного импульса, мы предположили, что он равен расчетному значению 149,5 МПа и совместили ударные импульсы так, чтобы их максимальные значения совпали.

Параметры совмещенных таким образом ударных импульсов приведены в Таблице 3.

Экспериментальный и расчетный импульсы различаются: по количеству движения на 3,0 %, по энергии – на 1,1 %, при этом средняя квадратичная погрешность расчетного импульса не превышает 5,0 %.

При достаточно длинной (полубесконечной) штанге ударный импульс имеет практически бесконечную длительность, и отскок ударника отсутствует [14]. При конечной длине штанги отскок ударника происходит по приходу отраженной волны: в данном случае примерно через $t = 2L/a_2 = 400$ мкс. Радиус на торце ударника увеличивает длительность соударения: согласно расчету она составляет 419,1 мкс.

Таблица 3.

Сравнение ударных импульсов при диаметре ударника в два раза большем диаметра штанги

Параметры ударного импульса	Эксперимент	Расчет $R_1 = 300$ мм	
		Значение	Погрешность, %
Длительность удара, мкс	-	419,1	-
Максимальное напряжение, МПа	149,5	149,5	-
Количество движения, Н·м	24,1	24,8	3,0 %
Скорость отскока, м/с	-	0,084	-
Коэффициент отскока	-	0,017	-
Энергия ударного импульса, Дж	62,4	63,1	1,1 %
Средняя квадратичная погрешность, %	-	-	5,0 %

Рис. 6. Напряжения в штанге: диаметр ударника в два раза больше диаметра штанги: 1 – эксперимент; 2 – расчет; 3 – максимальный уровень напряжений по Сен-Венану 154 МПа⁵;
4 – размеры деталей; 5 – экспериментальная осциллограмма

Пример 4. Соударение штанги со ступенчатым ударником.

Стальной ступенчатый ударник длиной $l = 210$ мм наносит удар по стальной штанге длиной $L = 1000$ мм со скоростью 5 м/с. Первая ступень ударника имеет длину 140 мм, ее диаметр 34 мм; вторая ступень ударника длиной 70 мм и диаметром 67 мм. Масса ударника 2,922 кг. Штанга, как и первая ступень ударника, имеет диаметр 34 мм. Радиус соударяемого торца ударника $R_1 = 300$ мм, торец штанги плоский.

Упругие параметры ударника и штанги соответствуют примеру 1.

На рис. 7 показана экспериментальная осциллограмма напряжений в штанге 1 и расчетный ударный импульс 2. Экспериментальная осциллограмма взята из работы [14], рис. 27. Теоретический уровень напряжений первой ступени 97 МПа показан прямой 3, а максимальный теоретический уровень напряжений 154 МПа – прямой 4⁶. Как и в примере 2, максимальные амплитуды импульсов были совмещены.

Хорошее совпадение расчетного и экспериментального ударных импульсов наблюдается в интервале 0...145 мкс, далее импульсы расходятся. Длительность экспериментального импульса составляет 330,5 мкс, длительность расчетного – 302,9 мкс.

Сопоставление параметров ударных импульсов приведено в Таблице 4.

⁵ Уровень напряжений по Сен-Венану $\sigma_{\text{СВ}}$, МПа, рассчитан по формуле: $\sigma_{\text{СВ}} = 10^{-6} v \rho_2 a_2 S_1 S_2 / (S_1 + S_2)$.

⁶ Уровень первой ступени σ_I , МПа, равен $\sigma_I = 10^{-6} E_2 v / (2a_2)$; а уровень второй ступени σ_{II} , МПа, $\sigma_{II} = \sigma_I (1 + (S_{II} - S_I) / (S_{II} \cdot S_I))$, где S_I , S_{II} – площади поперечных сечений первой и второй ступени.

Рис. 7. Напряжения в штанге при соударении со ступенчатым ударником:
 1 – эксперимент; 2 – расчет; 3 – теоретический уровень напряжений 1-ой ступени; 4 – теоретический максимальный уровень напряжений; 5 – размеры деталей; 6 – экспериментальная осциллограмма

Таблица 4.

Сравнение ударных импульсов при ступенчатом ударнике

Параметры ударного импульса	Экспери- мент	Расчет $R_1 = 300$ мм	
		Значение	Погрешность, %
Длительность удара, мкс	330,5	305,5	-9,1 %
Максимальное напряжение, МПа	132,0	132,0	-
Количество движения, Н*м	17,0	16,5	-3,1 %
Энергия ударного импульса, Дж	35,6	36,1	2,6 %
Скорость отскока, м/с	0,69	0,53	-23,2 %
Коэффициент отскока	0,138	0,106	-23,2 %
Средняя квадратичная погрешность, %	-	-	11,5 %

Несмотря на значительную погрешность в определении скорости и коэффициента отскока ударника (23,2 %), расчет дает удовлетворительное приближение по интегральным параметрам ударного импульса – энергии и количеству движения, погрешность которых не превышает 3,1 %.

Средняя квадратичная погрешность расчета 11,5 % также достаточно велика по сравнению с предыдущими примерами, но основной вклад в нее вносят низкие напряжения, находящиеся в «хвосте» ударного импульса, которые не имеют существенного практического значения.

Пример 5. Соударение штанги со ступенчатым ударником: диаметр штанги меньше диаметра первой ступени ударника (эксперимент Арнда)

Данный пример представлен в работах [2, 10]. Его особенность состоит в том, что многократное отражение волн происходит не только от границ сопряжения ступеней ударника, но и от границы «ударник-штанга».

Исходные данные для расчета: длина ударника $L = 210$ мм, размеры первой ступени: диаметр 35 мм, длина 140 мм; размеры второй ступени: диаметр 70 мм, длина 70 мм; радиус соударяемого торца ударника $R_1 = 400$ мм; масса ударника $m = 3,091$ кг; диаметр штанги 25 мм, длина штанги 1500 мм; радиус торца штанги плоский ($R_2 = 10000$ мм). Упругие характеристики ударника и штанги аналогичны примеру 2.

Экспериментальные и расчетные импульсы напряжений в штанге представлены на рис. 8. Поскольку ударный импульс достаточно длинный, в эксперименте была зарегистрирована только его часть длительностью 240 мкс. Дополнительно мы привели расчет для ударника с «практически плоским» торцом (радиус $R_1 = 1000$ мм).

Экспериментальная кривая 1 имеет широкий максимум в интервале 55...105 мкс с резкими фронтами возрастания и спада напряжений. Расчетные кривые 2 ($R_1 = 400$ мм) и 3 ($R_1 = 1000$ мм) имеют более острые максимумы, которые расположены ниже экспериментальной кривой: их амплитуды отличаются, соответственно, на 4,5 % и 0,7 %, а время достижения максимума – на 6,3 % и 2,5 %. Сравнение ударных импульсов представлено в Таблице 5.

За исключением интервала 55...90 мкс (зона максимума), обе расчетные кривые проходят выше экспериментальной кривой. Средняя квадратичная погрешность расчетной кривой 1 составила 13,0 %, а кривой 2 – 9,7 %.

Таблица 5.

Сравнение ударных импульсов – эксперимент Арнда

Параметры ударного импульса	Эксперимент	Расчет $R_1 = 400$ мм		Расчет $R_1 = 1000$ мм	
		Значение	Погрешность, %	Значение	Погрешность, %
Максимальное напряжение, МПа	228	218	-4,5 %	226	-0,7 %
Время достижения максимального напряжения, мкс	80,0	85	6,3 %	82	2,5 %
Количество движения части импульса, Н с	14,65	16,05	9,5 %	16,02	9,4 %
Энергия части ударного импульса, Дж	53,1	58,9	10,9 %	59,1	11,2 %
Средняя квадратичная погрешность, %	-	-	13,0 %	-	9,7 %

Рис. 8. Расчеты по эксперименту Арндта:

1 – эксперимент; 2 – расчет при $R_1 = 400$ мм; 3 – расчет при $R_1 = 1000$ мм;
 4 – теоретический уровень напряжений 1 степени 164 МПа; 5 – теоретический уровень
 максимальных напряжений 228 МПа; 6 – размеры соударяемых деталей; 7 –
 экспериментальная осциллограмма
 и расчет по методу ИГД (показан желтым цветом, $\Delta t = 2,7$ мкс)

При резких изменениях сечений в ударной системе на формирование ударного импульса существенное влияние оказывают поперечные волны, которые в рамках предлагаемой модели не рассматриваются. Этим, по-видимому, объясняются расхождения в параметрах экспериментального ударного импульса и расчетных импульсов напряжений.

Следует отметить, что в данном случае метод ИГД дает лучшее приближение к экспериментальной кривой (см. поз. 7 на рис. 8) по сравнению с нашими расчетами, в частности вершина ударного импульса имеет более широкий и плоский максимум, а ее амплитуда практически совпадает с экспериментальной кривой.

Пример 6. Соударение ступенчатого ударника с пикой, имеющей бурт.

Рассмотрим соударение ударника пневматического отбойного молотка МО-2Б⁷ производства ОАО «Томский электромеханический завод им. В.В. Вахрушева с измерительной пикой, имеющей бурт. Схема ударной системы показана на рис. 9. Как и в предыдущем примере, ударник имеет ступенчатую форму, но сопряжение между ступенями выполнено в виде конуса. Измерительная пика аналогична рекомендуемой в ГОСТ 55162 –

⁷ Молотки МО-2Б и МОП-2 (производитель ООО «ТоМаш») – наиболее распространенные модели, массово используемые в строительстве и горном деле. Они имеют практически одинаковые ударники.

2012 [20]; такая пика используется при определении энергетических параметров пневматических отбойных молотков тензометрическим методом [16].

Особенность данного примера в том, что, измерительная пика имеет бурт, от которого происходит частичное отражение ударной волны; соответственно ударный импульс до и после бурта пики отличается по форме и по амплитуде. Кроме того, поскольку длина ударника 85 мм сопоставима с длиной тензорезистора 30 мм, то последний также вносит искажения в форму наблюдаемого ударного импульса⁸.

Рис.9. Схема ударной системы при испытании пневматических отбойных молотков:

1 – ударник; 2 – измерительная пика; 3 – тензорезисторы тензодатчика

Молоток МО-2Б испытывался на современной установке «УИПУ-4М» [16] для измерения параметров удара, включающей тензометрический усилительный блок, управляемый компьютером, и прецизионный градуировочный стенд «СГУ-3» с оптической системой регистрации скорости для выполнения образцовых ударов. Для молотка были определены средние значения энергии и скорости ударника перед ударом, а также записаны ударные импульсы (100 последовательных циклов), средний из которых мы сравнили с нашими расчетами.

Итак, ступенчатый ударник 1 с коническим сопряжением ступеней, длиной 85 мм (см. рис. 6) и массой 430 г⁹, движущийся со скоростью $v = 13,27$ м/с ударяет по неподвижной измерительной пике длиной 340 мм. Соударяемый радиус ударника $R_1 = 350$ мм, соударяемый торец пики плоский. Обе детали изготовлены из стали марки У8А, соответственно, упругие параметры ударника и измерительной пики равны [21]:

$$\rho_1 = \rho_2 = 7830 \text{ кг/м}^3; E_1 = E_2 = 209 \text{ ГПа}; a_1 = a_2 = 5166 \text{ м/с}; \mu_1 = \mu_2 = 0,29.$$

Деформация пики $\varepsilon_d(t)$, регистрируемая тензодатчиком, с учетом Пуассонова расширения рассчитывается по формуле

$$\varepsilon_d(t) = \frac{\int_0^H \sqrt{\left[1 + \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]^2 + \frac{\mu_2^2 D^2}{4} \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right]^2} dx}{H} - 1, \quad (13)$$

где D – диаметр пики в месте расположения тензодатчика; H – длина решетки недеформированного тензорезистора.

⁸ В предыдущих примерах мы не рассматривали сигнал с тензодатчика, т.к. в силу значительной длительности ударного импульса – более 200 мкс, он практически не отличался от расчетной деформации.

⁹ В программе масса ударника вычисляется, исходя из его геометрических размеров. Она равна 438 г.

На рис. 10 показаны расчетные ударные импульсы в рассматриваемой ударной системе: в хвостовике измерительной пики до ее бурта – кривая 1 и в теле пики после бурта – кривая 2, которая получена с использованием формулы (13).

Рис. 10. Расчетные ударные импульсы молотка МО-2Б:

1 – в хвостовике измерительной пики до ее бурта;

2 – в теле измерительной пики за буртом (имитация сигнала с тензодатчика)

Как и предполагалось, форма ударного импульса за буртом (кривая 2), искажена. Наблюдается запаздывание амплитуд напряжений на 3...5 мкс. Максимальный уровень напряжений в хвостовике пики составляет 336,5 МПа, в то время как тензодатчик показывает 300,0 МПа, т.е. на 10,8 % меньше. Длительность ударного импульса согласно кривой 1 составляет 90,5 мкс, а длительность импульса по тензодатчику (кривая 2) – 86,9 мкс. Различие связано с тем, что отраженная от противоположного торца измерительной пики волна растяжения приходит к датчику через 83,2 мкс, и она «обрезает» конец ударного импульса.

К соударяемому торцу пики отраженная волна приходит через 131,6 мкс, т.е. отскок ударника происходит раньше прихода отраженной волны, и ударник ничего «не знает» об условиях на противоположном конце пики. Поэтому в данном случае скорость и коэффициент отскока ударника не зависят от свойств материала, на который опиралась бы измерительная пика.

На рис. 11 показан экспериментальный ударный импульс молотка МО-2Б (средний за 100 рабочих циклов) – кривая 1¹⁰ и расчетный ударный импульс – кривая 2, соответствующая деформации тензодатчика.

¹⁰ Оцифровка экспериментального ударного импульса получена по методике аттестации измерительной пики, изложенной в работе [22].

Рис. 11. Ударные импульсы напряжения в измерительной пике, регистрируемые тензодатчиком: 1 – экспериментальный; 2 – расчетный

Таблица 6.

Сравнение ударных импульсов молотка МО-2Б

Параметры ударного импульса	Эксперимент	Расчет $R_1 = 350$ мм	
		Значение	Погрешность, %
Длительность удара, мкс	80,7	86,9	7,7 %
Максимальное напряжение, МПа	315,0	300,0	-4,8 %
Время достижения максимальной амплитуды импульса, мкс	36,3	37,2	2,5 %
Количество движения, Н*м	6,62	6,82	2,9 %
Скорость отскока, м/с	2,12 ¹¹	2,32	9,4 %
Коэффициент отскока	0,160	0,174	9,4 %
Энергия ударного импульса, Дж ¹²	36,9	35,5	-0,4 %
Средняя квадратичная погрешность, %	-	-	6,7 %

¹¹ Скорость отскока ударника определена на градуировочном стенде «СГУ-3».

¹² Поскольку борт измерительной пике и тензодатчик «искажают» ударный импульс, расчет энергии по формуле 8 не совсем корректен.

У работавшего ударника радиус соударяемого торца близок к 300 мм [11]. Выбор радиуса 350 мм был продиктован оптимизацией результатов расчета: мы сочли рациональным получить удовлетворительную погрешность по амплитуде, времени ее достижения и количеству движения импульса, погрешность которых не превысила 5 %; при этом коэффициент отскока ударника оказался несколько завышенным – 9,4 %, а средняя квадратичная погрешность составила 6,7 %. Расчетная длительность ударного импульса оказалась больше на 7,7 %.

Сравнение импульсов представлено в Таблице 6.

На рис. 12 показаны экспериментальный и расчетный ударные импульсы отбойного молотка МО-2Б при «практически плоских» соударяемых торцах ударника и измерительной пики. Скорость ударника $v = 14,20$ м/с, его масса 438 г. Как и в предыдущем случае, рассматривались деформации, регистрируемые тензодатчиком.

Поскольку определить радиус «плоского» торца ударника на диаметре 24 мм весьма сложно, мы подбирали его значение так, чтобы минимизировать расхождение расчетов с данными эксперимента. Представленные ниже кривые соответствуют: $R_1 = 3000$ мм и $R_2 = 10000$ мм.

Рис. 12. Ударные импульсы молотка МО-2Б
при «практически плоских» торцах ударника и измерительной пики:
1 – экспериментальный; 2 – расчетный

Из графиков следует, что даже при высокой скорости соударения¹³ и плоских торцах соударяемых стержней фронты возрастания и спада напряжений имеют конечную величину. Экспериментальный и расчетный импульс похожи по форме: максимальные напряжения различаются на 3,5 %, длительности импульсов практически совпадают (отличие на 1,2 %); кривые имеют характерные горизонтальные площадки в интервалах 50...60 мкс и 74...84 мкс.

¹³ Предел пропорциональности между напряжением и деформацией для стали достигается при скоростях порядка 20 м/с.

Различия в форме пиков импульсов могут быть связаны с наличием изгибных напряжений, т.к. при плоских торцах обеспечить центральность удара практически невозможно.

Среднеквадратичная погрешность расчетного импульса по сравнению с экспериментом составила 9,1 %. Сравнение ударных импульсов приведено в Таблице 7.

Таблица 7.

Сравнение ударных импульсов при «практически плоских» соударяемых торцах ударника и измерительной пики

Параметры ударного импульса	Эксперимент	Расчет $R_1 = 3000$ мм	
		Значение	Погрешность, %
Длительность удара, мкс	83,8	84,5	1,2 %
Максимальное напряжение, МПа	339,0	350,8	3,5 %
Время достижения максимальной амплитуды импульса, мкс	32,5	28,9	11,1 %
Количество движения, Н·с	6,87	6,50	5,5 %
Энергия ударного импульса, Дж	38,3	41,4	7,5 %
Скорость отскока, м/с	1,48	1,59	7,7 %
Коэффициент отскока	0,104	0,112	7,7 %
Средняя квадратичная погрешность, %	-	-	9,1 %

Выводы. Проведенные расчеты показали, что для стальных стержней с закругленными торцами на основе волновой теории Сен-Венана с учетом контактных взаимодействий по Герцу можно построить численную модель продольного удара, которая дает удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными: погрешности расчета амплитуды ударного импульса напряжения в штанге, его длительности, количества движения и энергии, а также интегральная средняя квадратичная погрешность ударного импульса, не превышает 10...13 %.

Имеющиеся расхождения в амплитудах и форме ударных импульсов связаны, по-видимому, с поперечными колебаниями стержней и возбуждением поверхностных волн, которые не рассматриваются в рамках теории одномодовой плоской волны Сен-Венана, примененной для построения данной модели. Значительные расхождения с экспериментом выявлены при наличии в ударной системе ступеней (2 и более) с резким изменением поперечного сечения соударяемых деталей, когда длина ступени сопоставима с ее поперечным размером.

Кроме того, мы не учитывали в расчетах диссипацию энергии при ударе, которую вызывает множество вторичных процессов: внутреннее трение, магнитострикция, излучение звука и др. [3, 14].

Более точное приближение к экспериментальным данным может дать применение в расчетах моделей, учитывающих поперечное движение частиц стержней (например, модели Рэлея-Бишопа и Миднина-Германа [23]) или использование метода конечных элементов, который позволит получить трехмерную картину распределения напряжений в стержнях.

Тем не менее, преимущество предложенного численного метода расчета удара очевидно: без сложных аналитических вычислений он позволяет оценить результат соударения стальных стержней и получить такие важные для практики характеристики процесса удара, как максимальные значения напряжений, длительность ударного импульса, коэффициент отскока ударника.

В данной статье мы рассматривали ударные системы, в которых противоположный соударяемому конец штанги свободен. Также мы считали, что до удара в штанге и ударнике отсутствуют напряжения. Полагаем, что предложенный метод позволит с приемлемой точностью рассчитывать процесс удара при внедрении штанги (пики) в обрабатываемую среду, а также при периодических ударах, когда возникающие в ударнике колебания не затухают к моменту следующего соударения.

Список литературы

1. Сен-Венан Б. Примечания к §§ 60 и 61 французского перевода книги “Clebsch Theorie der Elastitöt fester Körper”, Paris, 1883.
2. Арндт Ф.К. Исследование о передаче энергии в процессе удара с точки зрения ударного бурения. ФРГ, г. Клаусталь Челлерфельд, ИГД при Горной Академии, 1960.
3. Кильчевский Н.А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. – Киев: Наукова думка, 1976. – 320 с.
4. Н. Hertz. *Über die Berührung fester elastischer Körper* Gesammelte Werke, Bd I.
5. Сирс И.Е. О продольном ударе металлических стержней с закругленными торцами// Transactions of the Cambridge Philosophical Society. – 1907. - Vol. XXI. - P. 49-105.
6. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. - М.: Гостехиздат, 1949.
7. Динник А.Н. Удар и сжатие упругих тел. Избр. тр. - Киев: АН УССР, 1952. - Т. 1. - 152 с.
8. Алимов О.Д., Манжосов В.К., Емельянц В.Э. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах. - М.: Наука, 1985. – 182 с.
9. Александров Е.В., Соколинский В.Б.. Прикладная теория соударения стержней с торцами произвольной формы. Научный доклад. - М.: Институт горного дела им. А.А.Скочинского, 1964. – 33 с.
10. Флавицкий Ю.В., Хомяков К.С. Определение импульсов напряжения при продольном соударении упругих тел. Краткий научный отчет. - М.: Институт горного дела им. А.А.Скочинского, 1964. – 31 с.
11. Александров Е.В., Флавицкий Ю.В., Хомяков К.С. Определение импульсов напряжения при продольном соударении упругих стержней произвольной геометрической формы. Краткий научный отчет. - М.: Институт горного дела им. А.А.Скочинского, 1965. – 40 с.
12. Соколинский И.Б. Методы аналитического расчета параметров неупругого удара в волновых системах. - М.: ИГД им. А.А.Скочинского, 1970. – 60 с.
13. Александров Е.В., Соколинский В.Б. и др. Исследование взаимодействия инструмента и горной породы при ударном разрушении. Краткий научный отчет. - М.: Институт горного дела им. А.А.Скочинского, 1967. – 61 с.
14. Александров Е.В., Соколинский В.Б. Прикладная теория и расчеты ударных систем. - М.: «Наука». - 1969. – 201 с.
15. Манжосов В.К., Слепухин В.В. Моделирование продольного удара в стержневых системах неоднородной структуры. - Ульяновск: УлГТУ, 2011. – 208 с.

16. Кашаев В.А., Ямпольский Д.З. Тензометрический метод измерения удара. Российский опыт. Достижения и перспективы //Вестник научно-технического развития. – 2017. – № 2 (114). <http://www.vntr.ru/ftpgetfile.php?id=1011> (дата обращения: 6 декабря 2016 года).
17. Д. Мак-Кракен, У. Дорн. Численные методы и программирование на Фортране. Издание второе, стереотипное. - М.: МИР, 1977. – 584 с.
18. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд. 5-е, стереотипное, учебное пособие для высших учебных заведений. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы издательства, 1977. – 736 с.
19. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1974. – 831 с.
20. ГОСТ 55162 – 2012 Оборудование горно-шахтное. Молотки отбойные пневматические. Требования безопасности и методы испытаний. - М., Стандартиформ, 2014. – 28 с.
21. Марочник сталей и сплавов. 4-е изд., переработ. и доп. / Ю.Г. Драгунов, А.С. Зубченко, Ю.В.Каширский и др. Под общей ред. Ю.Г.Драгунова и А.С.Зубченко – М.: 2014. - 1216 с.
22. Ямпольский Д.З., Ванаев В.С. Анализ методики испытаний электрических машин с целью определения энергии удара. // Вестник машиностроения. – 2018. № 7. – С. 47-54.
23. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.Н., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. - 296 с.

Дата поступления: 4 сентября 2019 г.