Вестник научно-технического развития Bulletin of Science and Technical Development

Номер 9 (145), сентябрь 2019 г.

DOI: 10.18411/vntr2019-145

Издается с 2007 года

Издание зарегистрировано в Министерстве РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации Эл. № ФС77-29768.

ISSN 2070-6847

*Журнал выпускается под научным руководством Федерального государственного
бюджетного учреждения науки Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН*

ОГЛАВЛЕНИЕ № 9 (145), 2019

Иосиф Исаакович Вульфсон. О некоторых динамических эффектах при периодическом перемещении центра масс машинного агрегата.....стр. 3 – 14

Владимир Иванович Ерофеев, Наталья Игоревна Молодушная, Надежда Петровна Семерикова. Нелинейное эволюционное уравнение для описания распространения поперечных волн в многослойной конструкции.....стр. 15 - 20

Лидия Ивановна Куксенова, Мария Сергеевна Алексеева. Исследование структурного состояния и износостойкости азотированных сплавов железа с разными типами кристаллической решетки.....стр. 21 - 29

Дмитрий Зиновьевич Ямпольский. Численное моделирование продольного удара. Сравнение с экспериментом.....стр. 30 – 51

Издание зарегистрировано в Министерстве РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации Эл. № ФС77-29768.

ISSN 2070-6847

УДК 621.01:534.1

О НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТАХ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ЦЕНТРА МАСС МАШИННОГО АГРЕГАТА

© Иосиф Исаакович Вульфсон

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна", СПГУПТД, Санкт-Петербург, Россия

jvulf@yandex.ru

Аннотация. Анализируется ряд динамических эффектов при периодических перемещениях центров масс машинных агрегатов, возникающих при программном движении исполнительных органов технологических машин, в сельскохозяйственных, подъемно-транспортных и других машинах. В подобных машинах переменность положения центра масс приводит к возникновению реономных связей, вызывающих нестационарность частотных характеристик привода машины, возбуждение параметрических колебаний и возможность нарушений условий динамической устойчивости. В статье для подавления этих эффектов предложены способы определения пороговых значений диссипативных характеристик при медленных и высокочастотных режимах движения. Полученные результаты могут быть использованы для повышения производительности машин, точности воспроизведения программного движения рабочих органов и устранения других нарушений при выполнении поставленных технологических задач.

Ключевые слова: центр масс, параметрические колебания, динамическая устойчивость.

ABOUT SOME DYNAMIC EFFECTS DURING PERIODIC MOVEMENT OF THE MACHINE UNIT MASS CENTER

© Iosif Vulfson

Saint Petersburg State University of Industrial Technologies and Design,
Saint-Petersburg, Russia

jvulf@yandex.ru

Abstract. A number of dynamic effects are analyzed when periodic displacements of the machine assemblies mass centers that occur during the programmed movement of the executive bodies of technological machines, in agricultural, lifting, and other machines. In such machines, the variability of the position of the center of mass leads to the formation of rheonomic connections, causing non-stationary frequency characteristics of the machines drives, the excitation of parametric oscillations and the possibility of the dynamic stability conditions violation. To suppress these effects, the article proposes methods for determining the threshold values of dissipative characteristics in slow and high-frequency modes of motion. The results can be used to increase the productivity of machines, the accuracy of reproduction of the programmed movement of the working bodies and eliminate other violations when performing the assigned technological problems.

Key word: center of mass, parametric vibrations, dynamic stability.

1. Вводные замечания. Перемещение центра масс характерно для машин, осуществляющих перенос грузов, а также для многих технологических машин с неравномерным программным движением рабочих органов. В последнем случае при высоких скоростях машин, а также изменениях масс обрабатываемых изделий это нередко существенно отражается на динамике машин и реализации поставленных требований к качеству выпускаемой продукции.

Рассматриваемой проблеме посвящена статья [1], в которой была выявлена опасность, связанная с появлением реономных связей и возможностью потери динамической устойчивости возбуждаемых колебаний в зонах параметрических резонансов. По существу, эта опасность возникает в случае, когда уровень вносимой энергии превосходит энергию, отводимую диссипативными силами. Именно этой проблеме в данной статье будет уделено особое внимание.

На динамической модели (рис.1) машина отображается в виде объекта, располагающегося на двух упругих элементах. Заметим, что подобная модель при неподвижном центре масс была рассмотрена в работах [2, 3] применительно к анализу колебаний автомобиля. Одно из существенных изменений этой модели, использованной Я.Г. Пановко, в данной статье связано с перемещением центра масс из-за переменных параметров колебательной системы, возникающих в цикловых машинах при движении звеньев механизмов и элементов технологических операций. В этих машинах исполнительные органы совершают периодические программные движения, которые осуществляются так называемыми цикловыми механизмами – рычажными, кулачковыми, мальтийскими и им подобными. Кинематические характеристики цикловых механизмов являются не только источником возмущений, но и формируют нестационарные динамические связи, которые могут привести к нарушению динамической устойчивости.

Рис. 1. Динамическая модель.

В цикловых механизмах связь между координатами на «входе» и «выходе» описывается нелинейной функцией положения $\Pi(\varphi)$. Для идеального механизма, в котором отсутствуют зазоры и все звенья принимаются абсолютно жёсткими $\varphi = \varphi_* = \omega t$. Пусть $\varphi = \varphi_* + q$, где q – динамическая ошибка, возникающая при колебаниях. Принимая во внимание, что функция положения непрерывна и дифференцируема, произведём линеаризацию этой функции в окрестности программного движения: $\Pi(\varphi_* + q) \approx \Pi(\varphi_*) + \Pi'(\varphi_*)q$, где $\Pi' = d\Pi/d\varphi$ – первая передаточная функция механизма (аналог скорости). Таким образом, при малых колебаниях, несоизмеримых с «идеальной» координатой практически без ущерба для точности мы

заменяли нелинейную связь нестационарной. Нестационарные связи могут быть важным источником повышения виброактивности цикловых механизмов. В частности, в этом случае эффективный аналог «коэффициента диссипации» существенно снижается и даже может стать отрицательным, что, вопреки традиционным представлениям, приводит к увеличению амплитуд колебаний.

В данной модели расстояния между центром масс и опорами оказываются переменными:

$$a = |L_1(t)|; b = |L_2(t)| \text{ при } L_1(t) + L_2(t) = L = \text{const (см. рис.1)}.$$

Наиболее известным примером проявления нестационарных связей является параметрический резонанс, при котором на определённых частотных диапазонах система приобретает способность накапливать энергию. В машинах с цикловыми механизмами обычно доминирует медленное изменение параметров. При этом реализуемый частотный диапазон параметрического возбуждения существенно удалён от наиболее опасного главного параметрического резонанса, а параметрические резонансы высших порядков оказываются подавленными даже при малых диссипативных силах. В практике это нередко приводит к ложному выводу, что влиянием нестационарных связей можно пренебречь. Однако в современных технологических машинах нередко случаи, при которых возникает необходимость в осуществлении многочастотного движения рабочего органа, когда приведенные инерционные и упругие характеристики содержат не только низкочастотные, но и высокочастотные составляющие [4 – 15]. Аналогичная ситуация также возникает при использовании вибрационной линеаризации с целью уменьшения эффективных значений сил кулонова трения.

Практические приёмы определения областей динамической неустойчивости обычно базируются либо на различных модификациях метода малого параметра и других асимптотических методах, либо на численных методах. Процедура решения подобных задач далеко не элементарна, особенно если иметь в виду не эталонные упрощённые модели с одной степенью свободы, а реальные колебательные системы современных машин и механизмов, в которых параметрическое возбуждение имеет многокомпонентную структуру. В статье задача решается на базе метода условного осциллятора, что позволяет избежать ряда трудностей, возникающих в данном случае при использовании традиционных методов решения [9 – 15].

В цикловых системах кинетическая (T) и потенциальная (U) энергия в общем случае определяются следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} T = T_2 + T_1 + T_0; \quad T_2 = 0,5 \sum_{j=1}^H \sum_{k=1}^H a_{jk}(\varphi) \dot{q}_j \dot{q}_k; \quad T_1 = \sum_{j=1}^H a_j(\varphi) \omega \dot{q}_j; \quad T_0 = 0,5 a_0(\varphi) \omega^2; \\ U = 0,5 \sum_{j=1}^H \sum_{k=1}^H c_{jk}(\varphi) q_j q_k. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $a(\varphi), c(\varphi)$ – переменные инерционные и квазиупругие коэффициенты при аргументе $\varphi = \omega t$.

Функции T_2, U , образующие квадратичные формы, позволяют с достаточной точностью определять спектр переменных «собственных» частот. Функция T_1 формирует гироскопические составляющие, которые могут существенно изменить эффективные диссипативные свойства внутри кинематического цикла. Функция T_0 соответствует

кинетической энергии переносного движения, которая при выбранных обобщённых координатах определяет кинематическое возбуждение системы.

На основании (1) изменение полной энергии системы ΔE за период $\tau = 2\pi/\omega$ и dE/dt определяются как

$$\Delta E = 0,5 \sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^H \int_0^{\tau} \left(\frac{\partial c_{ij}}{\partial t} \right) q_i q_j dt - 0,5 \sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^H \int_0^{\tau} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j dt + \sum_{i=1}^H \int_0^{\tau} Q_i \dot{q}_i dt, \quad (2)$$

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^H Q_i \dot{q}_i + \frac{d}{dt} (T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (3)$$

Здесь Q_i – неконсервативные обобщённые силы.

Зависимости (2), (3) могут быть использованы в качестве критериев при определении условий динамической устойчивости. В частности, условие $\Delta E < 0$ свидетельствует о том, что отток энергии за один период, возникающий из-за отрицательной работы диссипативных сил, превышает поступление энергии за счёт параметрического возбуждения. В результате параметрические резонансы подавляются и обеспечивают условия динамической устойчивости. При этом, однако, не гарантируется затухающий характер колебаний внутри кинематического цикла, когда могут быть нарушены условия динамической устойчивости на отдельных участках цикла. Это приводит к локальным амплитудным «всплескам». В то же время подобные нарушения устраняются при выполнении условия $dE/dt < 0$. Это условие с некоторым запасом также служит критерием для устранения параметрических резонансов. Отметим, что приведенные условия достаточно наглядно отражают физическую сущность наблюдаемых эффектов, но при их реализации в инженерных расчётах вызывают определённые трудности. Ниже подобные условия будут приведены в более удобной форме, допускающей эффективные инженерные оценки.

2. Динамический анализ. Функция $x(\varphi)$ (см. рис.1) зависит от исходных данных исследуемой машины. Для большей определенности при дальнейшем качественном динамическом анализе конкретизируем функции L_1, L_2 согласно следующим зависимостям (рис.2):

$$L_1(\varphi) = h(0,5 + \lambda + \sigma \cos \varphi); L_2(\varphi) = h(0,5 - \lambda - \sigma \cos \varphi); (\lambda + \sigma < 0,5). \quad (4)$$

Здесь и ниже использован переход к безразмерному времени $\varphi = \omega t$, где ω – угловая скорость. При этом реализуется переход к «безразмерным частотам» $\bar{k}_i = k_i / \omega$. (В целях упрощения формульного текста черточка над обозначением ниже будет опущена.)

Параметры λ и σ соответствуют постоянной и переменной составляющим отклонения координаты центра масс от среднего положения. Согласно (2) при $\sigma = 0$

$$L_1 = h(0,5 + \lambda) = a; L_2 = h(0,5 - \lambda) = b.$$

Тогда задача совпадает со случаем фиксированного неподвижного положения центра масс, рассмотренного Я.Г. Пановко [2,3]. При $\sigma \neq 0$ в данной задаче $h(\lambda + \sigma) = 0,5[L_1(0) - L_2(0)]$.

Отсюда следует $\sigma = 0,5[L_1(0) - L_2(0)] / h - \lambda$. Отметим, что параметр L не зависит от φ : $L = L_1(\varphi) + L_2(\varphi) = h$ (рис.2).

Рис. 2. Графики L, L_i^*, L_i ($i = 1; 2$) Рис.3. Графики J, J^*

Выше были учтены лишь медленные составляющие движения центра масс. Однако, как показано в работах [6, 7, 14], при исследовании параметрического возбуждения нельзя пренебрегать влиянием высших частот. Поэтому наряду с формулами (2) ниже будут использованы аналогичные зависимости следующего вида:

$$L_1^* = L_1 + r \cos j\varphi; \quad L_2^* = L_2 + r \cos j\varphi, \quad (5)$$

где число j соответствует номеру учитываемой высокочастотной гармоники. (Здесь и ниже звездочка при параметрах обозначает использование функций $L_i^*(\varphi)$, что отвечает учету влияния высокочастотных гармоник).

В качестве обобщенных координат примем вертикальное перемещение центра масс $y = q_1$ и угол поворота качающегося объекта q_2 с моментом инерции J или J^* (рис.3). Для определенности при численной оценке влияния переменности параметров примем $L=1$, $r=0,4L$, $j=8$, $c_1=100$ Н/м, $\tilde{n}_2=30$ Нм. Исследуемая динамическая модель описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} mq_1'' + 2\delta_1^* m k_1^* q_1' + (c_1 + c_2)q_1 + (c_1 L_1^* - c_2 L_2^*)q_2 &= Q_1; \\ J^* q_2'' + 2\delta_2^* J^* k_2^* q_2' + (c_1 L_1^* - c_2 L_2^*)q_1 + (c_1 L_1^{*2} + c_2 L_2^{*2})q_2 &= Q_2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Здесь Q_1, Q_2 – обобщенные силы; $k_1^*(\varphi), k_2^*(\varphi)$ значения собственных частот; $(\quad)' = d/d\varphi$; $\delta_i^* = \vartheta_i^* / (2\pi)$ – коэффициент демпфирования; ϑ_i^* – логарифмический декремент.

На рис.3 приведены графики моментов инерции J и J^* для частного случая, когда каждый из радиусов инерции $\rho = \sqrt{J/m}$, $\rho^* = \sqrt{J^*/m}$ соответственно равен среднему геометрическому между величинами L_1, L_2 и L_1^*, L_2^* .

Для определения частотных характеристик применительно к данной задаче целесообразно перейти к нормальными координатами, позволяющими заменить систему уравнений уравнениями с одной обобщенной координатой. Принимая во внимание, что диссипативные силы оказывают слабое влияние на спектр собственных частот, воспользуемся непосредственно системой уравнений (6). Произведем следующую замену координат: $q_1 = \Theta_1 + \Theta_2$; $q_2 = \beta_1 \Theta_1 + \beta_2 \Theta_2$, принимая коэффициенты β_1, β_2 в качестве неизвестных параметров. В новых координатах кинетическая и потенциальная энергия определяются зависимостями

$$\begin{aligned} T &= 0,5(a_1 \dot{\Theta}_1^2 + a_2 \dot{\Theta}_2^2 + 2a_* \dot{\Theta}_1 \dot{\Theta}_2), \\ U &= 0,5(c_1 \Theta_1^2 + c_2 \Theta_2^2 + 2c_* \Theta_1 \Theta_2), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_{11} + 2\beta_1 a_{12} + \beta_1^2 a_{22}; \\ a_2 &= a_{11} + 2\beta_2 a_{12} + \beta_2^2 a_{22}; \end{aligned} \right\} (8); \quad \left. \begin{aligned} c_1 &= c_{11} + 2\beta_1 c_{12} + \beta_1^2 c_{22}; \\ c_2 &= c_{11} + 2\beta_2 c_{12} + \beta_2^2 c_{22}; \end{aligned} \right\} (9); \quad \left. \begin{aligned} a_* &= a_{11} + (\beta_1 + \beta_2) a_{12} + \beta_1 \beta_2 a_{22}; \\ c_* &= c_{11} + (\beta_1 + \beta_2) c_{12} + \beta_1 \beta_2 c_{22}. \end{aligned} \right\} (10)$$

где $a_{11} = m$; $a_{22} = J_{2z}$; $a_{12} = 0$; $c_{11} = 4c$; $c_{22} = 2c(L_{1x}^2 + L_{2x}^2)$; $c_{12} = 2c(L_{1x} - L_{2x})$.

При $a_* = 0$, $c_* = 0$ на основании зависимости (10), определяем неизвестные коэффициенты формы β_1, β_2 и собственные частоты; $k_1 = \sqrt{c_1 / a_1}$, $k_2 = \sqrt{c_2 / a_2}$ (рис.4).

Рис. 4. Собственные частоты: 1.— k_1 ; 2.— k_2 ; 3.— k_1^* ; 4.— k_2^*

Далее перейдем к анализу режимов, отражающих влияние переменности параметров системы. На рис. 5 приведены результаты компьютерного моделирования системы уравнений (6).

Чтобы наглядно выявить источник нарушения динамической устойчивости исключим из рассмотрения учет вынужденных колебаний и диссипативных сил ($Q_i = 0$; $\delta_i = 0$). На рис. 5, а, б четко видно нарушение устойчивости с характерным для параметрических колебаний экспонентным нарастанием огибающих, а также рост виброактивности на фазовых портретах координат q_1 и q_2 .

Принимая во внимание, что целью данного исследования являются параметрические эффекты, обратимся к однородному дифференциальному уравнению

$$a(t)\ddot{\theta} + b(t)\dot{\theta} + c(t)\theta = 0. \quad (11)$$

Рис. 5. Графики $q_i(\varphi)$ и фазовые портреты.

На основании метода условного осциллятора решение уравнения (11) может быть представлено как

$$\theta = A_0 \exp[-\delta_0 \int_0^t k_i(u) du] \sqrt{\frac{a(0)\Omega(0)}{a(t)\Omega(t)}} \sin \left[\int_0^t \Omega(u) du + \alpha \right]. \quad (12)$$

Здесь $\delta_0 = \psi / (4\pi)$ – диссипативный коэффициент; A_0, α – определяются начальными условиями; Ω – частота параметрического возбуждения.

Применительно к рассматриваемому классу задач метод условного осциллятора подробно рассмотрен в работах [9, 13, 14], поэтому при дальнейшем изложении мы ограничимся лишь краткими сведениями, облегчающими чтение данной статьи.

Связь между функцией $\Omega(t)$, входящей в зависимость (12), и переменной собственной частотой $p(t)$ определяется следующим уравнением условного осциллятора:

$$\ddot{z} - 0,5\dot{z}^2 + 2\Omega_*^2 e^{2z} = 2p^2(t), \quad (13)$$

где $z = \ln(\Omega/\Omega_*)$, Ω_* – произвольный параметр с размерностью частоты, играющий роль нормирующего множителя.

Достаточную точность даёт линейризация уравнения (13) при отображении экспоненциального члена первыми двумя членами ряда Тейлора:

$$\ddot{z} + 4p_0^2(t)z = 2[p^2(t) - p_0^2(t)]. \quad (14)$$

Теперь в левой части уравнения в качестве параметра сохранилась медленно меняющаяся функция, соответствующая периоду $2\pi/\omega$, а в правую часть – высокочастотная. Резонанс линейризованного условного осциллятора соответствует главному параметрическому резонансу, который возникает в окрестности «плавающей» частоты $2p_0$. Частное решение уравнения (14) приводится к виду

$$z = \frac{1}{\sqrt{p_0(t)}} \int_0^t \frac{[p(u)^2 - p_0(u)^2]}{\sqrt{p_0(u)}} \sin\left[2 \int_u^t p_0(\tau) d\tau\right] du. \quad (15)$$

При пульсации функции $p^2(t)$ по гармоническому закону $p^2 = p_0^2 [1 - 2\varepsilon \cos(\omega_p t + \gamma)]$ приближённое решение уравнения условного осциллятора (13) ищем в виде $z = a_{z0} + a_z \cos(\omega_p t)$ при

$$a_z = \frac{\varepsilon \kappa_z^2(a_z)}{[\kappa_z^2(a_z) - (\omega_p / (2p_0))^2]} \frac{a_z I_0(2a_z)}{I_1(2a_z)}; \quad a_{z0} = 0,5 \ln \frac{p_0^2 + 0,125\omega_p^2}{p_0^2 I_0(2a_z)},$$

где $I_k(2a_z) = i^{-k} J_k(2a_z i)$; $i = \sqrt{-1}$; J_k - функция Бесселя первого рода при мнимом аргументе $2a_z i$; ε - глубина пульсации переменной частоты.

Функция $\kappa_z(a_z)$ отвечает безразмерной «собственной» частоте условного осциллятора и определяется зависимостью

$$\kappa_z^2(a_z) = \frac{I_1(2a_z)}{a_z [I_0(2a_z) - 0,5a_z I_1(2a_z)]}, \quad (16)$$

На рис.6 показаны амплитудно-частотные характеристики условного осциллятора при варьировании глубиной пульсации $\varepsilon = 0,2; 0,4; \dots; 1$ (тонкие линии). С ростом ε кривые удаляются от скелетной кривой (жирная линия). Как показывает анализ, при $z \leq 1$, что соответствует почти троекратному изменению частоты, отклонение скелетной кривой от единицы не превышает 3,5 %. Это во многих случаях позволяет с достаточным основанием воспользоваться линейным уравнением (14).

Рис. 6. Амплитудно-частотные характеристики условного осциллятора.

После определения $z(t)$ на основании (14), (15), (16) находим зависимость, описывающую переменную амплитуду колебаний, соответствующую высокочастотным составляющим параметрического возбуждения

$$A(t) = A_0 \sqrt{a(0)/a(t)} \exp\{-\delta_0 \Phi_0(t) - 0,5[z(t) - z(0)]\}, \quad (17)$$

где $\Phi_0 = \int_0^t p_0(t) dt$.

Условие $dA/dt < 0$, исключающее возможность параметрического возбуждения, приведём к следующему виду:

$$\delta_0 > \delta_p = -0,5 p_0^{-1} (\dot{a}/a + \dot{z}) = -0,5 [\dot{a}/(ap_0) + \dot{p}/(pp_0) - \dot{p}_0/p_0^2]. \quad (18)$$

Первое слагаемое в формуле (18), строго говоря, не оказывает влияния на возбуждение параметрических резонансов, так как оно связано с составляющей кинетической энергии T_1 и образует гироскопические силы, работа которых за период кинематического цикла равна нулю. Однако эти силы могут вызвать существенную амплитудную модуляцию внутри кинематического цикла.

При медленном изменении параметров условие $dA/dt < 0$ для произвольного временного отрезка выполняется, если

$$\delta_0 > \delta_*(\varphi) = \delta_g(\varphi) + \delta_{p*}(\varphi). \quad (19)$$

Здесь функция δ_g соответствует гироскопическим силам (см.(11)), а зависимость

$$\delta_{p*}(\varphi) = 0,5 p_0(\varphi)^{-2} \frac{dp_0(\varphi)}{d\varphi} \quad (20)$$

отражает влияние переменности «собственной» частоты колебаний. Максимальное значение функции δ_{p*} соответствует критическому уровню возбуждения. Неравенство (19) совпадает с результатами, полученными на основании прямого метода Ляпунова, устанавливающего достаточное условие динамической устойчивости [16]. Можно показать, что при медленно меняющихся параметрах оно является также и необходимым. В качестве функции Ляпунова примем квадрат амплитуды свободных колебаний при «замороженных» коэффициентах $\Phi = q_i^2 + q_i'^2/k_i^2$ [17]. Согласно второй теореме Ляпунова достаточным условием для асимптотической устойчивости является $\Phi' < 0$. Это условие можно привести к виду:

$$\delta_i^* > -(k_i^*)'/(2k_i^{*2}) ; \delta_i > -k_i'/(2k_i^2) \quad (21)$$

С инженерных позиций представляет интерес оценка, приведенная в монографии [4]. При некоторых коррективах и принятых нами условных обозначениях этой оценке можно придать вид $\delta_i > 0,5\varepsilon^s$, где ε глубина пульсации собственных частот, s – номер области неустойчивости (рис.7).

3. Задержка эффекта нарушения динамической устойчивости. При выбранных соотношениях переменных параметров L_i реономная связь системы представляет особый интерес, так как полученные результаты могут вызывать некоторое недоумение из-за внезапного нарушения условий устойчивости лишь после задержки на относительно длительном отрезке времени зоны свободных колебаний (см. рис.5,а; 8).

Рис.7. Графики зависимости порогового параметра диссипации от глубины пульсации.

Рис.8. К анализу эффекта задержки режима динамической неустойчивости.

Как показал анализ, причиной данного эффекта является значительное уменьшение моментов инерции в этой зоне (см. рис.3), что привело к росту «собственных» частот и замедленному пересечению областей динамической неустойчивости. При быстром пересечении этой области ($\varphi \leq 2$) амплитуда параметрического резонанса обычно не достигает критического значения.

4. Анализ энергетического баланса при перемещении центра масс. Как уже отмечалось, для устранения нарушений условий динамической устойчивости одним из обычных способов является удаление от пороговых частотных границ. В нашем случае реализация этого метода на практике затруднена из-за переменности собственных частот, поэтому большую роль здесь играет влияние диссипативных сил. В этом случае целесообразно воспользоваться анализом энергетического баланса [16].

На рис.9 приведен ряд графиков, позволяющих выявить интенсивность увеличения амплитуд возбужденных колебаний и установить уровень диссипативные характеристики, исключая критические режимы. На рис. 9, а показаны характеристики энергетического баланса при медленных возмущениях. В течение длительного отрезка времени система поддерживает динамическую стабильность. Именно в этом участке возрастает значение соответствующего момента инерции, и изменяются собственные частоты (см. рис. 3, 4, 6).

Отметим, что для реализации подавления параметрического резонанса необходимый уровень диссипации очень велик. Выход из сложившейся ситуации возможен при коррекции исходных параметров смещения центра масс. Второй график этого рисунка показывает, насколько высока интенсивность роста амплитуды за время динамической неустойчивости – угол поворота увеличился только в 4 раза, а подводимая энергия возросла примерно в 50 раз! Это указывает на опасность аварии, причем эта опасность особенно проявляется при высокочастотных гармониках (рис. 9, б).

Рис.9. Графики $E(\varphi), E^*(\varphi)$ при низкочастотных и высокочастотных возбуждениях:
1. – Поступающая энергия. 2. – $\delta=0,01$; 3. – $\delta=0,03$; 4. – $\delta=0,1$; 5. – $\delta=0,4$.

5. Заключение. В статье решается оригинальная задача, посвященная анализу зависимости виброактивности при возбуждении колебаний, вызванных перемещением центра масс машинного агрегата. Важным результатом проведенного анализа является вывод, согласно которому при этом из-за появления реономных связей возникают параметрические колебания, а, следовательно, и опасность динамической неустойчивости колебательной системы. В целях снижения виброактивности таких систем определен пороговый уровень

диссипативных параметров, ниже которого возникает нарушение динамической устойчивости.

От успешного решения поставленной задачи зависят производительность машины, точность воспроизведения заданных программных движений, непосредственно влияющих на качество выпускаемой продукции, долговечность и надежность оборудования, а также условия работы человека-оператора. В рамках данной статьи не рассмотрены динамические эффекты при рассматриваемом классе задач и совместном возбуждении вынужденных и параметрических колебаний. Эта задача требует отдельного рассмотрения.

Список литературы

1. Вульфсон И.И. К проблеме снижения виброактивности технологических машин с реономными связями и близкими значениями парциальных частот механизмов // Машиностроение и инженерное образование. - 2019. - №2.
2. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. - М.: Наука, 1967. - 420 с.
3. Пановко Я. Г. Механика деформируемого твердого тела. - М.: Наука, 1985. - 288 с.
4. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостехтеоретиздат, 1956. - 600 с.
5. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. - М.: Высш. шк., 1980. - 408 с.
6. Вейц В.Л. Динамика машинных агрегатов. - Л.: Машиностроение, 1969. - 370 с.
7. Вульфсон И.И., Коловский М.З. Нелинейные задачи динамики машин. - Л.: Машиностроение, 1968. - 284 с.
8. Коловский М.З. Динамика машин. - Л.: Машиностроение, 1989. - 289 с.
9. Вульфсон И.И. О колебаниях систем с параметрами, зависящими от времени // Прикладная математика и механика. - 1969. - Т.33, №2. - С. 331–337.
10. Vulfson J. I. Analytical investigation of the vibrations of mechanisms caused by parametric impulses // Mech. Mach. Theory. - 1973. - V.10, No.4. - P. 305–313.
11. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. - Л.: Машиностроение, 1990. - 309.
12. Vulfson I.I. Excitation of parametric resonances in mechanisms with rheonomic constraints subject to the joint effect of fast and slow variations of parameters // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. - 2016. - Vol. 45, No. 2. - P. 95-103.
13. Вульфсон И.И. Динамика цикловых машин. - СПб.: Политехника, 2013. - 425 с.
14. Vulfson, I.I. Dynamics of cyclic machines. (Expanded edition of the monograph [13] translation). - Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2015. - 410 p.
15. Вульфсон И.И. Условия динамической устойчивости при совместном учёте медленных и быстрых изменений параметров // Вестник научно-технического развития. - 2015. - №3 (91). - С.3-13.
16. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. - М.: Наука, 1950. - 416 с.
17. Vulfson I. Vibrations excitation of cyclic mechanisms due to energy generated in non-stationary constraints. - Advances in mechanical engineering . Chapter 14. - Springer, 2015. - P. 117- 128.

Дата поступления: 16 августа 2019 г.

УДК 534.1

НЕЛИНЕЙНОЕ ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В МНОГОСЛОЙНОЙ КОНСТРУКЦИИ

© Владимир Иванович Ерофеев¹, Наталья Игоревна Молодушная¹,
Надежда Петровна Семерикова²

¹Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» (ИПМ РАН), Нижний Новгород, Россия

²Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

erof.vi@yandex.ru, united-friends@bk.ru, nadezhda.semerikova@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается слоистая конструкция, представляющая собой две струны, лежащие на упругих основаниях Винклера, связанные между собой системой вязких элементов. При этом одна из струн совершает поперечные колебания конечной амплитуды и описывается нелинейным уравнением, динамика второй струны описывается линейным уравнением. Для описания волновых процессов от исходной математической модели произведен переход к эволюционному уравнению, представляющему собой комбинацию нескольких классических уравнений нелинейной волновой динамики (обобщенное уравнение Бюргерса, модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза, модифицированное уравнение Островского и др.).

Ключевые слова: многослойная конструкция, нелинейность, вязкость, поперечная волна, эволюционное уравнение.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН на проведение фундаментальных научных исследований на 2013-2020 г.г. по теме № 0035-2014-0402, № госрегистрации 01201458047 и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-29-100073-мк, 19-08-00965-а).

NONLINEAR EVOLUTIONARY EQUATION FOR DESCRIPTION OF SPREADING OF TRANSVERSE WAVES IN A MULTILAYER DESIGN

© V.I. Erofeev¹, N.I. Molodushnaya¹, N.P. Semerikova²

¹Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia

²National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia
erof.vi@yandex.ru, united-friends@bk.ru, nadezhda.semerikova@yandex.ru

Abstract. A layered structure is considered. It consists of two strings lying on the elastic bases of Winkler and interconnected by a system of viscous elements. Moreover, one of the strings performs transverse oscillations of finite amplitude and is described by a nonlinear equation, the dynamics of

the second string is described by a linear equation. To describe wave processes from the original mathematical model, a transition was made to an evolution equation, which is a combination of several classical nonlinear wave dynamics equations (the generalized Burgers equation, the modified Korteweg – de Vries equation, the modified Ostrovsky equation, etc.).

Keywords: multilayer construction, nonlinearity, viscosity, shear wave, evolution equation.

Acknowledgements. The work was carried out within the Russian state task for conducting fundamental scientific research for 2013-2020 on the topic No. 0035-2014-0402, state registration number 01201458047 and the work was supported by RFBR (projects 18-29-100073, 19-08-00965).

В работах [1-7] был предложен и теоретически обоснован подход, позволяющий исследовать динамику слоистых элементов конструкций, основанный на применении уточненных моделей стержней и пластин. Было определено, что математическая модель, описывающая продольные колебания двухслойного (составного) стержня, по своим дисперсионным свойствам эквивалентна модели Миндлина-Германа [1]; двухслойная струна, совершающая поперечные колебания, эквивалентна балке Тимошенко с натягом [1]; двухслойная мембрана – пластине Тимошенко с натягом [7].

В работе [2] проведен анализ дисперсионных и диссипативных свойств волн, распространяющихся в двухслойном стержне с вязко-упругой силой контактного взаимодействия.

В [3,4] показано, что в составном стержне могут формироваться нелинейные уединенные стационарные волны, и исследованы особенности их распространения.

В [7] в рамках математической модели двухслойной мембраны с учетом геометрической нелинейности получены и исследованы одномерные и двумерные солитоны, а также представлены (изображены) различные формы нелинейных периодических колебаний.

В публикуемой работе рассмотрена более сложная многослойная конструкция, представляющая собой две струны, лежащие на упругих основаниях Винклера, связанные между собой системой вязких элементов (рис. 1). При этом одна из струн (например, верхняя) совершает поперечные колебания конечной амплитуды и описывается нелинейным уравнением. Динамика второй струны описывается линейным уравнением.

Математическая модель рассматриваемой системы имеет вид:

$$\begin{cases} \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - N_1 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + Q_1 u_1 + R_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \right) = 0, \\ \rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - N_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + Q_2 u_2 + R_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где u_i – поперечные отклонения струн, ρ_i ($i=1,2$) – погонные плотности, $N_{1,2}$ – натяжения струн, $Q_{1,2}$ – жесткости упругих оснований, с которыми взаимодействуют струны, R – эквивалентный коэффициент вязкости системы демпферов.

Рис. 1

Система (1) может быть сведена к одному уравнению относительно перемещения одной из струн. Для этого следует выразить из первого уравнения

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{1}{R_1} \left(\rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - N_1 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + Q_1 u_1 + R_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) \quad (2)$$

и соотношение (2) подставить во второе уравнение системы, продифференцированное по времени.

Уравнение динамики, эквивалентное системе (1), имеет вид:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\rho_1 Q_2}{\rho_2 Q_1} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{N_1 Q_2 + N_2 Q_1}{\rho_2 Q_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{R_1}{\rho_2 Q_1} \left((\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - (N_1 + N_2) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right) + \\ & + \frac{\rho_1}{Q_1} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{N_1 N_2}{\rho_2 Q_1} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{N_1 \rho_2 + N_2 \rho_1}{\rho_2 Q_1} \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} - \\ & - \frac{N_1}{2 Q_1} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 6 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 \right) + \\ & + \frac{N_1 N_2}{2 \rho_2 Q_1} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 6 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^3 \right) - \frac{N_1 Q_2}{2 \rho_2 Q_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \\ & + \frac{Q_2}{\rho_2} u + \frac{(Q_1 + Q_2) R_1}{\rho_2 Q_1} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{N_1 R_1}{2 \rho_2 Q_1} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $u = u_1(x, t)$.

Перейдем в уравнении (3) к безразмерным переменным

$U = u/u_0$; $y = x/X$; $\tau = t/T$, введя обозначения $X = \Lambda$; $T^2 = \Lambda^2 \rho_2 Q_1 \gamma / D$, $D = N_1 Q_2 + N_2 Q_1$, $\gamma = \left(1 + \frac{\rho_1 Q_2}{\rho_2 Q_1}\right)$, где u_0 – перемещение, Λ – длина волны, удовлетворяющие соотношению $u_0 / \Lambda = 10^{-4}$, T – период волны и пренебрегая величинами, в которых степень отношения u_0 / Λ выше 4, получим:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{(\rho_1 + \rho_2) R_1 \sqrt{D}}{(\rho_2 Q_1)^{3/2} \Lambda \gamma^{3/2}} \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} - \frac{(N_1 + N_2) R_1}{\Lambda \sqrt{\rho_2 Q_1 \gamma D}} \frac{\partial^3 U}{\partial y^2 \partial \tau} + \frac{\rho_1 D}{\rho_2 Q_1^2 \Lambda^2 \gamma^2} \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} + \frac{N_1 N_2}{\Lambda^2 D} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} - \\
 & - \frac{N_1 \rho_2 + N_2 \rho_1}{\rho_2 Q_1 \gamma \Lambda^2} \frac{\partial^4 U}{\partial y^2 \partial \tau^2} - \frac{N_1 Q_2}{2D} \frac{u_0^2}{\Lambda^2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \frac{Q_1 Q_2 \Lambda^2}{D} U + \frac{(Q_1 + Q_2) R_1 \Lambda}{\sqrt{\rho_2 Q_1 \gamma D}} \frac{\partial U}{\partial \tau} \\
 & - \frac{N_1 R_1}{\sqrt{\rho_2 Q_1 \gamma D}} \frac{u_0^2}{\Lambda^3} \left\{ \frac{\partial^3 U}{\partial y^2 \partial \tau} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial \tau} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial U}{\partial y} \right\} = 0
 \end{aligned} \quad (4)$$

Перейдем в (4) в систему координат $\xi = y - c\tau$; $\eta = \varepsilon y$, где $c = \text{const}$ – скорость волны, заранее не известная, ε – малый параметр, характеризующий отношение максимальной амплитуды перемещения к длине волны. Выбор переменных объясняется тем, что возмущение, распространяясь со скоростью c вдоль оси y , медленно эволюционирует из-за нелинейности и дисперсии.

Представим перемещение в виде разложения в ряд по степеням малого параметра $U = U_0 + \varepsilon U_1 + \dots$

Нулевое приближение по малому параметру позволит определить значение скорости: $c = l$. Первое приближение приведет (4) к эволюционному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial W}{\partial \eta} + \Gamma \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + B \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + G W^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} + Z W + M \left(W^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2W \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 \right) \right] - H W = 0 \quad (5)$$

где $\frac{\partial U_0}{\partial \xi} = W$,

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= -\frac{1}{2\varepsilon} \left[\frac{\rho_1 D}{\rho_2 Q_1^2 \Lambda^2 \gamma^2} + \frac{N_1 N_2}{\Lambda^2 D} - \frac{N_1 \rho_2 + N_2 \rho_1}{\rho_2 Q_1 \gamma \Lambda^2} \right], G = \frac{N_1 Q_2}{4\varepsilon D} \frac{u_0^2}{\Lambda^2}, Z = \frac{(Q_1 + Q_2) R_1 \Lambda}{2\varepsilon \sqrt{\rho_2 Q_1 \gamma D}} \\
 B &= -\frac{1}{2\varepsilon} \left[\frac{(N_1 + N_2) R_1}{\Lambda \sqrt{\rho_2 Q_1 \gamma D}} - \frac{(\rho_1 + \rho_2) R_1 \sqrt{D}}{(\rho_2 Q_1)^{3/2} \Lambda \gamma^{3/2}} \right], M = -\frac{N_1 R_1}{4\varepsilon \sqrt{\rho_2 Q_1 \gamma D}} \frac{u_0^2}{\Lambda^3}, H = \frac{Q_1 Q_2 \Lambda^2}{2\varepsilon D}
 \end{aligned}$$

Уравнение (5) представляет собой комбинацию нескольких классических уравнений нелинейной волновой динамики.

При $\Gamma = 0$, $Z = 0$, $M = 0$, $H = 0$ уравнение (5) вырождается в обобщенное уравнение Бюргерса, имеющее точное аналитическое решение в виде локализованной волны – кинка [8].

При $B = 0$, $Z = 0$, $M = 0$, $H = 0$ – в модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза, имеющее точное аналитическое решение в виде уединенной стационарной волны – солитона [9, 10].

При $B = 0$, $Z = 0$, $M = 0$ – в модифицированное уравнение Островского [11-15].

Заметим, что развитие многослойных систем с сочетанием возможностей управления играет важную роль для контроля нежелательных вибраций и предотвращения резонансного явления из-за внешних нарушений в системе. Эта проблема может быть решена путем применения новой многослойной структуры, включающей «умные жидкости», такие как магнитореологическая жидкость.

Результаты экспериментального исследования эффекта демпфирования в полуактивной магнитореологической жидкости многослойной конструкции под неоднородным магнитным полем были представлены в работе Ш. Колекара и К. Венкатеш [16].

Структурные элементы магнитореологической жидкости состоят из защитных слоев, которые обеспечивают структурную целостность и могут также служить в качестве поверхностей магнитных полюсов. Эти защитные слои обычно параллельны и создают пустоту или область, которая используется для удержания магнитореологической жидкости. Эти параллельные защитные слои отделены друг от друга магнитно-изоляционными защитными слоями, чтобы магнитное поле могло пройти через содержащуюся магнитореологическую жидкость. Магнитное поле генерируется с помощью постоянного магнита или электромагнита. Изменение магнитного поля обеспечивает необходимый контроль для выбора желаемых свойств магнитореологической жидкости и, следовательно, механического поведения структуры. Несколько структурных элементов могут быть расположены в последовательной конфигурации и в вышележащей конфигурации, чтобы обеспечить управляемые пластинки, или сконфигурированы в смежном положении, чтобы обеспечить региональное или шаблонное управление жесткостью и демпфированием композитной структуры [17].

Список литературы

1. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Семерикова Н.П. Описание распространения упругих волн в слоистых элементах конструкций с помощью уточненных стержневых моделей // Вестник Нижегородского университета им Н.И. Лобачевского. - 2011. - №4. - С. 130-133.
2. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Распространение продольных волн в составном вязко-упругом стержне // Приволжский научный журнал. - 2013. - №3. - С.18-23.
3. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Миклашевич И.А., Сандалов В.М. Уединенные волны деформации в составном нелинейно-упругом стержне // Приволжский научный журнал. - 2013. - №4. - С.19-23.
4. N.I.Arkipova, V.I.Erofeev Solitary strain waves in the composite nonlinear elastic rod // Informatics, Networking and Intelligent Computing - Zhang (Ed.), 2015 Taylor & Francis Group, London, ISBN: 978-1-138-02678-0. p.225-226
5. Архипова Н.И., Ерофеев В.И. Уточненные стержневые модели в задачах о распространении упругих волн в слоистых элементах конструкций // Механика наноструктурированных материалов и систем. Сборник трудов 2-й Всероссийской научной конференции в 3-х томах. Том 1. Москва, 17-19 декабря 2013г. - М.: ИПРИМ РАН, 2013. - С. 6-19.
6. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Сандалов В.М. Уточненные модели в задачах о распространении упругих волн в слоистых элементах конструкций // Вестник научно-технического развития. - 2014. - №12(88). - С.3-16.

7. Ерофеев В. И., Архипова Н.И. Упругие волны в двумерных слоистых конструкциях // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. - 2016. - № 1; URL: mathmod.esrae.ru/1-5.
8. Селезов И.Т., Корсунский С.В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. - Киев: Наукова думка, 1991. - 200 с.
9. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. - М.: Мир, 1987. - 480 с.
10. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. - М.: Мир, 1988. - 694 с.
11. Островский Л.А. Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане // Океанология. - 1978. – Т. 18, №2. – С. 181-191.
12. Островский Л.А., Степанянц Ю.А. Нелинейные волны во вращающейся жидкости // Нелинейные волны: физика и астрофизика. – М.: Наука, 1993. – С.132-153.
13. Гандариас М.Л., Брузон М.С. Симметричный анализ и точные решения для некоторых уравнений Островского // Теоретическая и математическая физика. - 2011. – Т. 168, № 1. – С. 49-64.
14. Stepanyants Y.A. On stationary solutions of the reduced Ostrovsky equation: Periodic waves, compactons and compound solitons // Chaos, Solitons and Fractals. - 2006. – Vol. 28. – P. 193-204.
15. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Леонтьева А.В. Нелинейные периодические волны в гибкой направляющей, взаимодействующей с упруго-инерционным основанием // Вестник научно-технического развития. - 2018. - № 5(129). - С.11-18.
16. Kolekar S., Venkatesh K. Experimental investigation of damping effect in semiactive magnetorheological fluid sandwich beam under nonhomogeneous magnetic field // Journal of Vibration Engineering and Technologies. - 2019. - Vol. 7, No 2. - P.107-116.
17. Weiss KD, Duclos TG, Chrzan MJ et al. Magnetorheological fluid composite structures. US Patent specification 5547049 (1996).

Дата поступления: 12 сентября 2019 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРНОГО СОСТОЯНИЯ И ИЗНОСОСТОЙКОСТИ АЗОТИРОВАННЫХ СПЛАВОВ ЖЕЛЕЗА С РАЗНЫМИ ТИПАМИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ

© Лидия Ивановна Куксенова^{1,2}, Мария Сергеевна Алексеева^{3,1}

¹Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

²Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

³Всесоюзный институт авиационных материалов, Москва, Россия

lkukc@mail.ru

Аннотация. Исследовали характерные особенности формирования износостойкой структуры азотированных модельных сплавов с ОЦК и ГЦК решетками: Fe-Mo, Fe-Cr, Fe-Al, Fe-Ni- Cr, Fe-Ni-Al, Fe-Ni-Ti, Fe-Ni-Cr-Al-Ti. Установлены взаимосвязи между параметрами структуры азотированного слоя и износостойкостью сплавов. Показано, что в сплавах с ОЦК решеткой матрицы максимальная износостойкость достигается при образовании некогерентных частиц нитридов легирующих элементов, а максимальная твердость соответствует сплаву с когерентными нитридами. В сплавах с ГЦК решеткой максимальные упрочнение при азотировании и износостойкость достигаются на стадии, предшествующей разрыву когерентной связи нитрида с матрицей. Взаимосвязи характеристик структуры азотированного слоя и износостойкости обсуждены с позиций формирования износостойкого структурного состояния сплавов.

Ключевые слова: стали, азотирование, структура износостойкость.

THE INVESTIGATION OF THE STRUCTURAL STATE AND THE WEAR RESISTANCE OF NITRIDING IRON ALLOYS WITH DIFFERENT CRYSTAL LATTICE TYPE

© L.I. Kuksenova^{1,2}, M.S.Alekseeva^{3,1}

¹IMASH RAN, Moscow, Russia

²Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

³All-Russian Scientific Research Institute of Aviation Materials, Moscow, Russia

lkukc@mail.ru

Abstract. The typical peculiarity of wear resistant structure of nitriding model BCC and FCC alloys Fe-Mo, Fe-Cr, Fe-Al, Fe-Ni- Cr, Fe-Ni-Al, Fe-Ni-Ti, Fe-Ni-Cr-Al-Ti are investigated. The correlation between nitriding layer parameters and wear resistance of alloys are established. It is shown, that maximum wear resistance of BCC alloys is reached when non-coherent particles of alloying elements nitrides were formed, and maximum hardness corresponds to the alloy with coherent particles. For FCC alloys maximum hardness after nitriding and maximum wear resistance are reached at the stage before.

Keywords: steel, nitriding, structure, wear resistance.

1. Введение. В настоящее время повышение износостойкости конструкционных материалов за счет современных методов модифицирования поверхности изделий является одной из основных задач в проблеме надежности и долговечности машин и механизмов. Азотирование является одним из эффективных способов поверхностного модифицирования, повышающих твердость поверхностных слоев, износостойкость, усталостную и коррозионную стойкость, задиростойкость поверхностей деталей машин.

Известно, что сопротивление изнашиванию металлических материалов является структурно-чувствительной характеристикой [1,2]. Поэтому для технологического обеспечения процесса формирования износостойкой структуры при азотировании необходимой базой являются знания закономерностей между триботехническими характеристиками сопряжения и структурой поверхностного модифицированного слоя.

Целью данной работы является изучение характерных особенностей формирования износостойкой структуры азотированного слоя сплавов железа с ОЦК и ГЦК кристаллическими решетками, связанными с типом легирующих нитридообразующих элементов.

2. Материалы и методики проведения исследований. Исследовали специально выплавленные модельные сплавы с основой α -Fe (ОЦК решетка) состава (ат.%): Fe+4%Mo, Fe+(1-4%)Cr, Fe+4%Al и с основой γ -Fe (ГЦК решетка): Fe+29%Ni+4%Cr, Fe+29%Ni+4%Al, Fe+29%Ni+4%Ti; Fe+29%Ni+4%(Cr-Al-Ti). Содержание углерода было менее 0,05% (масс.), что позволило исключить влияние углерода на структуру диффузионной зоны при азотировании.

Образцы отжигали при 900°C, 2 ч и затем проводили газовое азотирование в среде диссоциированного аммиака в лабораторной муфельной печи с трехсекционными нагревателями, что позволяло поддерживать одинаковую температуру в разных частях пространства камеры. Сплавы с ОЦК решеткой азотировали в диапазоне температур 540-700°C, 35 ч.; сплавы с ГЦК решеткой при температурах 500-660°C, 80 ч.

Основой для выбора экспериментальных методик изучения структуры и свойств азотированных слоев являлся трибологический метод оценки качества поверхностных слоев [3]. Метод [3] предполагает оценивать микроскопические критерии материала приповерхностного микрообъема (физическое уширение рентгеновских линий, фазовый состав, размер упрочняющих частиц и т.п.) и макроскопические критерии пары трения в целом (уровень поверхностного разрушения (износостойкость), допустимые давления (стойкость к заеданию), коэффициент трения (фрикционность)). Микроскопические критерии выявляют структурное состояние материала поверхностного слоя, макроскопические – отражают механизм контактного взаимодействия, связанный с деформацией и разрушением слоев, а в совокупности виды критериев характеризуют качество поверхностного слоя с позиций трибологии.

Для оценки микроскопических критериев применяли рентгеноструктурный и электронномикроскопический методы. Электронномикроскопические исследования проводили на микроскопе TESLA BS-540 с ускоряющим напряжением 120 кВ в режимах микродефракции, темнопольного и светлопольного изображений. Определяли типоразмер нитридов, характер их связи с матрицей. Для оценки параметра структуры матрицы (α - или γ -Fe) проводили рентгеносъемки на дифрактометре ДРОН-4С в монохроматическом Co-K α излучении с компьютерной обработкой.

Среди макроскопических параметров определяли твердость по Виккерсу на приборе ТП по ГОСТ 29999-59 при нагрузке 50 Н, микротвердость на приборе ПМТ-3 при нагрузке 1Н и

относительную износостойкость сплавов на машине однонаправленного трения скольжения модели Шкода-Савин. В качестве контртела использовали ролик из твердого сплава ВК20, практически неподверженный износу. Износ образца оценивали объемом лунки, образованной вращающимся стандартным роликом при заданном числе оборотов. Использовали ролик диаметром 30 мм и шириной 2,5 мм; давление на ролик 150Н, число оборотов - 675мин⁻¹. Эталоном служил образец сплава, не подвергнутый азотированию. Подробно методика испытаний описана в [4].

3. Результаты исследований и их обсуждение. Исследовали основные характеристики структуры и свойств азотированных при температуре 540°C двойных сплавов Fe-Mo, Fe-Cr, Fe-Al.

Для данных модельных сплавов уровень износостойкости согласуется с величиной твердости азотированного слоя, т.е. наблюдается прямая корреляция между твердостью и износостойкостью: чем выше твердость азотированного слоя, тем выше его относительная износостойкость. Кроме того, рентгеноструктурные исследования физического уширения интерференционной линии (220) α -фазы $\beta_{(220)}$ показали, что с увеличением твердости возрастает физическое уширение, что связано в основном с увеличением микродеформации кристаллической решетки. Следовательно, параметры $\beta_{(hkl)}$, HV и ε взаимосвязаны. Сплав, содержащий Fe+4%Mo, имеет минимальные значения $\beta_{(220)}=24$ мрад, твердости 5300 HV и износостойкости $\varepsilon=1,2$. Сплав Fe+4%Al имеет максимальные значения физического уширения, твердости и износостойкости: $\beta_{(220)}=37$ мрад, 9400 HV, $\varepsilon=2,2$.

Микродеформация кристаллической решетки α -фазы при выделении нитридов легирующих элементов зависит от разницы между удельными объемами кристаллических решеток азотированного феррита ($V_{уд}=0,0119$ нм³/ат) и нитридов легирующих элементов. Нитрид AlN имеет наибольший удельный объем ($V_{уд}=0,0177$ нм³/ат), что приводит к большей микродеформации α -фазы, характеризуемой физическим уширением $\beta_{(220)}$ [1].

Влияние количества легирующих элементов на взаимосвязь указанных параметров для сплавов Fe-Cr, содержащих от 1 до 4% Cr, отражает рис.1,а. Видно, что износостойкость при увеличении количества Cr до 4% монотонно возрастает от 0,5 до 1,8. Однако, наибольшее увеличение $\beta_{(220)}$ и твердости имеет место при содержании хрома до 1%: $\beta_{(220)}$ возрастает от 0 до 25 мрад, а твердость изменяется от 1250 до 6250 HV. При последующем увеличении Cr от 1% до 4% $\beta_{(220)}$ практически остается на том же уровне, а твердость несколько увеличивается (до 7200 HV).

Следует подчеркнуть, что и при каждой концентрации хрома в α -твердом растворе железа сохраняется общая закономерность для сплавов с ОЦК решеткой, выражающаяся в прямой корреляции параметров структуры $\beta_{(hkl)}$, характеристик механических свойств HV и относительной износостойкости ε . Однако, с увеличением концентрации нитридообразующего элемента степень роста этих параметров разная: при концентрации хрома до 1% $\beta_{(hkl)}$ возрастает в 24 раза, HV – в 5 раз, ε - в 2 раза; в диапазоне концентраций (1-4)%Cr наблюдается увеличение $\beta_{(hkl)}$ в 1,1 раза, HV – в 1,1 раза, ε - в 1,8 раза.

Такое изменение физического уширения интерференционной линии и твердости можно объяснить механизмами упрочнения диффузионной зоны в зависимости от количества легирующего элемента. В сплавах, содержащих 1-2% хрома, реализуется механизм упрочнения, рассмотренный в работах [1,5]. Он связан со значительной микродеформацией кристаллической решетки твердого раствора за счет образования когерентных зародышей нитридов легирующих элементов. При содержании хрома 1-2% энергия, необходимая для прохождения дислокаций через сильно искаженную область матрицы, будет тем больше, чем

выше микродеформация решетки вокруг частиц. При этом величина микродеформации кристаллической решетки зависит от размера нитридных частиц, удельного объема нитридов, соответствия решеток нитридов и матрицы. Экспериментально методом электронной микроскопии показано, что в сплаве Fe-Cr, содержащем 1% Cr, размер нитридных частиц составляет 1,3-1,5 нм, при 2% Cr – 2,5-3 нм, при 4% Cr – 4-5 нм. Более того, увеличение концентрации хрома приводит к образованию некогерентных нитридных частиц, которые будут являться препятствием движению дислокаций до тех пор, пока напряжение не станет достаточным для того, чтобы линия дислокации изогнулась и прошла между частицами. С увеличением размера частиц возрастает расстояние между ними [6], и в связи с этим требуется меньшее напряжение для прохождения дислокаций между частицами, в результате прирост твердости и физического уширения снижается, что и подтверждается концентрационными зависимостями HV и $\beta_{(hkl)}$. При таких условиях реализуется механизм упрочнения некогерентными частицами, предложенный Орованом [7]. Анализ полученных зависимостей дает основание предположить, что условия для деформации в случае постепенного изменения механизма перераспределения дислокационной структуры облегчаются, что является основной причиной формирования более износостойкой структуры и монотонного возрастания износостойкости во всем концентрационном диапазоне сплавов Fe-Cr (0-4%), в отличие от параметров HV и $\beta_{(hkl)}$.

Известно, что температура азотирования существенно влияет на структурное состояние поверхностного слоя. Поэтому в данной работе этот фактор анализировали на примере сплавов Fe-Cr (1 и 4%Cr) также с позиций условий формирования износостойкой структуры и выявления взаимосвязи между характеристиками структуры, твердостью и износостойкостью сплавов.

Результаты исследования физического уширения интерференционной линии (220) α -фазы $\beta_{(220)}$, твердости и износостойкости показали, что при увеличении температуры азотирования от 540 до 700°C, рис.1б, наблюдается более сложная зависимость между тремя исследуемыми величинами по сравнению с аналогичными зависимостями от концентрации легирующих элементов при постоянной температуре азотирования 540°C, рис.1а.

Так, при увеличении температуры азотирования наблюдается монотонное снижение физического уширения $\beta_{(220)}$ и микротвердости сплавов Fe+1%Cr и Fe+4%Cr. Для сплава, содержащего 1%Cr, $\beta_{(220)}$ снижается от 21 до 15 мрад, а микротвердость HV0,1- от 6600 до 3500 HV0,1, рис.1,б. Для сплава, содержащего 4% Cr, $\beta_{(220)}$ снижается от 33 до 14 мрад, а микротвердость - от 9200 до 5000, рис.1,в. Износостойкость при этом имеет максимум, который с увеличением количества хрома смещается в сторону более высоких температур азотирования: для сплава Fe+1%Cr максимум износостойкости соответствует температуре 620°C и составляет $\varepsilon=2,5$, а для сплава Fe+4% Cr - температуре азотирования 660°C и $\varepsilon=3$.

Результаты электронномикроскопических исследований сплавов с 1 и 4% Cr показали существенную разницу в микроскопической и дифракционной картинах сплавов с разным количеством хрома в зависимости от температуры азотирования. Толщина нитридов хрома в сплаве Fe+1%Cr ($t_{аз}=540^\circ$), определенная по микроэлектронограмме, составляет ~ 1,5 нм, в сплаве Fe+4%Cr при этой температуре образуются нитриды размером ~ 3-5 нм. Увеличение температуры до 620-660°C приводит к увеличению размеров нитридов в сплаве Fe+1%Cr до 8-10 нм, а в сплаве Fe+4%Cr - до 11-12 нм, и как отмечалось выше, расстояние между частицами растет, что в результате изменения движения дислокаций облегчает условия деформации при трении и как следствие, повышает износостойкость. Максимальная износостойкость для исследуемых сплавов наблюдается при формировании нитридов легирующих элементов с размером частиц ~ 10 нм, расстояние между которыми составляет

10-15 нм. Аналогичные закономерности наблюдались также при испытании перлитной азотированной стали 38Х2МЮА [1,6].

Рис.1. Влияние количества хрома при $t_{\text{аз}}=540^\circ\text{C}$ (а) и температуры азотирования сплавов Fe+1%Cr (б) и Fe+4%Cr (в) на физическое уширение интерференционной линии (220) α -фазы $\beta_{(220)}$, твердость HV и износостойкость ϵ .

Изменение типа решетки азотируемого сплава меняет механизм структурообразования диффузионной зоны [1]. Поэтому для оптимизации с позиций трибологии технологии азотирования сплавов, имеющих разные типы решетки, необходимым условием является знание характерных особенностей формирования износостойкой структуры в зависимости от состава сплава.

На рис.2,а показано влияние типа нитридообразующего элемента на взаимосвязь характеристик структуры и износостойкости диффузионных слоев сложнолегированных сплавов с аустенитной матрицей ($\text{Fe}+29\%\text{Ni}+\text{X}$, где $\text{X}=\text{Al}, \text{Cr}, \text{Ti}$), азотированных при температуре 540°C . Видно, что структурное состояние матрицы, комплексно оцениваемое физическим уширением интерференционной линии (222) γ -фазы $\beta_{(222)}$, также зависит от типа легирующего элемента. Так, при легировании аустенита титаном наблюдается более значительное уширение ($\beta_{(222)}=50\text{мрад}$) интерференционного максимума γ -фазы в азотированном слое, чем при легировании хромом ($\beta_{(222)}=35\text{ мрад}$). Минимальное изменение физического уширения происходит в азотированном слое сплава, легированного алюминием ($\beta_{(222)}=30\text{ мрад}$). Такое влияние нитридообразующих элементов на структурное состояние матрицы находится в соответствии с их воздействием на уровень твердости и износостойкости слоя, т.е. легирующие элементы, вызывающие большее физическое уширение интерференционной линии (222) γ -фазы $\beta_{(222)}$, обеспечивают более высокий уровень твердости и износостойкости азотированного слоя: для сплава с титаном $\text{HV}=8400$, $\epsilon=1,5$; для сплава с алюминием $\text{HV}=5600$, $\epsilon=0,9$. Аналогичная картина соответствия

физического уширения интерференционной линии (220) α -фазы, твердости и износостойкости наблюдалась для двойных сплавов с ОЦК кристаллической решеткой, легированных Mo, Cr, Al (табл.1).

Рис.2. Влияние типа нитридообразующего элемента при $t_{az}=540^\circ\text{C}$ (а), концентрации хрома при $t_{az}=540^\circ\text{C}$ (б) и температуры азотирования (в) на твердость HV, физическое уширение интерференционной линии (222) γ -фазы $\beta_{(222)}$ и износостойкость ϵ аустенитного сплава Fe+29Ni+4%(Cr-Al-Ti)

Концентрация легирующего элемента также оказывает влияние на исследуемые параметры азотированного слоя (физическое уширение интерференционной линии $\beta_{(222)}$, твердость HV, износостойкость ϵ), рис.2,б. Резкое изменение $\beta_{(222)}$ и HV отмечается при увеличении содержания Cr до 2%, когда образуются зародыши нитридной фазы, когерентные матрице, и при этом реализуется механизм упрочнения за счет областей с максимальными микродеформациями [1]. Дислокации проходят через упруго деформированную матрицу, и зародыши фаз перерезаются. В диапазоне концентраций 2-4%Cr $\beta_{(222)}$ меняется незначительно, Наоборот, износостойкость исследуемых сплавов монотонно возрастает от 0,35 до 1,20 (в 3,4 раза) с увеличением концентрации хрома до 4%. Во всем концентрационном диапазоне значительно возрастает и твердость ($\approx 3,2$ раза), что, очевидно, связано с увеличением количества нитридов хрома. Анализ полученных данных в совокупности с экспериментальными результатами исследования структуры и износостойкости нержавеющей азотированной стали 12X18H10T [8] дают основание высказать предположение, что для сплавов с ГЦК решеткой монотонное повышение твердости и износостойкости исследуемых сплавов связано с количественными характеристиками нитридов хрома и особенностями формирования структурного состояния при азотировании сплавов с ГЦК решеткой. Экспериментальные значения $\beta_{(222)}$, HV, ϵ для

сложнолегированных сплавов с ГЦК матрицей в зависимости от типа легирующего элемента, рис.2,а, и температуры азотирования, рис.2,в а также данные [1] дают основания высказать некоторые представления об особенностях процессов структурообразования в диффузионной зоне сплавов на основе γ -Fe, которые отражаются на уровне износостойкости. Азотирование сплава Fe+29Ni+4%(Cr-Al-Ti) при $t_{аз}=500-720^{\circ}\text{C}$, определение параметров твердости HV и структурного состояния $\beta_{(222)}$ и последующие триботехнические испытания для всего диапазона температуры азотирования выявили общий характер изменения всех указанных параметров, рис.6: в отличие от сплавов на основе α -Fe, зависимости $\beta_{(222)}$, HV и ϵ от температуры азотирования для сплавов на основе γ -Fe изменяются по кривой с единым максимумом, который наблюдается для всех исследуемых величин при $t_{аз}=540^{\circ}\text{C}$, и составляет $\beta_{(222)}=55$ мрад, 8700 HV, $\epsilon=2$. Как показали результаты электронномикроскопического исследования, максимальный уровень износостойкости связан с высокой степенью упрочнения. При повышении температуры азотирования сплавов с ГЦК решеткой наблюдается понижение твердости и износостойкости.

Следовательно, особенность формирования структуры сплавов с γ -матрицей заключается в следующем. В комплекснолегированном сплаве, содержащем титан, хром, алюминий в суммарном количестве ~ 4 ат%, азотированном при низких температурах ($450-500^{\circ}\text{C}$), когда образуются зародыши нитридной фазы, когерентные матрице, основной причиной торможения дислокаций являются, также как в сталях с ферритной основой, поля упругих искажений вокруг нитридных сегрегаций. Однако, на этой стадии состав зародышей далек от состава стабильных нитридных фаз, и прочность таких частиц может быть низкой. Размер когерентных зародышей и расстояние между ними также малы. Поэтому при достижении определенной величины действующих напряжений, превышающей среднее напряжение поля упругих деформаций вокруг зародышей нитридных частиц, дислокации проходят через упруго деформированную матрицу, и зародыши нитридных фаз перерезаются. Повышение величины несоответствия периодов решеток матрицы и нитридов за счет постепенного изменения состава нитридных фаз при сохранении когерентности с матрицей приводит к росту энергии упругой деформации матрицы, что в свою очередь, увеличивает сопротивление движению дислокаций.

По мере изменения размера и состава нитридов, стремящегося к равновесному, прочность их возрастает, и тем труднее они перерезаются дислокациями. При достижении определенной величины несоответствия периодов решеток нитрида и матрицы, происходит частичное нарушение когерентности ($t_{аз}=\sim 500-550^{\circ}\text{C}$) для сплавов Fe+Ni+Ti, Fe+Ni+Cr, Fe+Ni+Cr+Al+Ti [6]; сопротивление движению дислокаций и, следовательно, твердость возрастают, так как упругие искажения матрицы не уменьшаются при появлении полукогерентной границы, а прочность нитридных частиц становится выше. Кроме того, возникающие дислокационные петли тоже вносят вклад в упрочнение. Следовательно, на стадии частичной когерентности твердость азотированного слоя аустенитных сталей постепенно возрастает. Этот процесс происходит вплоть до полного нарушения когерентности.

Образование некогерентной границы приводит к резкому снижению искажений на границе раздела частица-матрица, связанных с несоответствием решеток нитридной фазы и матрицы. Необходимо отметить, что в момент, предшествующий полному нарушению когерентности, плотность дислокаций несоответствия достигает максимального значения. В то же время состав и прочность нитридных частиц максимально приближаются к составу равновесных нитридных фаз. Тем не менее, происходит некоторое снижение сопротивления движению дислокаций и твердости слоя, так как исчезает такой фактор упрочнения, как поля упругих

искажений нитридных частиц, и он будет разным в зависимости от типа легирующего элемента.

Комплексно легированный сплав Fe+Ni+Cr+Al+Ti обладает суммарным эффектом от особенностей формирования структуры и свойств азотированного слоя, связанных с разными легирующими элементами, по-разному изменяющими структурное состояние и по-разному упрочняющими азотированный слой. Как следует из рис.2,а, из исследованных элементов наиболее эффективным упрочнителем является титан, затем следуют хром и алюминий. С помощью рентгеноструктурных исследований установлено, что при температурах азотирования, соответствующих образованию некогерентных нитридных фаз, периоды ГЦК решеток нитридов составляют: в сплавах Fe+Ni+Ti и Fe+Ni+Cr ($t_{аз}=580^{\circ}\text{C}$) - $\sim 0,42$ и $\sim 0,41$ нм соответственно, в сплаве Fe+Ni+Al ($t_{аз}=540^{\circ}\text{C}$) - $\sim 0,39$ нм [1]. Несоответствие периодов решеток нитридной фазы и матрицы в сплаве, легированном титаном, значительно больше, чем в остальных сплавах, поэтому образование нитрида титана создает максимальное искажение решетки матрицы. Плотность дислокаций несоответствия, накопленная к моменту нарушения когерентности, также будет максимальной в сплаве Fe+Ni+Ti. В сплаве Fe+Ni+Al несоответствие решеток нитридной фазы и матрицы имеет минимальное значение, следовательно, искажения матрицы в этом сплаве меньше, чем в остальных.

Прочностные характеристики слоя зависят и от прочности самих нитридных частиц. Нитрид титана является одним из самых твердых нитридов. Его твердость составляет ~ 20000 HV, твердость нитрида хрома 10000 [9].

Из вышеизложенного следует, что максимальное упрочнение при азотировании исследуемых сплавов можно ожидать на стадии, предшествующей полному образованию некогерентных нитридных частиц. Результаты экспериментальных исследований показали, что в сплавах Fe+Ni+Cr+Al+Ti такая стадия зафиксирована после азотирования при температуре $\sim 540^{\circ}\text{C}$, когда образуются мелкодисперсные комплексы нитридной фазы, частично когерентные матрице и достигается максимальное значение твердости диффузионной зоны, рис.2,в. Наблюдаемое при более высоких температурах азотирования уменьшение твердости слоя обусловлено нарушением когерентности решеток нитридной фазы и матрицы.

Таким образом, для сложнолегированных сплавов на основе ГЦК решетки железа формирование структуры и свойств диффузионной зоны при газовом азотировании зависит от нескольких факторов, существование которых связано с разными легирующими элементами: Ni, Cr, Al, Ti. Это прежде всего уровень микродеформации кристаллической решетки матрицы, размеры нитридов и расстояние между ними, несоответствие параметров решеток матрицы и упрочняющих фаз, прочностные характеристики нитридов, степень когерентности с матрицей, механизмы перераспределения дислокаций в процессе упрочнения при азотировании и деформации при триботехнических испытаниях. Каждый из этих факторов влияет на уровень износостойкости, но степень и направление этого влияния определяется как природой легирующего элемента, так и температурой азотирования, оптимальное значение которой с позиций трибологии разное. Дальнейшие исследования по выявлению вклада каждого элемента позволяют открыть новые резервы повышения износостойкости поверхностных азотированных слоев путем оптимизации режимов технологии азотирования с позиций трибологии. Из приведенных выше результатов, на данном этапе исследования, можно лишь сделать вывод, что для анализируемых сложнолегированных сплавов увеличение твердости при азотировании аустенитных сталей создает более износостойкие структурные состояния в отличие от перлитных сталей, для которых твердость не является однозначным критерием износостойкости.

4. Заключение. Для исследованных составов сплавов с α - и γ -основами установлены соответствия между физическим уширением интерференционных линий матрицы, твердостью азотированного слоя и относительной износостойкостью в диапазоне температур азотирования 500-700⁰С. Рассмотрены механизмы структурообразования диффузионной зоны в зависимости от типа решетки и концентрации легирующего элемента. Установлено, что мероприятия, приводящие к увеличению твердости азотированного слоя аустенитных сталей, позволяют создавать более износостойкие поверхностные слои.

Список литературы

- [1] Герасимов С.А. Научные основы разработки технологических процессов азотирования конструкционных легированных сталей, обеспечивающих повышение работоспособности изнашивающихся сопряжений машин. Дисс. докт. техн. наук.- М.: МГТУ им.Н.Э.Баумана, 1997 - 563с.
- [2] Любарский И.М., Палатник Л.С. Металлофизика трения. - М.: Металлургия, 1976. - 176с.
- [3] Куксенова Л.И., Рыбакова Л.М. Рентгеноструктурный и триботехнический методы контроля качества антифрикционных покрытий // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. - 1999. - № 1. - С.19-24.
- [4] Куксенова Л.И., Мичугина М.С. Влияние условий нагрева при азотировании на структуру и износостойкость поверхностных слоев на стали 38Х2МЮА // МиТОМ. - 2008. - № 2. - С.29-34.
- [5] Золотаревский В.С. Механические испытания и свойства металлов. - М.: Металлургия, 1974. - 304с.
- [6] Мичугина М.С. Разработка структурного состояния азотированного слоя конструкционных сталей, ответственного за их износостойкость. Автореферат дисс. канд. техн. наук. - М.: ИМЕТ им.А.А.Байкова, 2008. - 16с.
- [7] Orowan E. Symposium on internal stresses in metals and alloys. – London: Institute of Metals, 1948. – 47 p.
- [8] Герасимов С.А., Гресс М.А., Лаптева В.Г., Мухин Г.Г., Баязитова В.В. Сопротивление изнашиванию газобарических азотированных слоев на стали 12Х18Н10Т // МиТОМ. - 2008.- № 2. - С.34-37.
- [9] Лахтин Ю.М., Силина Н.В. Природа высокой твердости легированного феррита после азотирования // МиТОМ. - 1977. - № 6. - С. 23-31.

Дата поступления: 18 сентября 2019 г.

УДК 531.66+51-74

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОГО УДАРА. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

© Дмитрий Зиновьевич Ямпольский

Общество с ограниченной ответственностью «УДАРМАШ», Москва, Россия

udarmash@mail.ru

Аннотация. Предложен численный метод расчета продольного соударения упругих стержней с закругленными торцами, основанный на решении волновых уравнений с учетом контактного нагружения торцов в соответствии с теорией Герца. Проведены расчеты стержней различной конфигурации и сопоставление результатов с экспериментальными данными. Показано, что погрешность расчета амплитуд напряжений и длительностей ударных импульсов предложенным методом не превышает 10...13 %.

Ключевые слова: удар, стержневые системы, метод расчета, экспериментальные данные, погрешность расчета.

NUMERICAL SIMULATION OF LONGITUDINAL IMPACT. COMPARISON WITH EXPERIMENT

© D.Z. Yampolsky

The limited liability company «UDARMASH», Moscow, Russia

udarmash@mail.ru

Abstract. The numerical calculation method of collision of elastic rods with rounded ends, based on the solution of wave equations subject to contact loading ends in accordance with the Hertz theory, is proposed. Calculations of rods of different configurations and comparison of the results with experimental data are carried out. It is shown that the error of calculation of amplitudes of stresses and durations of shock pulses by the proposed method does not exceed 10...13 %.

Key words: impact, rod systems, calculation method, experimental data, calculation error.

Ударным процессам в стержневых системах посвящено множество аналитических исследований [1-15], основанных на волновой теории Сен-Венана [1]. Из всех работ следует выделить метод расчета ударных напряжений, разработанный в лаборатории удара и вибрации бурильных машин Института горного дела им. А.А.Скочинского (метод ИГД), поскольку он базируется на большом объеме корректно выполненных экспериментов применительно к стальным ударникам и штангам отбойных молотков и перфораторов [9-12]. Мы будем сравнивать наши расчеты с данными этих экспериментов.

Метод ИГД использует идею Сирса [5] о совмещении волновой теории Сен-Венана с теорией контактной упругости Герца [4], что позволяет учесть как общую, так и местную (контактную) деформацию стержней, и дает хорошее совпадение с результатами

эксперимента. Метод позволил установить физические закономерности удара, определить зависимость амплитуды и длительности ударного взаимодействия от скорости соударения, геометрических размеров соударяемых деталей (длины, соотношения диаметров, кривизны торцов), применить полученные решения для исследования процессов ударного разрушения горных пород [13] и способствовал созданию мощных пневматических отбойных молотков и перфораторов со сниженной вибрацией. По результатам этих исследований вышла в свет монография Е.В. Александрова и В.Б. Соколинского "Прикладная теория и расчеты ударных систем" [14].

К сожалению, метод ИГД не получил дальнейшего развития: отчасти из-за существенных математических трудностей при аналитическом решении нелинейных дифференциальных уравнений (даже при расчете соударения относительно несложных по геометрии деталей), отчасти из-за несовершенства измерительной аппаратуры и отсутствия в руках его авторов (60-е годы прошлого века) мощной цифровой вычислительной техники.

Сегодня эти трудности преодолимы: есть прецизионная тензометрическая аппаратура для регистрации ударных процессов [16] и персональные компьютеры для численного решения дифференциальных уравнений [17-18].

Основываясь на идее Сирса [5], построим численный метод моделирования удара.

Рассмотрим схему, показанную на рис. 1. Ударник 1, движущийся поступательно со скоростью v , наносит удар по неподвижной штанге 2 соосно с ней. Длина ударника l , длина штанги L , соударяемые торцы ударника и штанги сферические. Механические свойства ударника и штанги соответственно: плотность ρ_1 и ρ_2 , стержневая скорость звука a_1 и a_2 , модуль Юнга E_1 и E_2 , коэффициент Пуассона μ_1 и μ_2 .

Рис. 1. Схема соударения ударника 1 и штанги 2:

v – поступательная скорость ударника; N – сила контактного взаимодействия;

$0x_1$ и $0x_2$ – оси координат для ударника и штанги

Взаимодействие ударника и штанги считаем упругим. Полагаем, что в процессе удара поперечные сечения стержней остаются плоскими. Движением частиц в поперечном направлении и внутренним трением в стержнях (в силу малой длительности соударения) пренебрегаем.

Тогда волновые уравнения для данной системы запишутся в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{dS_1(x)}{dx} \cdot \frac{1}{S_1(x)} \cdot \frac{du(x, t)}{dx} - \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{dS_2(x)}{dx} \cdot \frac{1}{S_2(x)} \cdot \frac{dw(x, t)}{dx} - \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $u(x, t)$ и $w(x, t)$ – смещения поперечных сечений ударника 1 и штанги 2 в момент времени t (для ударника по оси Ox_1 , для штанги по оси Ox_2 ; с целью удобства описания индексы осей опускаем); x – координата сечения в положении равновесия в начальный момент времени; $S_1(x)$ и $S_2(x)$ – площади поперечных сечений ударника и штанги.

Примем следующие начальные условия соударения (ударник и штанга не возмущены) для ударника:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ u'_t(x, 0) &= v, (v < 0), \\ u'_x(x, 0) &= 0, x \in [0, l]; \end{aligned}$$

для штанги:

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= 0, \\ w'_t(x, 0) &= 0, \\ w'_x(x, 0) &= 0, x \in [0, L]. \end{aligned}$$

Согласно Герцу [4] сила взаимодействия N , возникающая при контакте ударника и штанги, равна

$$N(t) = k|u(0, t) + w(0, t)|^{3/2}, \quad (2)$$

$$k = \frac{4}{3 \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right) \sqrt{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}},$$

где R_1 и R_2 – радиусы сфер соударяемых торцов ударника и штанги соответственно.

Исходя из (2), граничные условия запишем в виде:

для ударника:

$$u'_x(0, t) = -\frac{N(t)}{E_1 S_1(0)}, u'_x(l, t) = 0;$$

для штанги:

$$w'_x(0, t) = -\frac{N(t)}{E_2 S_2(0)}, w'_x(L, t) = 0.$$

Противоположные соударяемым торцы ударника и штанги свободны от напряжений.

Для построения численного решения системы (1) примем расчетную сетку с шагом по длине стержней Δx и по времени Δt :

$$u_{i,j} = u(i\Delta x, j\Delta t), S_{1,i} = S_1(i\Delta x), i = 0, \dots, n, n = \frac{l}{\Delta x}, j = 0, 1, 2, \dots$$

$$w_{q,j} = w(q\Delta x, j\Delta t), S_{2,q} = S_2(q\Delta x), q = 0, \dots, m, m = \frac{L}{\Delta x}, j = 0, 1, 2, \dots$$

Заменяя производные конечными разностями, получаем уравнения:

$$\begin{cases} u_{i,j+1} = \lambda_1^2 [u_{i+1,j} + u_{i-1,j}] + 2(1 - \lambda_1^2)u_{i,j} + \lambda_1^2 \left[\frac{S_{1,i+1}}{S_{1,i}} - 1 \right] (u_{i+1,j} - u_{i,j}), \\ w_{q,j+1} = \lambda_2^2 [w_{q+1,j} + w_{q-1,j}] + 2(1 - \lambda_2^2)w_{q,j} + \lambda_2^2 \left[\frac{S_{2,q+1}}{S_{2,q}} - 1 \right] (w_{q+1,j} - w_{q,j}), \end{cases} \quad (3)$$

где $\lambda_1 = a_1 \Delta t / \Delta x$, $\lambda_2 = a_2 \Delta t / \Delta x$.

Начальные и граничные условия, соответственно, преобразуются к виду:

$$u_{i,0} = 0, \quad u_{i,1} = u_{i,0} + v \Delta t, \quad u_{n,j} = u_{n-1,j}, \quad (4)$$

$$w_{q,0} = 0, \quad w_{q,1} = 0, \quad w_{m,j} = w_{m-1,j}. \quad (5)$$

Соотношения (4) – (5) задают первый шаг итерации по времени.

Второй и последующие шаги по времени выполним следующим образом.

По формулам (3) и (5) последовательно рассчитываем значения $u_{i,j+1}$ и $w_{q,j+1}$ для всех узлов сетки по длине ударника и штанги, кроме нулевых узлов. Значения $u_{0,j+1}$ и $w_{0,j+1}$ в нулевых узлах получаем из нелинейной системы уравнений:

$$\begin{cases} u_{0,j+1} = u_{1,j} - \Delta x \frac{k}{E_1 S_{1,0}} |u_{0,j+1} + w_{0,j+1}|^{3/2}, \\ w_{0,j+1} = w_{1,j} - \Delta x \frac{k}{E_2 S_{2,0}} |u_{0,j+1} + w_{0,j+1}|^{3/2}, \end{cases}$$

которая решается методом последовательных приближений Зайделя [19].

Но более предпочтителен, на наш взгляд, способ, основанный на использовании закона сохранения количества движения.

В рассматриваемой физической системе (см. рис. 1) единственная сила, изменяющая импульс ударника и штанги, это контактная сила N . Поэтому для временного интервала Δt можно записать:

$$N(t) \Delta t = P_{1,j+1} - P_{1,j}, \quad (6)$$

$$N(t) \Delta t = P_{2,j+1} - P_{2,j},$$

где

$$P_{1,j} = \rho_1 \int_0^l S_1(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx, \quad P_{1,j+1} = \rho_1 \int_0^l S_1(x) \frac{\partial u(x,t + \Delta t)}{\partial t} dx,$$

$$P_{2,j} = \rho_2 \int_0^L S_2(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} dx, \quad P_{2,j+1} = \rho_2 \int_0^L S_2(x) \frac{\partial w(x,t + \Delta t)}{\partial t} dx -$$

количества движения ударника и штанги в моменты времени t и $t + \Delta t$ соответственно.

При численном интегрировании используем метод Симпсона. Интегралы $P_{1,j}$ и $P_{2,j}$ вычисляем по значениям $u_{i,j}$ и $w_{q,j}$, полученным в результате предыдущей итерации. А при

вычислении интегралов $P_{1,j+1}$ и $P_{2,j+1}$ применяем следующий прием: поскольку в интегралы входят неизвестные смещения нулевых узлов, заменим их нулевыми значениями и вместо интеграла $P_{1,j+1}$ получим интеграл $\bar{P}_{1,j+1}$, а вместо интеграла $P_{2,j+1}$ – интеграл $\bar{P}_{2,j+1}$. Тогда, согласно формуле Симпсона, искомые значения $u_{0,j+1}$ и $w_{0,j+1}$ будут равны:

$$\begin{aligned} u_{0,j+1} &= u_{0,j} + \frac{3\Delta t}{\rho_1 S_{1,0} \Delta x} \left[P_{1,j} - \bar{P}_{1,j+1} + k\Delta t |u_{0,j} + w_{0,j}|^{3/2} \right], \\ w_{0,j+1} &= w_{0,j} + \frac{3\Delta t}{\rho_2 S_{2,0} \Delta x} \left[P_{2,j} - \bar{P}_{2,j+1} + k\Delta t |u_{0,j} + w_{0,j}|^{3/2} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение, полученное таким способом, позволяет с высокой точностью удовлетворить требованиям законов сохранения количества движения и энергии данной физической системы.

По результатам очередной итерации рассчитываем напряжения в ударнике $\sigma_1(x, t)$ и в штанге $\sigma_2(x, t)$:

$$\sigma_1(x, t) = E_1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad \sigma_2(x, t) = E_2 \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}. \quad (8)$$

Критерий окончания удара – разрыв контакта ударника со штангой: $u_{0,j} + w_{0,j} > 0$.

Известно, что численные решения волновых уравнений, и, соответственно, системы (1), устойчивы при $\lambda_1 < 1$ и $\lambda_2 < 1$ [17-18]. Устойчивость изложенного метода расчета ударного процесса обеспечивается при более жестких условиях: $\lambda_1 < 0,75$ и $\lambda_2 < 0,75$.

Для вычислений по формулам (2) – (8) была написана программа для ПЭВМ, моделирующая удар с помощью численного эксперимента. Программа позволяет проследить во времени изменение состояния ударника и штанги: смещение сечений, скоростей и напряжений в этих сечениях.

Перейдем к расчетам и сравнению их с экспериментальными данными.

Рассмотрим несколько примеров соударения стержней, выполненных из инструментальной стали. Нас будут интересовать импульсы ударных напряжений в штанге, их форма, амплитуда и длительность, количество движения и энергия, а также скорость и коэффициент отскока ударника.

Пример 1. Соударение цилиндров равного диаметра.

В работе [10] исследуется соударение ударника и штанги, имеющих цилиндрическую форму, равное и постоянное по длине поперечное сечение диаметром 34 мм. Длина ударника $l = 200$ мм, его масса $m = 1,426$ кг. Штанга считается полубесконечной¹ (для расчета выбираем $L = 1000$ мм). Радиус соударяемого торца ударника $R_1 = 400$ мм, соударяемый торец штанги плоский (в расчетах принимаем $R_2 = 10000$ мм). Скорость ударника перед ударом $v = 5$ м/с.

Упругие характеристики ударника и штанги:

$$\rho_1 = \rho_2 = 7845 \text{ кг/м}^3, \quad E_1 = E_2 = 196 \text{ ГПа}, \quad a_1 = a_2 = 5000 \text{ м/с}, \quad \mu_1 = \mu_2 = 0,3.$$

¹ Длина штанги выбирается такой, чтобы отраженная от ее противоположного конца ударная волна не влияла на прямой ударный импульс.

Параметры расчетной сетки: $\Delta x = 0,1$ мм; $\Delta t = 0,01$ мкс.

На рис. 2 представлен экран разработанной программы. Слева показаны диаграммы состояния штанги, справа – ударника. Эпюры смещений, скорости и напряжений в поперечных сечениях деталей соответствуют моменту времени завершения удара $t = 175,6$ мкс.

Рис. 2. Волновые процессы в штанге (слева) и ударнике (справа) в момент завершения удара

В нижней части экрана представлены: исходные данные для расчета, текущие параметры ударника и штанги (количество движения P_y и $P_{ш}$, кинетическая и потенциальная энергия (K_y , P_y и $K_{ш}$, $P_{ш}$), результаты расчета удара и параметры ударного импульса.

На рис. 3 показаны экспериментальный и расчетные импульсы напряжений в штанге² при различных радиусах соударяемого торца ударника R_1 .

Экспериментальной кривой 1 (красный пунктир) соответствует расчетная кривая 2. Обе кривые достигают Сен-Венановского уровня напряжений $\sigma_{св} = 5 \cdot 10^{-7} E_2 v / a_2 = 98,1$ МПа) и имеют примерно одинаковую длительность ударного импульса. Кривые практически совпадают в интервале $t = 0 \dots 20$ мкс, но далее темп возрастания напряжений у расчетной кривой ниже: разница в интервале $t = 20 \dots 60$ мкс достигает 9 %. Аналогично наблюдается совпадение кривых в интервале $t = 60 \dots 100$ мкс и снижение темпа на спаде расчетного импульса по сравнению с экспериментом в интервале $t = 100 \dots 178$ мкс.

Из практики испытаний ударных машин известно, что при ударе происходит расклеп торца ударника³ и изменение его кривизны. Следует также отметить, что на диаметре 34 мм

² Ударные напряжения принято отображать: сжатие со знаком «+», растяжение со знаком «-».

достаточно сложно изготовить радиус 400 мм: его трудно отличить от радиуса 500 мм или радиуса 600 мм.

Рис. 3. Напряжения в штанге при различных радиусах кривизны торца ударника R_1 :
 1 – эксперимент; расчетные кривые: 2 – 400 мм, 3 – 500 мм, 4 – 600 мм, 5 – 800 мм;
 6 – максимальный уровень напряжений по Сен-Венану; 7 – чертеж ударника;
 8 – экспериментальный и расчетные ударные импульсы, представленные в работе [10]

Поэтому мы дополнительно провели расчеты для ударников с увеличенным радиусом соударяемого торца⁴. На рис. 3 дополнительно показаны: кривая 3, соответствующая $R_1 = 500$ мм, кривая 4 для $R_1 = 600$ мм и кривая 5 для $R_1 = 800$ мм.

Сравнение кривых проводилось по параметрам ударных импульсов. Параметры расчетных импульсов получены из программы в момент завершения удара (см. рис. 1), а параметры экспериментального импульса рассчитывались по следующим формулам:

количество движения импульса P , Н·с,

$$P = S_{2,0} \int_0^T \sigma(t) dt, \quad (9)$$

энергия ударного импульса W , Дж,

³ Пластические деформации торца ударника возникают из-за малой площади контактной площадки, на которой действуют значительные по величине контактные напряжения.

⁴ Радиусы менее 400 мм не рассматривались, т.к. с уменьшением радиуса растет длительность удара [14].

$$W = \frac{a_2 S_{2,0}}{E_2} \int_0^T \sigma^2(t) dt, \quad (10)$$

где T – длительность удара, с; $\sigma(t)$ – зарегистрированное напряжение в штанге, Па.

Скорость отскока ударника v_0 , м/с, и коэффициент отскока k определялись из соотношений

$$v_0 = \frac{P}{m} - v, \quad k = \left| \frac{v_0}{v} \right|. \quad (11)$$

Средняя квадратичная погрешность δ_p расчетного импульса напряжения $\sigma_p(t)$ по сравнению с экспериментальным импульсом вычислялась по формуле

$$\delta_p = 100 \sqrt{\frac{\int_0^{T^*} (\sigma_p(t) - \sigma(t))^2 dt}{\int_0^{T^*} \sigma^2(t) dt}}, \quad (12)$$

где $T^* = \max\{T, T_p\}$ – длительность наиболее продолжительного импульса: расчетного – T_p или экспериментального – T ; соответствующие ординаты меньшего по длительности импульса при этом заменялись нулевыми значениями.

Результаты расчетов по формулам (9) – (12) представлены в Таблице 1.

Таблица 1.

Расчетные и экспериментальные параметры ударных импульсов

Параметры ударного импульса	Эксперимент	Расчет							
		$R_1 = 400$ мм		$R_1 = 500$ мм		$R_1 = 600$ мм		$R_1 = 800$ мм	
		Значение	Погрешность, %	Значение	Погрешность, %	Значение	Погрешность, %	Значение	Погрешность, %
Длительность удара, мкс	176,0	177,8	1,0 %	175,6	0,2 %	174,1	-1,1 %	172,0	-2,3 %
Максимальное напряжение, МПа	97,7	97,6	-0,1 %	97,8	0,1 %	97,9	0,2 %	98,0	0,3 %
Количество движения, Н·м	8,57	8,62	0,6 %	8,54	-0,3 %	8,55	-1,0 %	8,39	-2,1 %
Энергия ударного импульса, Дж	17,4	16,9	-3,0 %	17,0	-2,6 %	17,0	-2,4 %	17,1	-2,0 %
Скорость отскока, м/с	1,01	1,05	4,0 %	1,00	-1,3 %	0,95	-5,6 %	0,89	11,9 %
Коэффициент отскока	0,202	0,210	4,0 %	0,199	-1,3 %	0,191	-5,6 %	0,191	-11,9 %
Средняя квадратичная погрешность, %			5,1 %		2,7 %		3,3 %		6,8 %

Наиболее близкой к экспериментальной кривой 1 оказалась кривая 3, соответствующая ударнику с радиусом торца $R_1 = 500$ мм, средняя квадратичная погрешность которой составила 2,7 %. Можно предположить, что истинный радиус торца ударника в эксперименте был не 400 мм, а 500 мм.

Тем не менее, в интервале 28...58 мкс разница в ординатах экспериментальной и расчетной кривой 3 достигает 4...5 %: экспериментальная кривая проходит выше и имеет более длинную горизонтальную площадку, соответствующую Сен-Венановскому уровню напряжений.

Следует отметить, что представленные в работе [10] расчеты этого соударения, выполненные по методу Сирса [5] и по методу ИГД ($\Delta t = 5$ мкс), также дают хорошее совпадение с результатом эксперимента (см. графики на рис. 3 внизу, поз. 8), но и на этих графиках наблюдаются аналогичные расхождения с экспериментальной кривой.

Пример 2. Штанга и ударник цилиндрической формы и одинакового диаметра, радиус соударяемого торца ударника равен половине диаметра.

В работах [9, 11] представлены расчетные и экспериментальные данные такого соударения со следующими исходными данными: диаметр ударника и штанги 35 мм; длина ударника $l = 200$ мм; его масса $m = 1,429$ кг; радиус торца $R_1 = 17,5$ мм; скорость ударника перед ударом $v = 5$ м/с; длина штанги $L = 1500$ мм; соударяемый торец штанги плоский ($R_2 = 10000$ мм).

Упругие характеристики ударника и штанги:

$$\rho_1 = \rho_2 = 7650 \text{ кг/м}^3, E_1 = E_2 = 211 \text{ ГПа}, a_1 = a_2 = 5250 \text{ м/с}, \mu_1 = \mu_2 = 0,3.$$

Рис. 4. Эквивалентная схема расчетной модели: 1 – ударник; 2 – штанга; 3 – нелинейная пружина; l^* – эквивалентная длина ударника

Эквивалентная схема модели (1) – (8) показана на рис. 4. В ней соударяемые сферические торцы ударника 1 и штанги 2 заменены нелинейной пружинной 3.

В предыдущем примере масса, заключенная в сферическом торце ударника, равнялась 5 г, т.е. была пренебрежимо мала по сравнению с массой ударника 1,426 кг. В рассматриваемом примере масса сферического торца ударника 88 г, что составляет 6 % от массы ударника. Возникает вопрос, можно ли ей пренебречь в расчетах ударного импульса?

Для ответа на этот вопрос были предложены следующие варианты расчета:

- вариант 1: ударник длиной $l^* = l = 200$ мм;
- вариант 2: ударник длиной $l^* = 194,2$ мм – сфера заменена эквивалентным по объему цилиндром диаметром 35 мм;
- вариант 3: ударник длиной $l^* = 182,5$ мм – масса сферы не учитывается;
- вариант 4: сфера заменяется на эквивалентный по объему конус ($l^* = 200$ мм, диаметр соударяемого торца конуса равен 10,6 мм).

Результаты расчетов представлены на рис. 5 и в Таблице 2.

Рис. 5. Ударные импульсы при различных вариантах расчета:

1 – эксперимент; 2 – вариант 1 ($l^* = 200$ мм); 3 – вариант 2 ($l^* = 194,2$ мм);

4 – вариант 3 ($l^* = 182,5$ мм); 5 – вариант 4 (конус вместо сферы $l^* = 200$ мм, диаметр торца 10,63 мм);

6 – экспериментальная осциллограмма (N – сила в кгс; $T = 2l/a_1 = 23$ мкс – период собственных колебаний ударника; T_m – время достижения максимума 93 мкс; $N_m = 7950$ кгс)

Таблица 2.

Параметры ударных импульсов при различных вариантах расчета

Варианты расчета		Вариант 1 200 мм		Вариант 2 194,2 мм		Вариант 3 182,5 мм		Вариант 4 Конус вместо сферы	
Параметр	Экспе- римент	Значе- ние	Погреш- ность, %	Значе- ние	Погреш- ность, %	Значе- ние	Погреш- ность, %	Значе- ние	Погреш- ность, %
Масса ударника, кг	1,429	1,472	3,0 %	1,429	0,0 %	1,343	6,0 %	1,429	0,0 %
Амплитуда, МПа	80,4	81,6	1,5 %	80,7	0,4 %	78,8	1,9 %	79,8	-0,8 %
Время дости- жения мак- симума, мкс	95,0	96,3	1,4 %	94,8	-0,2 %	92,6	2,6 %	95,8	0,8 %
Длительность удара, мкс	225,0	249,5	10,9 %	245,3	9,0 %	236,6	5,2 %	247,5	10,0 %
Скорость отскока, м/с	2,12	1,98	-6,2 %	2,01	-4,8 %	2,07	1,9 %	2,04	-3,5 %
Коэффициент отскока	0,423	0,397	-6,2 %	0,403	-4,8 %	0,415	1,9 %	0,408	-3,5 %

Количество движения, Н·с	9,26	10,3	11,0 %	10,0	8,2 %	9,50	2,6 %	10,1	8,6 %
Энергия импульса, Дж	13,7	15,5	13,1 %	15,0	9,2 %	13,9	1,4 %	14,9	8,6 %
Ср. квадратичная погрешность, %			12,7 %		10,0 %		4,9 %		11,6 %

Наиболее близкой по параметрам ударного импульса и коэффициенту отскока ударника оказалась кривая 3, соответствующая варианту 4. Ее средняя квадратичная погрешность составила 4,9 %, а коэффициент отскока ударника отличается от эксперимента всего на 1,9 %.

Таким образом, в данном рассматриваемом примере оправдано пренебречь массой, заключенной в сферическом торце ударника, чтобы получить результат расчета, близкий к экспериментальным данным.

Пример 3. Соударение штанги с ударником большего поперечного сечения.

Стальной ударник длиной $l = 200$ мм и диаметром 64 мм, имеющий постоянное поперечное сечение, ударяет по стальной штанге диаметром 33,5 мм со скоростью $v = 5$ м/с. Масса ударника 5,048 кг. Радиус соударяемого торца ударника $R_1 = 300$ мм; торец штанги плоский. Длина штанги $L = 1500$ мм. Упругие параметры ударника и штанги соответствуют примеру 1.

Эксперимент описан в работе [14], рис.53.

На рис. 6 показаны ударные импульсы напряжения в штанге: экспериментальный 1 и расчетный 2. Поскольку в данной работе не указан уровень амплитуды зарегистрированного импульса, мы предположили, что он равен расчетному значению 149,5 МПа и совместили ударные импульсы так, чтобы их максимальные значения совпали.

Параметры совмещенных таким образом ударных импульсов приведены в Таблице 3.

Экспериментальный и расчетный импульсы различаются: по количеству движения на 3,0 %, по энергии – на 1,1 %, при этом средняя квадратичная погрешность расчетного импульса не превышает 5,0 %.

При достаточно длинной (полубесконечной) штанге ударный импульс имеет практически бесконечную длительность, и отскок ударника отсутствует [14]. При конечной длине штанги отскок ударника происходит по приходу отраженной волны: в данном случае примерно через $t = 2L/a_2 = 400$ мкс. Радиус на торце ударника увеличивает длительность соударения: согласно расчету она составляет 419,1 мкс.

Таблица 3.

Сравнение ударных импульсов при диаметре ударника в два раза большем диаметра штанги

Параметры ударного импульса	Эксперимент	Расчет $R_1 = 300$ мм	
		Значение	Погрешность, %
Длительность удара, мкс	-	419,1	-
Максимальное напряжение, МПа	149,5	149,5	-
Количество движения, Н·м	24,1	24,8	3,0 %
Скорость отскока, м/с	-	0,084	-
Коэффициент отскока	-	0,017	-
Энергия ударного импульса, Дж	62,4	63,1	1,1 %
Средняя квадратичная погрешность, %	-	-	5,0 %

Рис. 6. Напряжения в штанге: диаметр ударника в два раза больше диаметра штанги:
 1 – эксперимент; 2 – расчет; 3 – максимальный уровень напряжений по Сен-Венану 154 МПа⁵;
 4 – размеры деталей; 5 – экспериментальная осциллограмма

Пример 4. Соударение штанги со ступенчатым ударником.

Стальной ступенчатый ударник длиной $l = 210$ мм наносит удар по стальной штанге длиной $L = 1000$ мм со скоростью 5 м/с. Первая ступень ударника имеет длину 140 мм, ее диаметр 34 мм; вторая ступень ударника длиной 70 мм и диаметром 67 мм. Масса ударника 2,922 кг. Штанга, как и первая ступень ударника, имеет диаметр 34 мм. Радиус соударяемого торца ударника $R_1 = 300$ мм, торец штанги плоский.

Упругие параметры ударника и штанги соответствуют примеру 1.

На рис. 7 показана экспериментальная осциллограмма напряжений в штанге 1 и расчетный ударный импульс 2. Экспериментальная осциллограмма взята из работы [14], рис. 27. Теоретический уровень напряжений первой ступени 97 МПа показан прямой 3, а максимальный теоретический уровень напряжений 154 МПа – прямой 4⁶. Как и в примере 2, максимальные амплитуды импульсов были совмещены.

Хорошее совпадение расчетного и экспериментального ударных импульсов наблюдается в интервале 0...145 мкс, далее импульсы расходятся. Длительность экспериментального импульса составляет 330,5 мкс, длительность расчетного – 302,9 мкс.

Сопоставление параметров ударных импульсов приведено в Таблице 4.

⁵ Уровень напряжений по Сен-Венану $\sigma_{\text{СВ}}$, МПа, рассчитан по формуле: $\sigma_{\text{СВ}} = 10^{-6} v \rho_2 a_2 S_1 S_2 / (S_1 + S_2)$.

⁶ Уровень первой ступени σ_I , МПа, равен $\sigma_I = 10^{-6} E_2 v / (2a_2)$; а уровень второй ступени σ_{II} , МПа, $\sigma_{II} = \sigma_I (1 + (S_{II} - S_I) / (S_{II} \cdot S_I))$, где S_I , S_{II} – площади поперечных сечений первой и второй ступени.

Рис. 7. Напряжения в штанге при соударении со ступенчатым ударником:
 1 – эксперимент; 2 – расчет; 3 – теоретический уровень напряжений 1-ой ступени; 4 – теоретический максимальный уровень напряжений; 5 – размеры деталей; 6 – экспериментальная осциллограмма

Таблица 4.

Сравнение ударных импульсов при ступенчатом ударнике

Параметры ударного импульса	Экспери- мент	Расчет $R_1 = 300$ мм	
		Значение	Погрешность, %
Длительность удара, мкс	330,5	305,5	-9,1 %
Максимальное напряжение, МПа	132,0	132,0	-
Количество движения, Н*м	17,0	16,5	-3,1 %
Энергия ударного импульса, Дж	35,6	36,1	2,6 %
Скорость отскока, м/с	0,69	0,53	-23,2 %
Коэффициент отскока	0,138	0,106	-23,2 %
Средняя квадратичная погрешность, %	-	-	11,5 %

Несмотря на значительную погрешность в определении скорости и коэффициента отскока ударника (23,2 %), расчет дает удовлетворительное приближение по интегральным параметрам ударного импульса – энергии и количеству движения, погрешность которых не превышает 3,1 %.

Средняя квадратичная погрешность расчета 11,5 % также достаточно велика по сравнению с предыдущими примерами, но основной вклад в нее вносят низкие напряжения, находящиеся в «хвосте» ударного импульса, которые не имеют существенного практического значения.

Пример 5. Соударение штанги со ступенчатым ударником: диаметр штанги меньше диаметра первой ступени ударника (эксперимент Арнда)

Данный пример представлен в работах [2, 10]. Его особенность состоит в том, что многократное отражение волн происходит не только от границ сопряжения ступеней ударника, но и от границы «ударник-штанга».

Исходные данные для расчета: длина ударника $L = 210$ мм, размеры первой ступени: диаметр 35 мм, длина 140 мм; размеры второй ступени: диаметр 70 мм, длина 70 мм; радиус соударяемого торца ударника $R_1 = 400$ мм; масса ударника $m = 3,091$ кг; диаметр штанги 25 мм, длина штанги 1500 мм; радиус торца штанги плоский ($R_2 = 10000$ мм). Упругие характеристики ударника и штанги аналогичны примеру 2.

Экспериментальные и расчетные импульсы напряжений в штанге представлены на рис. 8. Поскольку ударный импульс достаточно длинный, в эксперименте была зарегистрирована только его часть длительностью 240 мкс. Дополнительно мы привели расчет для ударника с «практически плоским» торцом (радиус $R_1 = 1000$ мм).

Экспериментальная кривая 1 имеет широкий максимум в интервале 55...105 мкс с резкими фронтами возрастания и спада напряжений. Расчетные кривые 2 ($R_1 = 400$ мм) и 3 ($R_1 = 1000$ мм) имеют более острые максимумы, которые расположены ниже экспериментальной кривой: их амплитуды отличаются, соответственно, на 4,5 % и 0,7 %, а время достижения максимума – на 6,3 % и 2,5 %. Сравнение ударных импульсов представлено в Таблице 5.

За исключением интервала 55...90 мкс (зона максимума), обе расчетные кривые проходят выше экспериментальной кривой. Средняя квадратичная погрешность расчетной кривой 1 составила 13,0 %, а кривой 2 – 9,7 %.

Таблица 5.

Сравнение ударных импульсов – эксперимент Арнда

Параметры ударного импульса	Эксперимент	Расчет $R_1 = 400$ мм		Расчет $R_1 = 1000$ мм	
		Значение	Погрешность, %	Значение	Погрешность, %
Максимальное напряжение, МПа	228	218	-4,5 %	226	-0,7 %
Время достижения максимального напряжения, мкс	80,0	85	6,3 %	82	2,5 %
Количество движения части импульса, Н с	14,65	16,05	9,5 %	16,02	9,4 %
Энергия части ударного импульса, Дж	53,1	58,9	10,9 %	59,1	11,2 %
Средняя квадратичная погрешность, %	-	-	13,0 %	-	9,7 %

Рис. 8. Расчеты по эксперименту Арндта:

1 – эксперимент; 2 – расчет при $R_1 = 400$ мм; 3 – расчет при $R_1 = 1000$ мм;
 4 – теоретический уровень напряжений 1 ступени 164 МПа; 5 – теоретический уровень
 максимальных напряжений 228 МПа; 6 – размеры соударяемых деталей; 7 –
 экспериментальная осциллограмма
 и расчет по методу ИГД (показан желтым цветом, $\Delta t = 2,7$ мкс)

При резких изменениях сечений в ударной системе на формирование ударного импульса существенное влияние оказывают поперечные волны, которые в рамках предлагаемой модели не рассматриваются. Этим, по-видимому, объясняются расхождения в параметрах экспериментального ударного импульса и расчетных импульсов напряжений.

Следует отметить, что в данном случае метод ИГД дает лучшее приближение к экспериментальной кривой (см. поз. 7 на рис. 8) по сравнению с нашими расчетами, в частности вершина ударного импульса имеет более широкий и плоский максимум, а ее амплитуда практически совпадает с экспериментальной кривой.

Пример 6. Соударение ступенчатого ударника с пикой, имеющей бурт.

Рассмотрим соударение ударника пневматического отбойного молотка МО-2Б⁷ производства ОАО «Томский электромеханический завод им. В.В. Вахрушева с измерительной пикой, имеющей бурт. Схема ударной системы показана на рис. 9. Как и в предыдущем примере, ударник имеет ступенчатую форму, но сопряжение между ступенями выполнено в виде конуса. Измерительная пика аналогична рекомендуемой в ГОСТ 55162 –

⁷ Молотки МО-2Б и МОП-2 (производитель ООО «ТоМаш») – наиболее распространенные модели, массово используемые в строительстве и горном деле. Они имеют практически одинаковые ударники.

Особенность данного примера в том, что, измерительная пика имеет бурт, от которого происходит частичное отражение ударной волны; соответственно ударный импульс до и после бурта пика отличается по форме и по амплитуде. Кроме того, поскольку длина ударника 85 мм сопоставима с длиной тензорезистора 30 мм, то последний также вносит искажения в форму наблюдаемого ударного импульса⁸.

Итак, ступенчатый ударник 1 с коническим сопряжением ступеней, длиной 85 мм (см. рис. 6) и массой 430 г⁹, движущийся со скоростью $v = 13,27$ м/с ударяет по неподвижной измерительной пики длиной 340 мм. Соударяемый радиус ударника $R_1 = 350$ мм, соударяемый торец пики плоский. Обе детали изготовлены из стали марки У8А, соответственно, упругие параметры ударника и измерительной пики равны [21]:

$$\rho_1=\rho_2=7830 \text{ кг/м}^3; E_1=E_2=209 \text{ ГПа}; a_1=a_2=5166 \text{ м/с}; \mu_1=\mu_2=0,29.$$

$$\varepsilon_{\text{d}}(t) = \frac{\int_0^H \sqrt{\left[1 + \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]^2 + \frac{\mu_2^2 D^2}{4} \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right]^2} dx}{H} - 1, \quad (13)$$

⁹ В программе масса ударника вычисляется, исходя из его геометрических размеров. Она равна 438 г.

На рис. 10 показаны расчетные ударные импульсы в рассматриваемой ударной системе: в хвостовике измерительной пики до ее бурта – кривая 1 и в теле пики после бурта – кривая 2, которая получена с использованием формулы (13).

Рис. 10. Расчетные ударные импульсы молотка МО-2Б:

1 – в хвостовике измерительной пики до ее бурта;

2 – в теле измерительной пики за буртом (имитация сигнала с тензодатчика)

Как и предполагалось, форма ударного импульса за буртом (кривая 2), искажена. Наблюдается запаздывание амплитуд напряжений на 3...5 мкс. Максимальный уровень напряжений в хвостовике пики составляет 336,5 МПа, в то время как тензодатчик показывает 300,0 МПа, т.е. на 10,8 % меньше. Длительность ударного импульса согласно кривой 1 составляет 90,5 мкс, а длительность импульса по тензодатчику (кривая 2) – 86,9 мкс. Различие связано с тем, что отраженная от противоположного торца измерительной пики волна растяжения приходит к датчику через 83,2 мкс, и она «обрезает» конец ударного импульса.

К соударяемому торцу пики отраженная волна приходит через 131,6 мкс, т.е. отскок ударника происходит раньше прихода отраженной волны, и ударник ничего «не знает» об условиях на противоположном конце пики. Поэтому в данном случае скорость и коэффициент отскока ударника не зависят от свойств материала, на который опиралась бы измерительная пика.

На рис. 11 показан экспериментальный ударный импульс молотка МО-2Б (средний за 100 рабочих циклов) – кривая 1¹⁰ и расчетный ударный импульс – кривая 2, соответствующая деформации тензодатчика.

¹⁰ Оцифровка экспериментального ударного импульса получена по методике аттестации измерительной пики, изложенной в работе [22].

Рис. 11. Ударные импульсы напряжения в измерительной пике, регистрируемые тензодатчиком: 1 – экспериментальный; 2 – расчетный

Таблица 6.

Сравнение ударных импульсов молотка МО-2Б

Параметры ударного импульса	Эксперимент	Расчет $R_1 = 350$ мм	
		Значение	Погрешность, %
Длительность удара, мкс	80,7	86,9	7,7 %
Максимальное напряжение, МПа	315,0	300,0	-4,8 %
Время достижения максимальной амплитуды импульса, мкс	36,3	37,2	2,5 %
Количество движения, Н*м	6,62	6,82	2,9 %
Скорость отскока, м/с	2,12 ¹¹	2,32	9,4 %
Коэффициент отскока	0,160	0,174	9,4 %
Энергия ударного импульса, Дж ¹²	36,9	35,5	-0,4 %
Средняя квадратичная погрешность, %	-	-	6,7 %

¹¹ Скорость отскока ударника определена на градуировочном стенде «СГУ-3».

¹² Поскольку борт измерительной пике и тензодатчик «искажают» ударный импульс, расчет энергии по формуле 8 не совсем корректен.

У работавшего ударника радиус соударяемого торца близок к 300 мм [11]. Выбор радиуса 350 мм был продиктован оптимизацией результатов расчета: мы сочли рациональным получить удовлетворительную погрешность по амплитуде, времени ее достижения и количеству движения импульса, погрешность которых не превысила 5 %; при этом коэффициент отскока ударника оказался несколько завышенным – 9,4 %, а средняя квадратичная погрешность составила 6,7 %. Расчетная длительность ударного импульса оказалась больше на 7,7 %.

Сравнение импульсов представлено в Таблице 6.

На рис. 12 показаны экспериментальный и расчетный ударные импульсы отбойного молотка МО-2Б при «практически плоских» соударяемых торцах ударника и измерительной пики. Скорость ударника $v = 14,20$ м/с, его масса 438 г. Как и в предыдущем случае, рассматривались деформации, регистрируемые тензодатчиком.

Поскольку определить радиус «плоского» торца ударника на диаметре 24 мм весьма сложно, мы подбирали его значение так, чтобы минимизировать расхождение расчетов с данными эксперимента. Представленные ниже кривые соответствуют: $R_1 = 3000$ мм и $R_2 = 10000$ мм.

Рис. 12. Ударные импульсы молотка МО-2Б
при «практически плоских» торцах ударника и измерительной пики:
1 – экспериментальный; 2 – расчетный

Из графиков следует, что даже при высокой скорости соударения¹³ и плоских торцах соударяемых стержней фронты возрастания и спада напряжений имеют конечную величину. Экспериментальный и расчетный импульс похожи по форме: максимальные напряжения различаются на 3,5 %, длительности импульсов практически совпадают (отличие на 1,2 %); кривые имеют характерные горизонтальные площадки в интервалах 50...60 мкс и 74...84 мкс.

¹³ Предел пропорциональности между напряжением и деформацией для стали достигается при скоростях порядка 20 м/с.

Различия в форме пиков импульсов могут быть связаны с наличием изгибных напряжений, т.к. при плоских торцах обеспечить центральность удара практически невозможно.

Среднеквадратичная погрешность расчетного импульса по сравнению с экспериментом составила 9,1 %. Сравнение ударных импульсов приведено в Таблице 7.

Таблица 7.

Сравнение ударных импульсов при «практически плоских» соударяемых торцах ударника и измерительной пики

Параметры ударного импульса	Эксперимент	Расчет $R_1 = 3000$ мм	
		Значение	Погрешность, %
Длительность удара, мкс	83,8	84,5	1,2 %
Максимальное напряжение, МПа	339,0	350,8	3,5 %
Время достижения максимальной амплитуды импульса, мкс	32,5	28,9	11,1 %
Количество движения, Н·с	6,87	6,50	5,5 %
Энергия ударного импульса, Дж	38,3	41,4	7,5 %
Скорость отскока, м/с	1,48	1,59	7,7 %
Коэффициент отскока	0,104	0,112	7,7 %
Средняя квадратичная погрешность, %	-	-	9,1 %

Выводы. Проведенные расчеты показали, что для стальных стержней с закругленными торцами на основе волновой теории Сен-Венана с учетом контактных взаимодействий по Герцу можно построить численную модель продольного удара, которая дает удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными: погрешности расчета амплитуды ударного импульса напряжения в штанге, его длительности, количества движения и энергии, а также интегральная средняя квадратичная погрешность ударного импульса, не превышает 10...13 %.

Имеющиеся расхождения в амплитудах и форме ударных импульсов связаны, по-видимому, с поперечными колебаниями стержней и возбуждением поверхностных волн, которые не рассматриваются в рамках теории одномодовой плоской волны Сен-Венана, примененной для построения данной модели. Значительные расхождения с экспериментом выявлены при наличии в ударной системе ступеней (2 и более) с резким изменением поперечного сечения соударяемых деталей, когда длина ступени сопоставима с ее поперечным размером.

Кроме того, мы не учитывали в расчетах диссипацию энергии при ударе, которую вызывает множество вторичных процессов: внутреннее трение, магнитострикция, излучение звука и др. [3, 14].

Более точное приближение к экспериментальным данным может дать применение в расчетах моделей, учитывающих поперечное движение частиц стержней (например, модели Рэлея-Бишопа и Миднина-Германа [23]) или использование метода конечных элементов, который позволит получить трехмерную картину распределения напряжений в стержнях.

Тем не менее, преимущество предложенного численного метода расчета удара очевидно: без сложных аналитических вычислений он позволяет оценить результат соударения стальных стержней и получить такие важные для практики характеристики процесса удара, как максимальные значения напряжений, длительность ударного импульса, коэффициент отскока ударника.

В данной статье мы рассматривали ударные системы, в которых противоположный соударяемому конец штанги свободен. Также мы считали, что до удара в штанге и ударнике отсутствуют напряжения. Полагаем, что предложенный метод позволит с приемлемой точностью рассчитывать процесс удара при внедрении штанги (пики) в обрабатываемую среду, а также при периодических ударах, когда возникающие в ударнике колебания не затухают к моменту следующего соударения.

Список литературы

1. Сен-Венан Б. Примечания к §§ 60 и 61 французского перевода книги “Clebsch Theorie der Elasticität fester Körper”, Paris, 1883.
2. Арндт Ф.К. Исследование о передаче энергии в процессе удара с точки зрения ударного бурения. ФРГ, г. Клаусталь Челлерфельд, ИГД при Горной Академии, 1960.
3. Кильчевский Н.А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. – Киев: Наукова думка, 1976. – 320 с.
4. Н. Hertz. Über die Berührung fester elastischer Körper Gesammelte Werke, Bd I.
5. Сирс И.Е. О продольном ударе металлических стержней с закругленными торцами// Transactions of the Cambridge Philosophical Society. – 1907. - Vol. XXI. - P. 49-105.
6. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. - М.: Гостехиздат, 1949.
7. Динник А.Н. Удар и сжатие упругих тел. Избр. тр. - Киев: АН УССР, 1952. - Т. 1. - 152 с.
8. Алимов О.Д., Манжосов В.К., Емельянц В.Э. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах. - М.: Наука, 1985. – 182 с.
9. Александров Е.В., Соколинский В.Б.. Прикладная теория соударения стержней с торцами произвольной формы. Научный доклад. - М.: Институт горного дела им. А.А.Скочинского, 1964. – 33 с.
10. Флавицкий Ю.В., Хомяков К.С. Определение импульсов напряжения при продольном соударении упругих тел. Краткий научный отчет. - М.: Институт горного дела им. А.А.Скочинского, 1964. – 31 с.
11. Александров Е.В., Флавицкий Ю.В., Хомяков К.С. Определение импульсов напряжения при продольном соударении упругих стержней произвольной геометрической формы. Краткий научный отчет. - М.: Институт горного дела им. А.А.Скочинского, 1965. – 40 с.
12. Соколинский И.Б. Методы аналитического расчета параметров неупругого удара в волновых системах. - М.: ИГД им. А.А.Скочинского, 1970. – 60 с.
13. Александров Е.В., Соколинский В.Б. и др. Исследование взаимодействия инструмента и горной породы при ударном разрушении. Краткий научный отчет. - М.: Институт горного дела им. А.А.Скочинского, 1967. – 61 с.
14. Александров Е.В., Соколинский В.Б. Прикладная теория и расчеты ударных систем. - М.: «Наука». - 1969. – 201 с.
15. Манжосов В.К., Слепухин В.В. Моделирование продольного удара в стержневых системах неоднородной структуры. - Ульяновск: УлГТУ, 2011. – 208 с.

16. Кашаев В.А., Ямпольский Д.З. Тензометрический метод измерения удара. Российский опыт. Достижения и перспективы //Вестник научно-технического развития. – 2017. – № 2 (114). <http://www.vntr.ru/ftpgetfile.php?id=1011> (дата обращения: 6 декабря 2016 года).
17. Д. Мак-Кракен, У. Дорн. Численные методы и программирование на Фортране. Издание второе, стереотипное. - М.: МИР, 1977. – 584 с.
18. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд. 5-е, стереотипное, учебное пособие для высших учебных заведений. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы издательства, 1977. – 736 с.
19. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1974. – 831 с.
20. ГОСТ 55162 – 2012 Оборудование горно-шахтное. Молотки отбойные пневматические. Требования безопасности и методы испытаний. - М., Стандартиформ, 2014. – 28 с.
21. Марочник сталей и сплавов. 4-е изд., переработ. и доп. / Ю.Г. Драгунов, А.С. Зубченко, Ю.В.Каширский и др. Под общей ред. Ю.Г.Драгунова и А.С.Зубченко – М.: 2014. - 1216 с.
22. Ямпольский Д.З., Ванаев В.С. Анализ методики испытаний электрических машин с целью определения энергии удара. // Вестник машиностроения. – 2018. № 7. – С. 47-54.
23. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.Н., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. - 296 с.

Дата поступления: 4 сентября 2019 г.