Вестник научно-технического развития Bulletin of Science and Technical Development

Номер 6 (142), июнь 2019 г.

DOI: 10.18411/vntr2019-142

Издается с 2007 года

Издание зарегистрировано в Министерстве РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации Эл. № ФС77-29768.

ISSN 2070-6847

*Журнал выпускается под научным руководством Федерального государственного
бюджетного учреждения науки Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН*

ОГЛАВЛЕНИЕ № 6 (142), 2019

Сергей Иванович Герасимов, Владимир Иванович Ерофеев, Ирина Александровна Одзерихо, Дмитрий Юрьевич Смирнов. Оценка влияния волновых процессов в упругой направляющей на динамику ракетного поезда.....стр. 3 – 12

Владимир Владимирович Кажжаев, Надежда Петровна Семерикова. Само модуляция квазигармонических изгибных волн в стержнях..... стр. 13 – 19

George Nerubenko, Vitaliy Krupenin, Dmytriy Gurevych. Belt conveyor equipped by vibration energy harvesting damper.....стр. 20 – 27

Александр Никитович Романов. Проблемы материаловедения в механике деформирования и разрушения на стадии развития трещин. Часть 1. Методика исследования распространения трещин при циклическом нагружении.....стр. 28 – 37

Издание зарегистрировано в Министерстве РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации Эл. № ФС77-29768.

ISSN 2070-6847

УДК 534.1

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В УПРУГОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ НА ДИНАМИКУ РАКЕТНОГО ПОЕЗДА

© Сергей Иванович Герасимов^{1,2}, Владимир Иванович Ерофеев¹,
Ирина Александровна Одзерихо^{1,2}, Дмитрий Юрьевич Смирнов²

¹Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия

²Саровский физико-технический институт, филиал НИЯУ «МИФИ», Саров, Россия
s.i.gerasimov@mail.ru

Аннотация. Динамическое воздействие на упругую направляющую движущегося по ней объекта вызывает колебания в виде бегущих волн. В направляющих, имеющих две оси симметрии, возбуждаются чисто изгибные колебания. В общем случае, из-за несовпадения центра тяжести и центра изгиба сечения направляющей в ней под действием поперечной нагрузки возникают изгибно-крутильные бегущие волны. Приводится подробный анализ волн, возбуждаемых движущейся нагрузкой в упругой направляющей.

Ключевые слова: рельсовая направляющая, крутильно-изгибные колебания.

Работа выполнена в рамках государственного задания на проведение фундаментальных научных исследований на 2013-2020 г.г. по теме № 0035-2014-0402, № госрегистрации 01201458047 и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 17-08-01096, № 18-29-10073).

ESTIMATION OF THE EFFECT OF WAVE PROCESSES IN ELASTIC GUIDE ON THE DYNAMICS OF THE ROCKET TRAIN

© S.I. Gerasimov^{1,2}, V.I. Erofeev², I.A. Odzerikho^{1,2}, D.Yu. Smirnov²

¹Mechanical Engineering Research Institute of the RAS, Nizhny Novgorod, Russia

²Sarov Physical Technical Institute, Sarov, Russia

s.i.gerasimov@mail.ru

Abstract. The dynamic effect on the elastic guide of an object moving along it causes vibrations in the form of running waves. In the guides having two axes of symmetry, purely bending vibrations are excited. In General, due to the mismatch of the center of gravity and the center of bending of the cross section of the guide in it under the action of transverse load there are bending-torsional traveling waves. A detailed analysis of the waves excited by a moving load in an elastic guide is given.

Keywords: rail guide, rail guide, bending-torsional vibrations.

Acknowledgements. The work was carried out within the Russian state task for conducting fundamental scientific research for 2013-2020 on the topic No. 0035-2014-0402, state registration number 01201458047 and the work was supported by the Russian Foundation Investigation Fond, projects no.17-08-01096, no.18-29-10073.

Одной из составляющих, определяющих динамику взаимодействия движущегося объекта с упругой направляющей, являются волновые процессы в направляющей, возбуждаемые движущимся объектом. В качестве направляющей рассматривается бесконечная балка, поперечное сечение которой показано на Рис.1.

Сечение направляющей симметрично относительно оси Y и несимметрично относительно оси Z .

Центр тяжести сечения не совпадает с его центром изгиба (центр изгиба – точка приложения равнодействующей касательных напряжений сдвига в поперечном сечении направляющей; поперечная сила, приложенная в центре изгиба, вызывает изгиб направляющей без закручивания [1]).

Волновые процессы в упругой направляющей будем рассматривать при следующих допущениях: рельсовая направляющая моделируется бесконечной балкой модели Бернулли-Эйлера (без учета инерции вращения и сдвига поперечных сечений), лежащей на сплошном упругом основании; инерционно-массовые и жесткостные параметры балки и жесткость упругого основания постоянны по длине направляющей; демпфирующие свойства направляющей не учитываются; на бесконечности прогибы и угол поворота сечения направляющей ограничены.

Динамическое воздействие движущейся нагрузки на упругую направляющую вызывает в последней колебания в виде бегущих волн, возбуждение которых сопровождается обратным действием упругой системы на нагрузку. В направляющих, имеющих две оси симметрии, возбуждаются чисто изгибные колебания. В общем случае из-за несовпадения центра тяжести и центра изгиба сечения направляющей в последней под действием поперечной нагрузки возникают изгибно-крутильные бегущие волны.

Рассмотрим задачу о движении с постоянной скоростью V_x нагрузок $P_y(t)$ и $P_z(t)$ вдоль направляющей, схема которой приведена на Рис. 2.

Рис. 1.

Действующие силы будем полагать гармоническими $P_y = P_y \cdot e^{i\Omega_y t}$, $P_z = P_z \cdot e^{i\Omega_z t}$. В предположении колебаний малыми, система уравнений, описывающих движение направляющей, имеет вид [1, 2]:

$$\begin{cases} EI_z \cdot y_H^{IV} + m \cdot \ddot{y}_H + H_y \cdot y_H = 0 \\ EI_y \cdot z_H^{IV} + m \cdot \ddot{z}_H + m \cdot y_s \cdot \ddot{\phi}_H + H_z \cdot z_H = 0 \\ EI_\phi \cdot \phi_H^{IV} - GI_k \cdot \phi_H'' + I_P \cdot \ddot{\phi}_H + m \cdot y_s \cdot \ddot{z}_H + H_\phi \cdot \phi_H = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Рис. 2.

Здесь и далее параметры, характеризующие рельсовую направляющую (РН):

φ , рад – угол поворота сечения направляющей; m , кг/м – погонная масса; I_p , кгм – погонный момент инерции; EI_Y , EI_Z , Нм² – изгибные жёсткости сечения направляющей; EI_φ , Нм⁴ – секториальная жёсткости сечения направляющей; GI_K , Нм² – крутильная жёсткости сечения направляющей; H_Y , H_Z , Н/м² – погонные жёсткости упругого основания в направлении осей Y и Z; H_φ , Н/рад – погонная жёсткость упругого основания в направлении угла φ ; y_s , м – расстояние между центром масс и центром изгиба сечения направляющей; y_ϕ , м – расстояние между центром изгиба и осью действия нагрузки; λ , м – длина волны; $K = 2\pi/\lambda$, м⁻¹ – волновое число; S – функция, характеризующая изменение амплитуды колебаний РН во времени; μ – коэффициент Пуассона; E , Н/м² – модуль упругости; H_B , Н/м² – твердость. Точкой обозначена производная по времени, штрихом – производная по координате; ^(с) указывает на принадлежность к направляющей: 1 – левая, 2 – правая; ^(v) – указывает на принадлежность к ветви направляющей:

1 – слева; 2 – справа от движущейся границы.

Ввиду симметрии сечения направляющей относительно оси Y первое уравнение системы (1) является независимым, и колебания направляющей в направлении оси Y носят чисто изгибный характер. Относительно оси Z сечение направляющей несимметрично. Из-за несовпадения центра тяжести с центром изгиба сечения направляющей второе и третье уравнения системы (1) взаимозависимы и могут быть решены только совместно, т.е. поперечная сила P_2 возбуждает в направляющей изгибно-крутильные бегущие волны.

Условия на движущихся границах представляют собой условия непрерывности срединной линии направляющей, углов поворота сечения и закрутки направляющей, а также баланс обобщенных сил: поперечных сил, изгибающих и крутящих моментов. С учетом соотношений для силовых факторов при изгибном кручении [3]

$$\begin{cases} M_k + M_\varphi = P \cdot y_B \\ M_k = GI_K \cdot \varphi'_H \\ M_\varphi = -EI_\varphi \cdot \varphi'''_H \\ M_k + M'_\varphi = (P \cdot y_B)' = 0 \\ M''_k + M''_\varphi = (P \cdot y_B)'' = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Условия на движущихся нагрузках имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^1y_H \Big|_{x=v_x \cdot t} = {}^2y_H \Big|_{x=v_x \cdot t}, \quad {}^1y'_H \Big|_{x=v_x \cdot t} = {}^2y'_H \Big|_{x=v_x \cdot t}, \\ {}^1y''_H \Big|_{x=v_x \cdot t} = {}^2y''_H \Big|_{x=v_x \cdot t}, \quad E \cdot I_z \cdot ({}^1y'''_H - {}^2y'''_H) \Big|_{x=v_x \cdot t} = P_y(t), \\ {}^1z_H \Big|_{x=v_x \cdot t} = {}^2z_H \Big|_{x=v_x \cdot t}, \quad {}^1z'_H \Big|_{x=v_x \cdot t} = {}^2z'_H \Big|_{x=v_x \cdot t}, \\ {}^1z''_H \Big|_{x=v_x \cdot t} = {}^2z''_H \Big|_{x=v_x \cdot t}, \quad E \cdot I_y \cdot ({}^1z'''_H - {}^2z'''_H) \Big|_{x=v_x \cdot t} = P_z(t), \\ {}^1\varphi_H \Big|_{x=v_x \cdot t} = {}^2\varphi_H \Big|_{x=v_x \cdot t}, \\ \left[(GI_k \cdot {}^1\varphi'_H - EI_\varphi \cdot {}^1\varphi'''_H) - (GI_k \cdot {}^2\varphi'_H - EI_\varphi \cdot {}^2\varphi'''_H) \right] \Big|_{x=v_x \cdot t} = y_B \cdot P_z(t), \\ \left[(GI_k \cdot {}^1\varphi''_H - EI_\varphi \cdot {}^1\varphi^{IV}_H) - (GI_k \cdot {}^2\varphi''_H - EI_\varphi \cdot {}^2\varphi^{IV}_H) \right] \Big|_{x=v_x \cdot t} = 0, \\ \left[(GI_k \cdot {}^1\varphi'''_H - EI_\varphi \cdot {}^1\varphi^V_H) - (GI_k \cdot {}^2\varphi'''_H - EI_\varphi \cdot {}^2\varphi^V_H) \right] \Big|_{x=v_x \cdot t} = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} y_H(x, t) = \begin{cases} {}^1y_H(x, t), & x < v_x \cdot t \\ {}^2y_H(x, t), & x > v_x \cdot t \end{cases} \\ z_H(x, t) = \begin{cases} {}^1z_H(x, t), & x < v_x \cdot t \\ {}^2z_H(x, t), & x > v_x \cdot t \end{cases} \end{array} \right\} \quad (4)$$

Поскольку произвольный волновой процесс в линейных системах может быть представлен суперпозицией гармонических волн, то полагая, без нарушения при этом общности, колебания нагрузки гармоническими

$$\left. \begin{array}{l} P_y(t) = P_y \cdot e^{i\Omega_y t} \\ P_z(t) = P_z \cdot e^{i\Omega_z t} \end{array} \right\} \quad (5)$$

решения уравнений (1) будем искать в виде гармонических бегущих волн по разные стороны от нагрузки

$$\left. \begin{array}{l} {}^v y_H = {}^v A_y \cdot e^{i({}^v \omega_y \cdot t - {}^v K_y \cdot x)} \\ {}^v z_H = {}^v A_z \cdot e^{i({}^v \omega_z \cdot t - {}^v K_z \cdot x)} \\ {}^v \varphi_H = {}^v A_\varphi \cdot e^{i({}^v \omega_z \cdot t - {}^v K_z \cdot x)} \end{array} \right\} \quad (6)$$

где ${}^v A_y, {}^v A_z, {}^v A_\varphi$ — комплексные амплитуды; ${}^v K_y, {}^v K_z$ — волновые числа; ${}^v \omega_y, {}^v \omega_z$ — частоты изгибных и изгибно-крутильных колебаний направляющей.

Подставив решения (6) в (1), получим систему алгебраических уравнений для определения частот и волновых чисел

$$\left. \begin{aligned} m \cdot \omega_y^2 - EI_z \cdot K_y^4 - H_y &= 0 \\ \omega_z^4 - B_1(K_z) \cdot \omega_y^4 + B_2(K_z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

удовлетворяющих условию равенства фаз возбуждаемых волн фазе источника [4,5]

$$\left. \begin{aligned} {}^v\omega_y - {}^vK_y \cdot V_x &= \Omega_y \\ {}^v\omega_z - {}^vK_z \cdot V_x &= \Omega_z \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В системе (7)

$$\left. \begin{aligned} B_1(K_z) &= \frac{(EI_y \cdot I_p + EI_\phi \cdot m) \cdot K_z^4 + GI_k \cdot m \cdot K_z^2 + m \cdot H_\phi + I_p \cdot H_z}{m \cdot (I_p - m \cdot y_s^2)} \\ B_2(K_z) &= \frac{EI_\phi \cdot EI_y \cdot K_z^8 + EI_y \cdot GI_k \cdot K_z^6 + (EI_y \cdot H_\phi + EI_y \cdot H_z) \cdot K_z^4 + GI_k \cdot H_z \cdot K_z^2 + H_\phi \cdot H_z}{m \cdot (I_p - m \cdot y_s^2)} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Соотношения (7) устанавливают связь между частотами и длинами возбуждающих волн

$\lambda = \frac{2\pi}{K}$ при заданных параметрах направляющей и называются дисперсионными уравнениями, а каждое из уравнений (8) является характеристикой движущегося источника и в теории волн известно как кинематический инвариант [4,5]. Система совместных алгебраических уравнений (5) - (6) выражает закон сложного эффекта Доплера, согласно которому происходит сдвиг частот возбуждаемых волн вследствие движения источника [4,5], и определяет все возможные в упругой направляющей волны.

Напомним, что эффект Доплера является сложным, если дисперсионные уравнения (7) определяют нелинейную зависимость ω от K . Среди возможных решений физически реализуемыми будут те, которые соответствуют ограниченному прогибам на бесконечности и отводят энергию от источника. (условие Мандельштама) [6].

В соответствии с [4,5] эти условия могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \text{перед источником } x > V_x \cdot t &\left\{ \begin{aligned} &\text{комплексные корни } -I_m(K) < 0, \\ &\text{действительные корни } -\frac{d\omega}{dK} > V_x \end{aligned} \right. \\ \text{перед источником } x < V_x \cdot t &\left\{ \begin{aligned} &\text{комплексные корни } -I_m(K) > 0, \\ &\text{действительные корни } -\frac{d\omega}{dK} < V_x \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где $I(K), \frac{d\omega}{dK}$ — мнимая часть комплексного волнового числа; групповая скорость распространения волн, соответственно.

Решение системы совместных алгебраических уравнений (7) - (8) может быть проиллюстрировано на дисперсионной плоскости (см. Рис. 3).

Рис.3

Дисперсионные уравнения направляющей представлены параболического вида кривыми, а характеризующие нагрузку кинематические инварианты – прямыми, тангенс угла наклона которых к оси K равен скорости движения нагрузки. Точки пересечения параболических кривых с прямой кинематического варианта – действительные корни решения системы совместных алгебраических уравнений (7)-(8). Если пересечение отсутствует – корни комплексные. Действительным корням соответствуют бегущие волны, комплексным – локальные затухающие деформации направляющей, перемещающиеся вместе с движущейся нагрузкой.

Комплексные амплитуды ${}^v A_{yj}, {}^v A_{zj}, {}^v A_{\varphi j}$ находятся из условий сопряжения на движущихся границах (3). Подставив в условия сопряжения значения соответствующих производных, получим две системы алгебраических уравнений для определения амплитуд:

${}^v A_{yj}$ – изгибных колебаний; ${}^v A_{zj}, {}^v A_{\varphi j}$ – и изгибно-крутильных колебаний

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^2 {}^1 A_{yj} - \sum_{j=1}^2 {}^2 A_j &= 0, \\ \sum_{j=1}^2 {}^1 K_{yj} \cdot {}^1 A_{yj} - \sum_{j=1}^2 {}^2 K_{yj} \cdot {}^2 A_{yj} &= 0, \\ \sum_{j=1}^2 {}^1 K_{yj}^2 \cdot {}^1 A_{yj} - \sum_{j=1}^2 {}^2 K_{yj}^2 \cdot {}^2 A_{yj} &= 0, \\ \sum_{j=1}^2 {}^1 K_{yj}^3 \cdot {}^1 A_{yj} - \sum_{j=1}^2 {}^2 K_{yj}^3 \cdot {}^2 A_{yj} &= -\frac{i \cdot P_y}{EI_z} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned}
& \sum_{j=1}^4 {}^1A_{zj} - \sum_{j=1}^4 {}^2A_{zj} = 0, \\
& \sum_{j=1}^4 {}^1K_{zj} \cdot {}^1A_{zj} - \sum_{j=1}^4 {}^2K_{zj} \cdot {}^2A_{zj} = 0, \\
& \sum_{j=1}^4 {}^1K_{zj}^2 \cdot {}^1A_{zj} - \sum_{j=1}^4 {}^2K_{zj}^2 \cdot {}^2A_{zj} = 0, \\
& \sum_{j=1}^4 {}^1K_{zj}^3 \cdot {}^1A_{zj} - \sum_{j=1}^4 {}^2K_{zj}^3 \cdot {}^2A_{zj} = -\frac{i \cdot P_z}{EI_z}, \\
& \sum_{j=1}^4 {}^1\beta_j \cdot {}^1A_{zj} - \sum_{j=1}^4 {}^2\beta_j \cdot {}^2A_{zj} = 0, \\
& \sum_{j=1}^4 {}^1\beta_j \cdot {}^1K_{zj} \cdot (\alpha^2 - {}^1K_{zj}^2) \cdot {}^1A_{zj} - \sum_{j=1}^4 {}^2\beta_j \cdot {}^2K_{zj} \cdot (\alpha^2 - {}^2K_{zj}^2) \cdot {}^2A_{zj} = \frac{i \cdot y_B \cdot P_z}{EI_\varphi}, \\
& \sum_{j=1}^4 {}^1\beta_j \cdot {}^1K_{zj}^2 \cdot (\alpha^2 - {}^1K_{zj}^2) \cdot {}^1A_{zj} - \sum_{j=1}^4 {}^2\beta_j \cdot {}^2K_{zj}^2 \cdot (\alpha^2 - {}^2K_{zj}^2) \cdot {}^2A_{zj} = 0, \\
& \sum_{j=1}^4 {}^1\beta_j \cdot {}^1K_{zj}^3 \cdot (\alpha^2 - {}^1K_{zj}^2) \cdot {}^1A_{zj} - \sum_{j=1}^4 {}^2\beta_j \cdot {}^2K_{zj}^3 \cdot (\alpha^2 - {}^2K_{zj}^2) \cdot {}^2A_{zj} = 0.
\end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$\alpha = \frac{GI_k}{EI_\varphi}$, $\beta_j = \frac{{}^\nu A_{\varphi j}}{{}^\nu A_{zj}}$ – отношение амплитуд при кручении и изгибе направляющей.

Выражение для определения ${}^\nu \beta_j$ можно получить, подставив решения для z_n (6) в уравнения системы (1)

$${}^\nu \beta_j = \frac{EI_y \cdot {}^\nu K_{zj}^4 - m \cdot {}^\nu \omega_{zj}^2 + H_z}{m \cdot y_s^2 \cdot \omega_{zj}^2} \quad \nu = 1, 2 \quad j = 1 \dots 4 \quad (13)$$

Разрешив систему (11) относительно ${}^\nu A_{y_j}$, получим амплитуды изгибных колебаний в вертикальной плоскости. Амплитуды изгибных колебаний в горизонтальной плоскости ${}^\nu A_{z_j}$ получим, решив систему (12). Амплитуды крутильных колебаний

$${}^\nu A_{\varphi j} = {}^\nu \beta_j \cdot {}^\nu A_{zj} \quad j = 1 \dots 4 \quad \nu = 1, 2 \quad (14)$$

Перемещение головки рельсовой направляющей в направлении оси Z:

$${}^\nu z_r = \sum_{j=1}^4 ({}^\nu z_{Hj} + y_B \cdot {}^\nu \varphi_{Hj}) \quad (15)$$

Поперечные колебания объекта, движущегося по направляющей, могут быть неустойчивы вследствие аномального эффекта Доплера, который имеет место при движении объекта со скоростью, превышающей фазовую скорость возбуждаемой волны [6]. Возникающие в этом случае колебания направляющей увеличивают энергию поперечных колебаний объекта за счет источника, поддерживающего закономерность продольного движения объекта.

Амплитуда поперечных колебаний движущегося объекта при этом может возрастать во времени. В работах [7, 8] вопрос об устойчивости движения объекта по направляющей связывается с динамической жесткостью системы.

Динамическая жесткость системы представляет собой отношение амплитуды приложенной к ней гармонической силы к комплексной амплитуде колебаний в возбуждаемой точке и является функцией физических параметров системы и частоты колебаний [7,8].

Для анализа динамики взаимодействия движущегося объекта с упругой направляющей чрезвычайно важно знать динамическую жесткость направляющей в местах контакта с опорными элементами движущегося объекта.

Динамическая жесткость при изгибных колебаниях бесконечной балки, лежащей на сплошном упругом основании, в равномерно движущемся контакте исследована в работах [7,8].

Минимальная фазовая скорость для изгибных волн направляющей, представленной балкой модели Бернулли-Эйлера на сплошном упругом основании, в соответствии с [4,5] может

быть оценена при помощи выражения $v_{\phi \min} = \sqrt[4]{4 \cdot H_y \cdot EI_z / m^2}$ и для стандартного ракетного трека составляет ~ 2300 м/с. Из проведенной оценки следует, что при скоростях движения ступеней ракетного поезда, не превышающих 2300 м/с, неустойчивость поперечного движения последних не может быть обусловлена изгибными волнами. Наиболее вероятной причиной неустойчивости поперечного движения ступеней являются изгибно-крутильные волны рельсовой направляющей, фазовая скорость которых существенно ниже фазовой скорости изгибных волн и для стандартного ракетного трека составляет ~ 600 м/с.

Рассмотрим изгибно-крутильные колебания рельсовой направляющей под действием движущегося по ней осциллятора массой m_{oc} и жесткостью упругих элементов c_{oc} , схема которого приведена на Рис.4. Центр масс осциллятора находится на линии действия его упругих элементов.

Рис.4. а) равномерное движение осциллятора вдоль балки; б) эквивалентная модель.

Изгибно-крутильные колебания направляющей при действии сосредоточенных сил в точках контакта с упругими элементами осциллятора описываются системой уравнений [9,10]

$$\left\{ \begin{aligned} EI_y \cdot z_H^{IV} + m \cdot \ddot{z}_H + H_z \cdot z_H + y_s \cdot m \cdot \ddot{\phi}_H &= c_{oc} \cdot [z_{oc} - (z_H + y_B \cdot \phi_H)] \cdot \delta(x - v_x \cdot t) \\ EI_\phi \phi_H^{IV} - GI_k \cdot \phi'' + I_p \cdot \ddot{\phi}_H + H_\phi \cdot \phi_H + y_s \cdot m \cdot \ddot{z}_H &= c_{oc} \cdot y_B \cdot [z_{oc} - (z_H + y_B \cdot \phi_H)] \delta(x - v_x \cdot t) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Уравнение колебаний осциллятора в направлении оси Z имеет вид:

$$m_{oc} \cdot \ddot{z}_{oc} + c_{oc} \cdot [z_{oc} - (z_H + y_B \cdot \phi_H)] = 0 \quad (17)$$

Применяя подход, предложенный в [7,8] и состоящий в переходе от системы дифференциальных уравнений (16) в частных производных к системе алгебраических уравнений путем преобразований Фурье, исключая из которой z_n и φ_n с использованием при этом уравнения (17), можно получить характеристическое уравнение колебаний осциллятора, равномерно движущегося вдоль направляющей, связывающее частоту колебаний осциллятора с упруго-инерционными свойствами последнего и динамической жесткостью направляющей в равномерно движущемся контакте

$$\frac{c_{oc} \cdot \chi_z \cdot \chi_\varphi}{\chi_z \cdot \chi_\varphi + c_{oc} \cdot \chi_\varphi + y_B \cdot c_{oc} \cdot \chi_z} - m_{oc} \cdot \Omega^2 = 0 \quad (18)$$

где

$$\chi_z(\Omega, v_x) = \left[\frac{1}{2\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(k, \Omega) + y_B \cdot y_s \cdot m \cdot (\Omega - v_x \cdot k)^2}{A(k, \Omega) \cdot B(k, \Omega) - y_s^2 \cdot m^2 \cdot (\Omega - v_x \cdot k)^4} dk \right]^{-1} \quad (19)$$

$$\chi_\varphi(\Omega, v_x) = \left[\frac{1}{2\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_B \cdot B(k, \Omega) + y_s \cdot m \cdot (\Omega - v_x \cdot k)^2}{A(k, \Omega) \cdot B(k, \Omega) - y_s^2 \cdot m^2 \cdot (\Omega - v_x \cdot k)^4} dk \right]^{-1}$$

$$\left. \begin{aligned} A(k, \Omega) &= EI_\varphi \cdot k^4 + GI_k \cdot k^2 - I_p \cdot (\Omega - V_x \cdot k)^2 + H_\varphi \\ B(k, \Omega) &= EI_y \cdot k^4 - m \cdot (\Omega - v_x \cdot k)^2 + H_z \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Подынтегральные функции в выражениях (19) для $\chi_z(\Omega, v_x)$ и $\chi_\varphi(\Omega, v_x)$

представляют собой дроби, в знаменателе которых стоит полином восьмой степени, корни которого являются простыми полюсами. В этом случае, согласно теории вычетов [11], результат вычисления интегралов может быть записан в виде:

$$\chi_z(\Omega, v_x) = \left[i \sum_{j=1}^8 \frac{A(k, \Omega) + y_B \cdot y_s \cdot m \cdot (\Omega - v_x \cdot k)^2}{\frac{d}{dk} [A(k, \Omega) \cdot B(k, \Omega) - y_s^2 \cdot m^2 \cdot (\Omega - v_x \cdot k)^4]} \Big|_{k=k_j} \right]^{-1}$$

$$\chi_\varphi(\Omega, v_x) = \left[i \sum_{j=1}^8 \frac{y_B \cdot B(k, \Omega) + y_s \cdot m \cdot (\Omega - v_x \cdot k)^2}{\frac{d}{dk} [A(k, \Omega) \cdot B(k, \Omega) - y_s^2 \cdot m^2 \cdot (\Omega - v_x \cdot k)^4]} \Big|_{k=k_j} \right]^{-1} \quad (21)$$

Эквивалентная жесткость направляющей при изгибно-крутильных колебаниях определяется выражением

$$\chi_e = \frac{\chi_\varphi \chi_z}{\chi_\varphi + y_b \chi_z} \quad (22)$$

Список литературы

1. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем.- М.: Машиностроение, 1970.- 734с.

2. Кохманюк С.С., Янютин В.Г., Романенко Л.Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. - Киев: Наукова думка, 1980. - 232 с.
3. Герасимов С.И., Ерофеев В.И. Расчет изгибно-крутильных колебаний рельсовой направляющей ракетного трека // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2016. - № 3. - С.25-27.
4. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. - М.: Физматлит, 2001. - 320 с.
5. Весницкий А.И. Избранные труды по механике. - Нижний Новгород: Изд-во «Наш дом», 2010. - 248 с.
6. Гинзбург В.Л. Излучение равномерно движущихся источников (эффект Вавилова-Черенкова, переходное излучение и некоторые другие явления) // Успехи физических наук. - 1996. - Т. 166, № 10. - С.1033 - 1042.
7. Metrikine A.V., Popp K. Instability of vibrations of an oscillator moving along a beam on an elastic half-space // European Journal of Mechanics A/Solids. - 1999. - Vol. 18, No 4. - P.331-349.
8. Метрикин А.В., Веричев С.Н., Вострухов А.В. Фундаментальные задачи высокоскоростного наземного транспорта. - Saarbrücken, Germany: Lambert Academic Publishing, 2014. - 200 с.
9. Бутова С.В., Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г. Устойчивость движения высокоскоростных объектов по направляющим ракетного трека // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2015. - № 1. - С.3-8.
10. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г., Каныгин И.И. Оценка резонансоопасных гармоник при колебаниях упругой направляющей с движущимся по ней двухопорным объектом // Проблемы прочности и пластичности. - 2015. - Т.77, № 4. - С.412-424.
11. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Гос.изд.физ.-мат.лит., 1958. - 680 с.

Дата поступления: 18 мая 2019 г.

УДК 534.1

САМОМОДУЛЯЦИЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В СТЕРЖНЯХ

© Владимир Владимирович Кажаяв^{1,2}, Надежда Петровна Семерикова²

¹Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» (ИПМ РАН), Нижний Новгород, Россия

²Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

ipmvvk@mail.ru, nadezhda.semerikova@yandex.ru

Аннотация. В работе проанализированы условия возникновения модуляционной неустойчивости квазигармонических изгибных волн, распространяющихся в нелинейно-упругих стержнях моделей Бернулли-Эйлера и Тимошенко.

Ключевые слова: стержень, изгибная волна, самомодуляция.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН на проведение фундаментальных научных исследований на 2013-2020 г.г. по теме № 0035-2014-0402, № госрегистрации 01201458047 и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-08-01096-а).

SELF-MODULATION OF QUASI-HARMONIC BENDING WAVES IN RODS

© V.V. Kazhaev^{1,2}, N.P. Semerikova²

¹Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia

²National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia

ipmvvk@mail.ru, nadezhda.semerikova@yandex.ru

Abstract. The features of propagation of quasi-harmonic waves in nonlinear elastic Euler-Bernoulli and Timoshenko rods are studied. It is shown that bending waves in Euler-Bernoulli rod are stable by means of self-modulation, while in Timoshenko rod there exist domains of modulation instability.

Keywords: rod, bending wave, self-modulation.

Acknowledgements. The work was carried out within the Russian state task for conducting fundamental scientific research for 2013-2020 on the topic No. 0035-2014-0402, state registration number 01201458047 and the work was supported by RFBR (project 17-08-01096-a).

В [1] получена система уравнений, описывающая изгибные колебания стержня с учетом геометрической и физической нелинейностей:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \aleph C_r^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \langle 1 \rangle \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\aleph C_r^2}{r_y^2} \left(\varphi - \frac{\partial W}{\partial x} \right) = \frac{1}{\rho_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \langle 2 \rangle - \langle 3 \rangle \right\} \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $W(x, t)$ – вертикальное перемещение срединной линии стержня, $\varphi(x, t)$ – угол поворота сечения относительно вертикальной оси (Oz), $C_0 = \sqrt{E/\rho_0}$, $C_r = \sqrt{\mu/\rho_0}$ – скорости продольной и сдвиговой волн, E – модуль Юнга, μ – константа Ламэ, ρ_0 – плотность материала, $\aleph$ – коэффициент Тимошенко, учитывающий дополнительные сдвиговые деформации, вызывающие искривления поперечных сечений, $r_y = \sqrt{J_y/F}$ – осевой радиус инерции, $I_y = \iint_F z^2 dF$ – осевой момент инерции, F – площадь поперечного сечения. В линейном приближении эта система совпадает с хорошо известной моделью балки Тимошенко [2-4]. Геометрическая и физическая нелинейности стержня учитываются слагаемыми, стоящими в правых частях уравнений (1):

$$\langle 1 \rangle = 2\alpha_2 r_y^2 \frac{\partial W}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 4\alpha_3 \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^3 + 2\alpha_4 \varphi^2 \frac{\partial W}{\partial x} + \alpha_5 r_y^2 \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 3\alpha_6 \varphi \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \alpha_6 \varphi^3$$

$$\langle 2 \rangle = 4\alpha_1 \frac{J_1}{J_y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^3 + 2\alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\varphi^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) + 2\alpha_5 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$\langle 3 \rangle = 2\alpha_2 \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\alpha_4}{r_y^2} \varphi \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\alpha_3}{r_y^2} \varphi^3 + \alpha_5 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\alpha_6}{r_y^2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^3 + 3 \frac{\alpha_6}{r_y^2} \varphi^2 \frac{\partial W}{\partial x},$$

где $I_1 = \iint_F z^4 dF$ – геометрический момент инерции четвертого порядка, а коэффициенты нелинейности α_i ($i = 1, 6$) выражаются через адиабатические константы упругости Ламэ-второго (λ, μ), третьего ($\nu_{1,2,3}$) и четвертого ($\gamma_{1,2,3,4}$) порядков:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\lambda}{8} + \frac{\mu}{4} + \frac{1}{4} \nu_1 + \frac{3}{2} \nu_2 + 2\nu_3 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4; \\ \alpha_2 &= \frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{2} + \nu_1 + \frac{3}{4} \nu_2 + \frac{5}{2} \nu_3 + \gamma_2 + \frac{3}{4} \gamma_3 + \gamma_4; \quad \alpha_3 = \frac{\lambda}{8} + \frac{\mu}{4} + \frac{1}{4} \nu_2 + \frac{1}{2} \nu_3 + \frac{1}{4} \gamma_4; \\ \alpha_4 &= \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{3} \nu_2 + \nu_3 + \frac{3}{2} \gamma_4; \quad \alpha_5 = -2\nu_2 + 4\nu_3 - \gamma_2 - \frac{3}{2} \gamma_3 - 2\gamma_4; \quad \alpha_6 = -\frac{1}{2} \nu_2 - \nu_3 - \gamma_4. \end{aligned}$$

В линейной модели Тимошенко $\varphi = \frac{\partial W}{\partial x} - \beta$, где через $\beta(x, t)$ обозначен угол сдвига, а $\frac{\partial W}{\partial x}$ – угол поворота касательной к оси стержня. Заметим, что в технической теории Бернулли-Эйлера углом сдвига при изгибе пренебрегается ($\beta=0$) и

$$\varphi = \frac{\partial W}{\partial x} \quad (2)$$

Сведем (1) к одному уравнению. Для этого из первого уравнения системы выразим $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa C_\tau^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0 \kappa C_\tau^2} \frac{\partial}{\partial x} \langle 1 \rangle$ и подставим во второе уравнение, предварительно продифференцировав его по переменной x . Кроме того, будем предполагать, что углы сдвига поперечных сечений $\beta(x, t)$ малы. Поскольку нелинейные эффекты являются величинами более высокого порядка малости, чем линейные, это позволяет учитывать сдвиги только в линейной части уравнений, а в нелинейных слагаемых считать, что приближенно выполняется соотношение (2). Переходя к новым безразмерным переменным $x' = \frac{x}{\Lambda r_y}$, $t' = \frac{C_0 t}{\Lambda r_y}$, $W' = \frac{W}{W_0}$, где W_0 – максимальная амплитуда изгибной волны, $L = \Lambda r_y$ – длина волны, $\Lambda > 1$ – безразмерная длина волны, получаем уравнение относительно поперечного перемещения в виде:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \left[\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \left(1 + \frac{C_0^2}{\kappa C_\tau^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{C_0^2}{\kappa C_\tau^2} \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} \right] = \frac{\tilde{\alpha} W_0^2}{EL^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^3 \quad (3)$$

Здесь и в дальнейшем для удобства штрихи над безразмерными переменными опущены. Оценка нелинейных слагаемых показала, что доминирующими являются члены, содержащие нелинейность $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^3$. Поэтому в уравнении (3) сохранены слагаемые, входящие с коэффициентом $\frac{1}{\Lambda^2}$, а остальными (с коэффициентами, пропорциональными $\frac{1}{\Lambda^4}, \frac{1}{\Lambda^6}$) – пренебрегли. Здесь $D = r_y^2 / L^2$ – параметр дисперсии, $\tilde{\alpha}$ – коэффициент, определяющий геометрическую и физическую нелинейности:

$$\tilde{\alpha} = 6\alpha_3 + 4\alpha_4 + 8\alpha_6 = \frac{7}{4}\lambda + \frac{3}{2}\mu - \frac{7}{6}\nu_2 - \nu_3 - \frac{1}{8}\gamma_4 \quad (4)$$

Ранее в [1] система уравнений (1) сводилась к уравнению, подобному (3), в предположении малых углов поворота поперечного сечения (φ), т.е. в предположении больших углов сдвига $\left(\beta \approx \frac{\partial W}{\partial x} \right)$. Это приводило к тому, что приходилось неявно пренебрегать геометрической нелинейностью, сохранив нелинейность физическую. Однако, для тонкостенных элементов конструкций, совершающих изгибные колебания конечной амплитуды, доминирующей является именно геометрическая нелинейность.

Рассмотрим далее влияние геометрической нелинейности на процесс самомодуляции квазигармонической изгибной волны. Физической нелинейностью на первом этапе пренебрегаем, т.е. в (4) считаем $v_{2,3} = \gamma_4 = 0$.

В линейном приближении ($\tilde{\alpha} = 0$) решение уравнения (3) представляется в виде набора гармоник $e^{i(\omega t - kx)}$, частоты (ω) и волновые числа (k) которых связаны дисперсионным соотношением:

$$k^4 - \frac{\omega^2}{D} - \left(1 + \frac{C_0^2}{8C_\tau^2}\right)k^2\omega^2 + \frac{C_0^2}{8C_\tau^2}\omega^4 = 0. \quad (5)$$

На плоскости (ω, k) имеется две дисперсионные ветви. Первая ветвь исходит из нуля, а вторая – из точки $k = 0, \omega = \sqrt{\frac{8}{D}} \frac{C_\tau}{C_0}$. Нижняя дисперсионная ветвь имеет точку перегиба, координаты которой (k^*, ω^*) находятся из дисперсионного соотношения (5) и следующего уравнения:

$$\left(1 + D\left(1 + \frac{C_0^2}{8C_\tau^2}\right)k^2 - 6D\frac{C_0^2}{8C_\tau^2}\omega^2\right)V_{gr}^2 + 4D\left(1 + \frac{C_0^2}{8C_\tau^2}\right)\omega k V_{gr} - 6Dk^2 + D\left(1 + \frac{C_0^2}{8C_\tau^2}\right)\omega^2 = 0.$$

Здесь V_{gr} – групповая скорость линейных волн, выражение для которой имеет вид

$$V_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{D\left[2k^3 - \left(1 + \frac{C_0^2}{8C_\tau^2}\right)\omega^2 k\right]}{\omega + D\left(1 + \frac{C_0^2}{8C_\tau^2}\right)\omega k^2 - 2D\frac{C_0^2}{8C_\tau^2}\omega^3} \quad (6)$$

Сильная в низкочастотной области дисперсия изгибных волн при наличии слабой кубической нелинейности приводит к тому, что решение уравнения (3) при $\tilde{\alpha} \neq 0$ будет близко к решению соответствующего линейного уравнения. Фазовая скорость третьей гармоники (3ω), согласно (5), будет существенно отличаться от фазовой скорости волны основной частоты (ω). Это позволяет отыскивать решения уравнения (3) в виде одной квазигармоники:

$$W(x, t) = A(\varepsilon x, \varepsilon t)e^{i(\omega t - kx)} + k.c. \quad (7)$$

где $A(x, t)$ – комплексная амплитуда, ω и k удовлетворяют дисперсионным соотношениям и условию малости амплитудно-частотной модуляции

$$\frac{\partial A}{\partial x}/kA \sim \frac{\partial A}{\partial t}/\omega A \sim \varepsilon \ll 1, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}/kA \sim \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}/\omega A \sim \varepsilon^2$$

Предполагаем также, что нелинейное слагаемое, стоящее в правой части уравнения (3) имеет порядок малости ε^2 , т.е. отношение амплитуды изгибной волны к ее длине является малой величиной $\left(\frac{W_0}{L} \sim \varepsilon\right)$. Используя метод усреднения по «быстрым» переменным [5], перейдем от исходного уравнения к укороченному уравнению. В системе координат, движущейся с групповой скоростью $\xi = x - V_{gr}t$, $\tau = t$, оно является нелинейным уравнением Шредингера относительно комплексной амплитуды:

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} - \beta \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \alpha |A|^2 A = 0, \quad (8)$$

где $\beta = \frac{1}{2} \frac{dV_{gr}}{dk} = \frac{1}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2}$ – дисперсионный параметр, α – нелинейный параметр, который

определяется выражением $\alpha = \pm \frac{3\tilde{\alpha}k^4}{2E\omega} \left[\left(1 + D \left(\frac{C_0^2}{\aleph C_r^2} - 1 \right) k^2 \right)^2 + 4Dk^2 \right]^{-1/2}$, где знак «плюс»

соответствует нижней дисперсионной ветви, а «минус» – верхней. Для сравнения, для стержня модели Бернулли Эйлера (в это случае в уравнении (3) второе и третье слагаемые в квадратных скобках отсутствуют) $\alpha = \frac{3\tilde{\alpha}k^4}{2E}$.

Уравнение Шредингера является фундаментальным уравнением нелинейной физики. Оно используется для описания слабонелинейных диспергирующих волн различной физической природы [5-7], и позволяет, в частности, исследовать устойчивость квазигармонической волны (7) по отношению к малым начальным возмущениям.

Согласно критерию Лайтхилла [7], если нелинейный и дисперсионный параметры уравнения

Шредингера имеют противоположные знаки, т.е. $\alpha \cdot \beta = \frac{d^2\omega}{dk^2} \cdot \alpha < 0$, то в системе будет наблюдаться самомодуляция (модуляционная неустойчивость), трансформирующая квазигармоническую волну (7) в набор волновых пакетов. Для модели Бернулли-Эйлера критерий Лайтхилла не выполняется, так как $\alpha > 0$ и $\frac{d^2\omega}{dk^2} > 0$

Модель Тимошенко дает иной результат: квазигармонические изгибные волны могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми в зависимости от частоты и принадлежности к той или иной дисперсионной ветви. Волны, описываемые верхней дисперсионной ветвью, всегда будут неустойчивыми. Для нижней ветви знак параметра дисперсии уравнения Шредингера может изменяться, что связано с наличием у нее точки перегиба. Поэтому в интервале $0 < k < k^*$, где k^* – точка перегиба дисперсионной кривой, волны устойчивы к самомодуляции (именно здесь модели Бернулли-Эйлера и Тимошенко совпадают по своим дисперсионным свойствам), и неустойчивы в интервале $k > k^*$.

На рис.1 изображена диаграмма, показывающая при каких частотах ω и волновых числах k возможна модуляционная неустойчивость изгибных волн в стержне. Область устойчивости отмечена квадратами, область неустойчивости – крестами. Расчеты производились при коэффициенте Тимошенко $\aleph = 0.98$, коэффициенте Пуассона $\nu = 0.3$ и $D = 0.04$.

Величина области модуляционной неустойчивости изгибных волн зависит и от упругих свойств материала стержня. С увеличением коэффициента Пуассона область устойчивости уменьшается, как это показано на рис.2 при $D = 1$.

Рис.1.

При различных длинах волн области устойчивости полностью подобны, а коэффициент подобия зависит только от D , так при $D = 0,01; 0,04; 0,1$ коэффициенты подобия имеют соответственно значения 10; 5 и 3,7.

Рис.2.

При учете физической нелинейности в уравнении (3) коэффициент нелинейности (4) будет зависеть от модулей упругости Ламе второго (λ, μ) , третьего (ν_2, ν_3) и четвертого (γ_4)

порядков: $\tilde{\alpha} = \frac{7}{4}\lambda + \frac{3}{2}\mu - \frac{7}{6}\nu_2 - \nu_3 - \gamma_4$. В этом случае для металлических стержней

параметр нелинейности $\tilde{\alpha}$ становится отрицательным, что приводит к выполнению критерия Лайтхилла для стержня модели Бернулли-Эйлера. Таким образом, квазигармонические изгибные волны и в технической теории стержней будут неустойчивы к самомодуляции. В стержне модели Тимошенко области устойчивости и неустойчивости меняются местами, а именно: волны, описываемые верхней дисперсионной ветвью, всегда устойчивы; волны, описываемые нижней дисперсионной ветвью, неустойчивы при $0 < k < k^*$ и устойчивы $k > k^*$.

Если предположить существование композитного материала с $\tilde{\alpha} > 0$, то области модуляционной устойчивости и неустойчивости в физически нелинейных стержнях из

композитов будут такими же, что и в металлических стержнях при учете только геометрической нелинейности.

Список литературы

- [1] Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. - М.: Наука, Физматлит, 2002. - 208 с.
- [2] Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории стержней, пластин и оболочек. - М.: ВИНТИ, 1973. - 272 с.
- [3] Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. - М.: Наука, 1979. - 296 с.
- [4] Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах. / Ред. совет: Фролов К.В. (пред.). – М.: Машиностроение. Т.1: Колебания линейных систем. 2-е изд., испр. и доп. / Под ред. Болотина В.В., 1999. - 504 с.
- [5] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. - М.: Наука, 1984. - 432с.
- [6] Кадомцев В.В. Коллективные явления в плазме. - М.: Наука, 1988. - 304с.
- [7] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. - М.: Мир, 1977. - 622с.

Дата поступления: 12 июня 2019 г.

BELT CONVEYOR EQUIPPED BY VIBRATION ENERGY HARVESTING DAMPER

© George Nerubenko¹, Vitaliy Krupenin², Dmytriy Gurevych³

¹NER*MAR Limited, Canada

optimalproject@hotmail.com,

²IMASH RAN, Russia

krupeninster@gmail.com

³Mega Automation Inc, Canada

dgurevych@mega-automation.ca

Abstract. The belt conveyor functioning is accompanied by aggressive vibrations during work in the agricultural environment. The most important is the discharge point where the transporting products leave a belt. The vibrations reduce the accuracy of the automatic product handling process. It was necessary to solve three interconnected problems of a conveyor: the accurate automatic detection of an exit product position, a reduction of intensive vibrations and the proper usage of damped vibration energy. The considered example of an automatic system for robotic handling and / or manipulating of the exit objects (products) includes a belt conveyor, the laser vision sensor arrays, operational arm and vibration energy harvesting dampers. The vibration energy harvesting dampers are invented by authors and installed at exit of a conveyor. Such installation configuration gives the opportunity to eliminate the vibrations at discharge area and convert the damped vibration energy into electrical power. The theoretical modeling was verified by experiments. Test results prove the concept proposed in study and confirm the efficiency of the proposed systems for optimizing of belt conveyor operation.

Keywords: belt conveyor, vibration energy harvesting damper.

ЛЕНТОЧНЫЙ КОНВЕЙЕР, СНАБЖЕННЫЙ ВИБРАЦИОННЫМ ДЕМПФЕРОМ И ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕМ ЭНЕРГИИ

© Виталий Львович Крупенин¹, Георгий Петрович Нерубенко², Дмитрий Юрьевич Гуревич³

¹NER*MAR Limited, Канада

optimalproject@hotmail.com

²Институт машиноведения им. А.А. Благонравова, Москва, Россия

krupeninster@gmail.com

³Mega Automation Inc, Канада

dgurevych@mega-automation.ca

Аннотация. Функционирование ленточного конвейера сопровождается агрессивными вибрациями во время сельскохозяйственных работ. Наиболее важным является район выхода конвейера, где транспортируемый продукт покидает ленту. Вибрации уменьшают точность процесса автоматической обработки продукта. Было необходимо решить три взаимосвязанные проблемы конвейера: точное автоматическое определение положения

продукта, покидающего ленту, снижение интенсивных вибраций и надлежащее использование демпфируемой вибрационной энергии. Рассматриваемый пример автоматической системы роботизированной обработки и/или манипулирования объектами (продуктами) покидающими ленту, включает в себя ленточный конвейер, систему лазерного видения, операционную руку и вибрационные демпферы, снабженные преобразователями энергии. Вибрационные демпферы, снабженные преобразователями энергии, изобретены авторами и установлены на выходе конвейера. Подобная конфигурация установки даёт возможность уменьшить вибрации на выходе из конвейера и преобразовать энергию устранённых вибраций в электричество. Теоретическое моделирование было проверено экспериментально. Результаты испытаний подтвердили концепцию, предложенную при исследованиях, и доказали эффективность предложенной системы для оптимизации работы ленточного конвейера.

Ключевые слова: ленточный конвейер, вибрационный демпфер, снабженный преобразователем энергии.

The influence of severe vibrations must be reduced during operations of the belt conveyor. The discharge area of a conveyor is the most critical region where vibration suppression is needed. The robotic arm [1; 2] is operating at this area, so it is very important to provide all necessary measures for ideal operation. Such measures have to secure the fast performance of belt conveyor (equipped by electromechanical robotic system) with a perfect accuracy or minimize system energy consumption. The study of vibration suppression combined with parallel generation of the electrical power (energy harvesting) using suppressed vibrations is presented. The today technology is widely using the energy harvesting units having a certain oscillating weight allowing (in parallel to vibration mitigation) capture, convert and transfer some amount of wasted power, however the authors would concentrate on their own R&D [3–6], [12]. The authors invented and developed Vibration Energy Harvesting Dampers (VEHD) consisting of tuned mass damper (TMD) and an alternator or generator of electricity. The specific of proposed VEHD is to provide self-tuning to dampen harmonics over a wide interval of fluctuated frequencies using the control system of TMD. The purpose of this study is to demonstrate the benefits of VEHD implanting into belt conveyor-feeder system for rising the operation efficiency and keeping the high accuracy of an arm functioning.

Major schemes and functional components of a proposed electromechanical system were synthesized in [1 - 12]. It is necessary to point out the proposed system is a sort of the universal one. The developed approach is applicable in various industries, like agriculture (as discussed here), metal plate packing and handling, furniture sheets cut out and shaping and so on. The proposed approach allows take into an account the inertia forces, aerodynamic resistance, mechanical properties of handling materials and configurations, etc. Such approach gives the opportunity to provide fast performance with perfect accuracy or minimize energy consumption. A schematic composition of proposed system is in Fig. 1. The belt conveyor 1 has the transporting load 2 (bins, bags, sheets, plates, boxes, etc) on its working surface at discharge area. The arm 3 has to capture load 2 (lift up / relocate / reload / or to do something else) in accordance to required technological program. An accelerometer 4 (which could measure the vibrations in 3D) is located in a discharge area of the considered belt conveyor-feeder. The laser vision system 5 is sending its information to the data analyzing and movement planning unit 6.

One stream of signals from unit 6 is going to unit 7 for formulation of the arm movements. A signal from unit 7 is coming to block 8 for transformation of the arm's coordinates and then going to unit 9 for the interpolation. After that a signal from unit 9 is running to unit 10 for a program correlation.

The unit 10 delivers the signal to the actuator 11 serving an arm 3 and a conveyor's motor 12. The purpose of described subsystem is to increase an accuracy of the arm operation. Here the authors must note that the presented chain is a general one: some units could be combined; other units could be split into more detailed components. However, the main logic is directed in it.

Fig. 1. Graphical presentation of a system general composition

The signal sent by an accelerometer 4 is treated in unit 6 and then goes to commander 13, where the commands are built for actuator 14. An actuator 14 is servicing the VEHD 15, which is suppressing the conveyor vibrations and generate electrical power that is directing or to separate source of energy of to grid (not shown in Fig. 1).

It is obvious that vibrations of a conveyor are reducing the accuracy of a subsystem 5-6-7-8-9-10-11- 3 / 12 operation. Hence, the suppression of undesired conveyor's vibrations is an effective tool for efficiency raise from all points of view.

The conveyor's vibrations have the permanent source like motor and other sources having exploitation nature. The electric drive motor is of 3.7 kW (see Fig. 2), providing for conveyor a maximum speed of transporting as 0.3 m/s.

Let's consider for basic explanation the simplest one-dimensional version of VEHD (see Fig. 3). Assume that an object (conveyor) could be modelled by one-degree-of-freedom system having mass M , springing element with stiffness coefficient k_0 and viscous friction coefficient b_0 . A conveyor is vibrating along coordinate axis X as shown in Fig. 3, so the conveyor's movement coordinate is $X(t)$, where t is time.

Fig. 2. The conveyor's motor. 1 – motor; 2 – flange

The body 1 of VEHD is attached firmly to object. VEHD consists of two major parts: tuned mass damper and alternator. The outer casing of VEHD is firmly attached to the conveyor, and the mass of casing is included in M . TMD m is connected to a casing by means of springs having the stiffness k_1 and the viscosity factor b_1 . A mass m is vibrating in the same direction as a mass M . The coordinate of vibrations of m is $x(t)$. It is shown in [3; 4] that the highest effectiveness of VEHD could be reached when $k_1/m = \omega^2$ is adjusted to variable external force frequency ω , or $k_1/m = \omega^2$, however it must be used the special control device in this case providing measuring of the changing values ω and adjusting stiffness coefficient of spring k_1 . In that case the magnitudes of k_1 would be variable. The diagram layout of that control device is shown in Figure 1 by “magenta” subsystem 4-6-13-14-15.

The electromagnetic subsystem is the inducing current i , and L is an inductance, R is an electrical resistance, where R_c is a coil resistance and R_d is a load resistance, and $R = R_c + R_d$.

Fig. 3. One-dimensional VEHD

Assume that the external excitation forces could be presented by term $H \sin(\omega t)$, where H is the amplitude of external force and ω is the frequency. The system “VEHD and one-degree-of-freedom object” dynamics is described by a system of the ordinary differential equation with three variables $X(t)$, $x(t)$, $i(t)$, (see for instance [3 - 5], [11], [12])

$$M\ddot{X} + b_1(\dot{X} - \dot{x}) + j\omega^2(X - x) + b\dot{X} + kX = H \sin \omega t, \quad (1)$$

$$m\ddot{x} - b_1(\dot{X} - \dot{x}) - j\omega^2(X - x) + Fi = 0, \quad (2)$$

$$Li + Ri - F(\dot{x} - \dot{X}) = 0, \quad (3)$$

where $\dot{} = d/dt$ and F – linkage factor. The linkage factor could be determined in most cases as $F = BL_s$, where B is field flux and L_s is characteristic size.

The system of equations (1) – (3) includes the specific features: a. automatic frequency tuning $\omega = \omega$ and b. the link between vibrations of tuned mass damping subsystem and dynamic behaviour of current generating subsystem (equation (3)). It gives the possibility be focused on the dynamic properties of TMD coupled to an alternator.

It was decided to make the preliminary vibration test for determination of possible resonances in a conveyor's discharge area. The tests were done in frequency range 0 – 100 Hz for vertical vibrations. It was registered one visible spike of 1.1 mm at 10.8 Hz. The analysis shows that that situation (resonance at 10.8 Hz) is due to framed structure of the belt conveyor transporting portion. All other amplitudes at other frequencies were negligible, so to be not worth considering. Hence, the accuracy of an arm operation would be dictated partially by this vibratory issue: the position of a transported product should be “fretted”, deviated from central point periodically in range of ± 1.1 mm. The discovered situation gives an opportunity to build one-degree-of-freedom model of a conveyor and use the equation system (1) – (3) for dynamical study of total object.

Based on these results, received data and using the equation (1) it is possible to model the theoretical amplitude - frequency characteristic of an object vertical vibrations (green solid curve) as shown in Fig. 4. There is the abscissa axis for frequencies in Hz, and ordinate axis for amplitude values (in millimetres). The amplitude - frequency characteristic in Figure 4 presents that peak of the amplitude (resonance) of 1.092 mm is measured at frequency 10.8 Hz, so one can state that the built model reflects successfully the real dynamics.

Fig. 4. Theoretical amplitude-frequency characteristics for examined conveyor

The received parameters allow select the design data for VEHD. Let's remind that the main purpose of VEHD is to satisfy two conditions: 1. a reduction of the heaving levels, 2. a generation of an additional electrical energy due to the heaving mitigation. After several probes it was decided that the designed movable mass m of TMD would be 279 kg. The system of equations (1) – (3) was

used for determination of main parameters of VEHD, keeping in mind that $k_1/m = \omega^2$ and numerical relationships of [3; 4] for a calculation of an alternator parameters. Finally, the amplitude - frequency characteristics of considered conveyor-feeder with implanted VEHD could be built (see Fig. 5) exploiting the system of differential equations (1) – (3). A green curve still reflects the dynamical behaviour of conveyor without installed VEHD, and this curve coincides to green curve in Figure 4 (the system of a coordinates in Fig. 5 is similar to a system of a coordinates in Fig. 4). The blue dotted curve in Figure 5 stands for the damped vibrations of a conveyor when VEHD is installed. The maximum damped amplitude (according to blue dotted line) is 0.585 mm at 7.7 Hz, and the amplitude at original resonance point (10.8 Hz) is 0.45 mm.

The brown dashed curve in Fig. 5 reflects TMD mass m oscillations. The observer can see that TMD curve is repeating in some way the character of a conveyor damped vibration curve. The peak of TMD curve is equal to 3.533 mm at 8.9 Hz. VEHD peak of useful power could be plotted by solid magenta curve (see Fig. 6). There is the abscissa axis for frequencies in Hz, and ordinate axis for peak values of useful power (in kW). VEHD useful power is calculating by formula $P(\omega) = 0.5 R_d \dot{t}^2$, where $R_d = 0.72R$. The peak of useful power is 1.63 kW at 10 Hz.

Fig. 5. Theoretical dynamical characteristics for a object when VEHD installed

Fig. 6. Theoretical power characteristics for a object when VEHD installed

The prototype of VEHD focused on extracting the possibly maximum power from vibrating chassis was designed and fabricated. The design parameters were composed specifically for VEHD mounting at the discharge area vibrating in range of 0 Hz – 40 Hz. The selected mass of fabricated movable TMD part in VEHD was 1/4 of model mass or 69.75 kg. All other main characteristics were based on values presented in modelling case. Four units of VEHD were vertically installed close to perimeter of a discharge area. The photo of the test rig system master control box

incorporating the designed scheme presented in Fig. 1 (without central computer) is shown in Fig. 7.

There is one peak only of 0.5 mm at 7.9 Hz. The measured combined maximum value of useful power delivered by four VEHD is equal to 1.59 kW.

The comparison of values metered during tests to data received theoretically shows that the deviation of obtained data from theoretically predicted is small; and it could be concluded that these results confirm a satisfactory compliance of dynamic and energy properties of real fabricated VEHD to theoretically predicted model.

As a result, one can see that the maximal values of amplitude of disturbing vibrations reduce from 1.1 mm (recorded at 10.8 Hz) to 0.5 mm (recorded at 7.9 Hz). It is a dual benefit – a reduction of amplitude in 2.2 times and shifting of the resonance frequency to lower magnitudes (from 10.8 Hz to 7.9 Hz). Hence, the overall vibration acceleration is reduced in 4.11 times. These issues provide the increase of effectiveness and accuracy of the arm manipulation. Also, the system can generate for free the additional 1.6 kW. The presented VEHD could be considered as a module easy for population at the agricultural engineering practice.

Fig. 7. Master control system box (left) and safety control panel (right)

There is one peak only of 0.5 mm at 7.9 Hz. The measured combined maximum value of useful power delivered by four VEHD is equal to 1.59 kW.

The comparison of values metered during tests to data received theoretically shows that the deviation of obtained data from theoretically predicted is small; and it could be concluded that these results confirm a satisfactory compliance of dynamic and energy properties of real fabricated VEHD to theoretically predicted model.

As a result, one can see that the maximal values of amplitude of disturbing vibrations reduce from 1.1 mm (recorded at 10.8 Hz) to 0.5 mm (recorded at 7.9 Hz). It is a dual benefit – a reduction of amplitude in 2.2 times and shifting of the resonance frequency to lower magnitudes (from 10.8 Hz to 7.9 Hz). Hence, the overall vibration acceleration is reduced in 4.11 times. These issues provide the increase of effectiveness and accuracy of the arm manipulation. Also, the system can generate for free the additional 1.6 kW. The presented VEHD could be considered as a module easy for population at the agricultural engineering practice.

Conclusions

1. The developed vibration energy harvesting dampers completed with the special control device of a springing element provide the efficient solution for a performance improvement of the agricultural belt conveyor-feeder systems.
2. The provided solution allows to solve multiple problems in the belt conveyor-feeder systems:
 - the arm's functioning with increased performance and perfect accuracy during outgoing product handling;
 - the arm's functioning with a minimal energy consumption;
 - the additional electrical power generation using the suppressed vibrations of the operating belt conveyor-feeder;
 - the increasing of the lifetime of all systems in operating belt conveyor-feeder.
3. The proposed approach gives the tool to combat the extensive inertia forces, aerodynamic resistances, wind loads, and other loads, which could be registered during belt conveyor-feeder systems operation.

References

- [1] Nerubenko G.P., Trunin S.F. Design of robot's drives. Textbook. Publisher: Shipbuilding Institute. - Nikolaev, 1985. - 41 p. (in Russian)
- [2] Нерубенко Г. П., Ватипко Б. А., Щур П. А., Справочник по перегрузочному оборудованию на морском транспорте (The handbook of loading equipment in marine transport). / 221 с. ил. – Одесса: Маяк, 1990 (in Russian).
- [3] Bograd, A, Nerubenko, G, Nerubenko, C. Energy Harvesting in Vehicle's Drive. Proceedings of the 2nd International Conference of Energy Harvesting, Storage, and Transfer (EHST'18). Niagara Falls, Canada, Paper No. 112 (2018).
- [4] Nerubenko et al. Tuned mass dampers as energy harvesters for railways. Proceedings of ISMA 2018 and USD2018. Leuven, Belgium. pp. 1689-1702 (2018)
- [5] Nerubenko G., Krupenin V., Nerubenko C. Vehicle Hybrid Free – Piston Engine – Generator. 16th International Scientific Conference “ENGINEERING FOR RURAL DEVELOPMENT”. Proceedings. Jelgava, Latvia, May 24.-26, 2017. p. p. 114-120
- [6] Nerubenko et al. “Vibration Energy Harvesting Damper”. U.S. Patent Application No. 16/119,346. 08.31, 2018.
- [7] Priya S., Inman D. L.. Energy Harvesting Technologies. Springer. Verlag. 2009
- [8] Cottone F., Energy Harvesting: introduction. NiPS Summer School 2015 – July 7-12th -Fiuggi (Italy). 50 p.
- [9] Ojha S. et al. Performance Monitoring of Vibration in Belt Conveyor System. Journal of Engineering Research and Applications. Vol. 4, Issue 7 (Version 6), July 2014, pp.22-31
- [10] Cottone F. et al. Energy harvester apparatus having improved efficiency. US Patent 8350394. 01.08.13
- [11] Patel P., Development of Electromagnetic Micro-Energy Harvesting Device. Thesis. University of Waterloo. Waterloo, Ontario, Canada, 2013.
- [12] Nerubenko, G., Gurevych, D., and Kolomier, P., Dynamics of Amphibious All-Terrain Vehicle's Chassis Having Vibration Energy Harvesting Dampers. SAE Technical Paper 2019-01-1510, 2019, doi:10.4271/2019-01-1510.

Дата поступления: 3 мая 2019 г.

УДК 621.539.43.001.24

ПРОБЛЕМЫ МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЯ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ НА СТАДИИ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИН

Часть 1. Методика исследования распространения трещин при циклическом нагружении

© Александр Никитович Романов

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения
им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

alrom37@mail.ru

Аннотация. Предложена методика исследования скоростей развития трещин при циклическом нагружении в широком диапазоне температур. Приведены основные силовые и деформационные параметры для описания скоростей развития трещин, кинетики накопления повреждений и предельных состояний.

Ключевые слова: циклическая нагрузка, распространение трещин, метод формирования, раскрытие трещин, скорость распространения трещин.

MATERIALS SCIENCE PROBLEMS IN MECHANICS OF DEFORMATION AND FRACTURE AT STAGE OF CRACKS PROPAGATION

Part 1. The study's method of the cracks propagation at the cyclic loading

© Alexander Romanov

IMASH RAN, Moscow, Russia

alrom37@mail.ru

Abstract. The technique of research of speeds of development of cracks at cyclic loading in the wide range of temperatures is offered. The key power and deformation parameters for the description of speeds of development of cracks, kinetics of accumulation of damages and limit states are specified.

Key words: cyclic loading, cracks propagation, method of heeting, crack's opening, speed of crack propagation.

В отличие от ранее рассмотренных процессов деформирования конструкционных материалов на стадии до образования трещин [1-15] данный цикл связан с рассмотрением процессов разрушения на стадии развития трещин при статическом и циклическом нагружении.

Одной из важных задач механики деформирования и разрушения является расчетное и экспериментальное исследование закономерностей развития трещин при однократном и циклическом нагружении. Решение этой задачи становится все более актуальным в связи с непрерывным повышением рабочих параметров (нагрузок и температур) машин и

конструкций, применяемых в энергомашиностроении (в том числе в реакторостроении), в летательных аппаратах, в химическом и металлургическом оборудовании. Рабочие температуры для несущих элементов указанных машин и конструкций составляют 250-600⁰C и более, числа циклов нагружения 10-10⁴ и более. Повышение нагрузок, температур и времени нагружения приводит к увеличению неупругих деформаций за счет статической и циклической ползучести, что, в свою очередь, определяет более раннее образование и более интенсивное развитие трещин. [1-15].

При исследовании кинетики трещин статического и циклического разрушения используются критерии и методы линейной и нелинейной механики разрушения. К числу этих критериев относятся силовые (коэффициенты интенсивности напряжений K_c), деформационные (критическое раскрытие трещин δ_c , размер пластической зоны r_t , перемещение берегов трещины) и энергетические (энергия продвижения трещины γ_k , G_c и J_c – интеграл).

Определение указанных критериев связано с измерением длины трещины l , расчетом номинального напряжения $\Delta\sigma_n$ (для определения ΔK_I), измерением размаха номинальной упругопластической деформации Δe_n , размаха перемещений берегов трещины $\Delta\delta$ (раскрытие трещины), размера пластической зоны r_t по мере увеличения числа циклов нагружения N . Для измерений используются различные динамометрические устройства (механические, гидравлические, упругие с датчиками сопротивления). Для измерения Δe_n применяются механические, электромеханические, оптические, фотоэлектронные, индуктивные и другие типы деформометров. Перемещения также измеряются механическими, оптическими, электромеханическими, индуктивными, емкостными устройствами, как правило, с малыми базами (от 0,5 до 2-3 мм). Размер пластической зоны r_t может быть определен с помощью интерферометров и металлографических микроскопов. Для измерения длин трещин l наибольшее применение получили следующие методы: оптические, электросопротивления, ультразвуковые, токовихревые, датчиков последовательного разрыва, киносъемки и др.

При такого рода исследованиях в системах нагружения предусмотрена возможность проведения статического и циклического деформирования с варьируемыми скоростями и коэффициентами асимметрии цикла, с обеспечением выдержек при заданных деформациях или напряжениях, с автоматическими измерениями и регистрацией усилий и номинальных деформаций [15].

Для измерения длин трещин при высоких температурах в основном используются оптические и ультразвуковые методы, метод электропотенциалов и электросопротивления. Для измерения местных упругопластических деформаций Δe_{max} в вершине трещины, а также распределения этих деформаций в связи с определением коэффициентов интенсивности деформаций ΔK_I наиболее приемлемым оказывается метод прецизионных делительных сеток. Этот метод позволяет осуществлять измерения на базах от 0,02 до 0,1 мм непосредственно у вершины трещины. Диапазон деформаций, измеряемых этим методом, лежит в пределах от 1-2 до 50-70%. При этом применяемые оптические и другие средства для измерения размеров деформируемых сеток могут одновременно использоваться для измерения длины трещин l и раскрытия трещин δ_t .

Наибольшее применение для изучения развития трещин в широком диапазоне температур получили плоские образцы с начальными трещинами при внецентренном растяжении. Однако образцы такого типа целесообразно использовать при сравнительно низких уровнях размахов коэффициентов интенсивностей напряжений, когда размеры пластических зон r_t меньше длины трещины l и при положительных значениях коэффициентов асимметрии по напряжениям. При образовании в опасном сечении развитых упругопластических деформаций и деформаций ползучести и при знакопеременном нагружении следует применять осевое нагружение образцов с регистрацией номинальных деформаций. При

однократном и малоцикловом нагружении в условиях комнатных температур используются плоские образцы с симметричными центральными или боковыми трещинами. Прецизионные делительные сетки с малым шагом наносятся в зоне трещин на боковых полированных поверхностях образцов. При повышенных температурах в силу определенных трудностей с получением равномерного распределения температур по ширине и длине рабочей части применение плоских образцов становится менее рациональным, чем цилиндрических трубчатых. Для обеспечения возможности измерения местных деформаций и размеров пластических зон в вершине трещины статические и малоцикловые испытания при высоких температурах должны проводиться в соответствующих инертных газовых средах или в вакууме.

Ниже приводится описание методики экспериментального получения перечисленных характеристик для определения условий распространения трещин при статическом и малоцикловом нагружении в том числе с изотермическим высокотемпературным нагревом [15-17].

Схема упругопластического деформирования и разрушения при малоцикловом нагружении показана на рис.1. Образец из упрочняющегося материала в исходном ненагруженном состоянии имеет начальную длину трещины l_0 (рис.1,а). При нагружении образца (рис. 1,б) в исходном (нулевом) полуцикле ($k = 0$) с номинальными растягивающими напряжениями $\sigma_n = \sigma_n^{(0)}$, соответствующими номинальным деформациям $e_n^{(0)}$, в вершине трещины возникает зона макропластических деформаций размером $r_T^{(0)}$ (заштрихована наклонными линиями); при этом края трещины (сплошные линии) у свободного конца получают перемещения $v^{(0)}$ в направлении напряжений $\sigma^{(0)}$. Перемещение в вершине начальной трещины $\delta^{(0)}$ (раскрытие трещины) при этом составит $\delta_T^{(0)}$. Деформации в вершине трещины достигают максимальной величины $e_{\max}^{(0)}$. Нагружение в нулевом полуцикле сопровождается увеличением длины трещины на размер $\Delta l^{(0)}$. В соответствии с этим перемещения $v^{(0)}$ и $\delta^{(0)}$ являются следствием не только упругопластических деформаций в вершине трещины, но и процесса разрушения в зоне с размером $\Delta l^{(0)}$.

При разгрузке образца и нагружении сжатием в первом полуцикле ($k = 1$) упругопластические деформации в вершине трещины уменьшаются до величины $e_{\max}^{(1)}$, оставаясь деформациями растяжения ($e_{\max}^{(1)} < e_{\max}^{(0)}$) при небольших нагрузках сжатия или переходя в деформации сжатия при больших нагрузках сжатия. Зона пластичности в первом случае (заштрихована наклонными в другую сторону линиями) сокращается. При этом края трещины сходятся, и перемещения у свободного края трещины v' получаются меньше, чем в первом полуцикле ($v^{(1)} < v^{(0)}$); аналогичное соотношение выполняется и для раскрытия трещины ($\delta^{(1)} < \delta^{(0)}$). В связи с неравномерным распределением деформаций в нулевом и первом полуциклах края трещины у ее вершины получают искривление.

В k -полуцикле (рис. 6.1,в) при растягивающих напряжениях $\sigma^{(k)} = \sigma^{(0)}$, когда приращение трещины $\Delta l^{(k)} < l_0$, номинальные $e_n^{(k)}$ и местные $e_{\max}^{(k)}$ упругопластические деформации, размер зоны пластичности $r_T^{(k)}$ и перемещения краев трещины $\psi^{(k)}$ и $\delta^{(k)}$ оказываются больше, чем в первом полуцикле. После увеличения трещины на длину $\Delta l^{(k)}$ края трещины у ее вершины сохраняют следы искривления от предыдущих циклов нагружения.

Рис.1. Схема измерения деформаций, перемещений и раскрытия трещины.

Таким образом, при исследовании (в деформационной постановке) процессов разрушения в условиях высокотемпературного малоциклового нагружения для заданного числа полуциклов k и времени τ должны быть измерены и зарегистрированы следующие величины: $\sigma^{(k)}$, $e_n^{(k)}$, $e_{\max}^{(k)}$, $v^{(k)}$, $\delta^{(k)}$, $r^{(k)}$ и $\Delta l^{(k)}$. Величины $\sigma^{(k)}$ и $e_n^{(k)}$ в процессе нагружения измеряются с помощью динамометров и деформометров с датчиками сопротивления, деформации $e_{\max}^{(k)}$ и перемещения $v^{(k)}$ и $\delta^{(k)}$ - с помощью сеток и рисков. Приращения длин трещин $\Delta l^{(k)}$ измеряются с помощью оптических средств и сеток, а размеры зон r_T измеряются по следам пластических деформаций. Схема сеток и рисков в зоне исходного надреза и трещины для образцов с длиной зоны разрушения до 20-30 мм показана на рис. 6.2. Квадратная сетка (преимущественно с шагом 0,1 мм) наносится непосредственно у вершины трещины в зоне предполагаемого ее развития. На достаточном удалении от вершины трещины расстояние между соседними парами сеток может быть увеличено до 0,5-2 мм. Перемещения краев надреза и трещин измеряются по рискам на расстояниях от вершины трещины, равных 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 1 мм и более. Указанная выше неравномерность шага сеток и рисков определяется градиентами деформаций в вершине трещины и длиной трещины.

Все измерения в зоне трещин осуществляются с помощью оптических методов как наиболее точных и используемых обычно в качестве эталонных.

Исследования распространения трещин проводили на трубчатых образцах с предварительно созданной трещиной (рис.2). В образце с наружным диаметром 21 мм и толщиной стенки 1,5 мм просверливается сквозное отверстие диаметром 1 мм. Затем электроискровым методом

делается надрез шириной 0,1 мм и длиной 1 мм на каждую сторону отверстия. После этого на усталостной машине в местах надреза выращивают трещины длиной около 0,5 мм.

Рис.2. Рабочая зона образца с подготовленной на нем исходной трещиной

Для нанесения сетки в зоне предварительно выращенной усталостной трещины образец полируют, а затем по фронту ее будущего роста наносится сетка с шагом от 0,020 до 0,10 мм в зависимости от удаления от вершины исходной трещины. Сетка наносится на приборе ПМТ-3, к которому изготовлено специальное устройство для нанесения царапин на цилиндрический образец (рис.3). Последний закрепляется в центрах. Подвижный центр установлен на подшипниковых шариках, размещенных в прижимных планках и в корпусе подвижного центра. Круговое вращение образца осуществляется с помощью самотормозящейся червячной пары. Нанесение сетки производится алмазной пирамидой при перемещении столика прибора в продольном и поперечном направлениях. Контроль угла вращения образца осуществляется по лимбу.

Для периодического контроля раскрытия трещины (перемещения ее берегов) у краев надреза наносятся риски, и измерения перемещения краев исходной трещины проводят в местах нанесения вертикальных рисок.

Подготовленный образец устанавливается затем в захваты испытательной машины; в нашем случае испытания проводили при растяжении-сжатии на машине для малоцикловых испытаний типа УМЭ-10т с размещенной на ней вакуумной камерой [15]. При этом нагрев образца осуществляли радиационным способом за счет размещения стержневого нагревателя из жаропрочного или тугоплавкого материала внутри трубчатого образца (рис.4).

Данный метод нагрева оказывается наиболее пригодным при проведении такого рода исследований, поскольку значительно облегчается доступ к внешней поверхности образца, на которой также может быть размещен деформометр для определения изменений номинальных деформаций в процессе нагружения. Кроме того, при этом способе нагрева возможны изучение структурных изменений по фронту распространяющейся трещины и

пластических зон в ее вершине (поскольку испытания осуществляются в вакуумной камере), а также упрощается наблюдение за сеткой и рисками и их измерение.

Рис.3. Устройство для нанесения сетки на трубчатом (цилиндрическом) образце с использованием микротвердомера ПМТ-3

Для наблюдения за структурой и измерения сетки на крышке вакуумной камеры размещен металлографический микроскоп типа МВТ. Измерение сетки осуществляется с помощью микрометрической оптической головки типа МОВ-1-15. Фотографирование структуры или сетки осуществляется с помощью микрофотонасадок типа МФН-12 при увеличениях до 100 крат при рабочем расстоянии объектива около 80 мм.

На рис.5 приведены отдельные моменты развития деформаций в вершине трещины. Для наблюдения за развитием трещины, а также для измерения раскрытия трещины и деформаций в ее вершине при больших увеличениях используется также промышленная телевизионная установка, присоединяемая непосредственно к металлографическому микроскопу. Изображение зоны развития трещины может быть подано на телеэкран.

В связи с тем, что при высоких температурах частота нагружения и форма цикла могут существенно влиять на сопротивление развитию трещины, указанные установки модернизированы для проведения на них программных испытаний, в том числе при двухчастотной нагружении [15-17], нагружении с временными выдержками на экстремальных уровнях нагрузки в полувциклах (либо в одном из них – в полувцикле растяжения или сжатия), при длительном статическом нагружении.

Рис. 4. Система нагрева трубчатого образца при малоцикловых испытаниях: 1 – захват; 2 – деформометр; 3 – нагреватель; 4 – экран; 5 – образец

Рис.5. Развитие деформаций в вершине трещины и перемещение ее берегов после очередного цикла и последующего полуцикла при 650⁰С.

На рис. 6 представлены графики изменения перемещений $v^{(k)}$ и размаха перемещений $\Delta v^{(k)}$, величины раскрытия трещин $\delta^{(k)}$ и $\Delta \delta^{(k)}$, размах ее раскрытия, размера пластической зоны r_T , деформаций в вершине трещины $e_{\max}^{(k)}$ и размаха деформаций в вершине $\Delta e_{\max}^{(k)}$. Видно, что изменение указанных характеристик с увеличением числа циклов нагружения на разных стадиях нагружения различно, что может быть объяснено, как будет показано ниже, рядом причин, связанных с особенностями образования пластических зон и направлением развития трещин.

Рис.6. Зависимость характеристик деформирования и разрушения от числа циклов нагружения для заданного уровня номинальных напряжений

Для трубчатого образца, представленного на рис.2, коэффициент интенсивности напряжений подсчитывался по соответствующим зависимостям для плоского образца шириной b с центральной трещиной (где r – средний диаметр цилиндрического образца) или для плоского образца с периодическими трещинами (шаг расположения трещин равен $2b = \pi r$):

$$\Delta K_I = \Delta \sigma_n \sqrt{\pi l} f(l/b). \quad (1)$$

Для указанных случаев схематизации цилиндрического образца поправочная функция $f(l/b)$ в виде:

$$f(l/b) = \sqrt{(2b/\pi l) \operatorname{tg}(\pi l/2b)} \quad (2)$$

или в полиномной форме

$$f(l/b) = \sqrt{b/c} [1 - 0,5(l/b) + 0,326(l/b)^2], \quad (3)$$

где c – расстояние от вершины исходной трещины до края образца (рис.2)

Принято, скорости распространения трещины описываются в зависимости от коэффициента интенсивности напряжений.

Список литературы

1. Романов А.Н. Проблемы материаловедения в механике деформирования и разрушения на стадии образования трещин. Часть 1//Вестник научно-технического развития. - 2013. - №11. - С.38-49.
2. Романов А.Н. Проблемы материаловедения в механике деформирования и разрушения на стадии образования трещин. Часть 2. Структурная и деформационная неоднородность конструкционных материалов и рассредоточенное трещинообразование//Вестник научно-технического развития. – 2014. - №1. - С.37-54.
3. Романов А.Н. Проблемы материаловедения в механике деформирования и разрушения на стадии образования трещин. Часть 3. Микроструктурные особенности развития деформаций в конструкционных материалах при циклическом нагружении в интервале температур транскристаллитного разрушения//Вестник научно-технического развития. - 2014. - № 2. - С.36-50.
4. Романов А.Н. Проблемы материаловедения в механике деформирования и разрушения на стадии образования трещин. Часть 4. Основные типы микроструктурных деформационных рельефов, образующихся в конструкционных материалах при циклическом нагружении в интервале температур интеркристаллитного разрушения// Вестник научно-технического развития. – 2014. - №3. - С.31-58.
5. Романов А.Н. Проблемы материаловедения в механике деформирования и разрушения на стадии образования трещин. Часть 5. Энергия статического и циклического разрушения конструкционных металлических материалов//Вестник научно-технического развития. - 2014. - №9. - С.10-30.
6. Романов А.Н. Проблемы материаловедения в механике деформирования и разрушения на стадии образования трещин. Часть 6. Критерии разрушения с учетом работы микронапряжений на пути пластической деформации при малоцикловом нагружении конструкционных материалов//Вестник научно-технического развития. - 2015. - № 3. - С. 32-41.
7. Романов А.Н. Проблемы материаловедения в механике деформирования и разрушения на стадии образования трещин. Часть 7. Накопление повреждений при малоцикловом нагружении// Вестник научно-технического развития. – 2015. - № 5. - С.15-24.
8. Романов А.Н. Проблемы материаловедения в механике деформирования и разрушения на стадии образования трещин. Часть 8. Критерии разрушения с учетом работы микронапряжений на пути упругой деформации при усталостном нагружении конструкционных материалов//Вестник научно-технического развития. – 2015. - № 6. - С.31-39.
9. Романов А.Н. Проблемы материаловедения в механике деформирования и разрушения на стадии образования трещин. Часть 9. Малоцикловая усталость конструкционных металлических материалов//Вестник научно-технического развития. – 2015. - № 12. - С.42-62.
10. Романов А.Н. Проблемы материаловедения в механике деформирования и разрушения на стадии образования трещин. Часть 10. Сопротивление малоцикловому деформированию и разрушению в связи с формой цикла и деформационным старением материала//Вестник научно-технического развития. – 2016. - № 1. - С.34-41.
11. Романов А.Н. Проблемы материаловедения в механике деформирования и разрушения на стадии образования трещин: Часть 11. Структурные параметры деформационного

- старения при высокотемпературном малоцикловом разрушении//Вестник научно-технического развития. – 2016. - №3. - С.27-37.
12. Романов А.Н. Проблемы материаловедения в механике деформирования и разрушения на стадии образования трещин: Часть 12. Кинетика истинных напряжений и деформаций при малоцикловом нагружении//Вестник научно-технического развития. – 2016. - №2. - С.16-22.
13. Романов А.Н. Проблемы материаловедения в механике деформирования и разрушения на стадии образования трещин: Часть 13. Критерии разрушения при неоднородном напряженном состоянии//Вестник научно-технического развития. – 2016. - №9. - С.29-36.
14. Романов А.Н. Проблемы материаловедения в механике деформирования и разрушения на стадии образования трещин: Часть 14. Связь статических и циклических свойств конструкционных материалов// Вестник научно-технического развития. – 2017. - № 4 (116). – С. 31-43. (www.vntr.ru)
15. Романов А.Н. Проблемы материаловедения в механике деформирования и разрушения на стадии образования трещин: часть 15. Методы и аппаратура для проведения исследований при высокотемпературном циклическом нагружении //Вестник научно-технического развития. - 2018. - № 7 (131). - С. 27-40. DOI: 10.18411/vntr2018-131-4. (www.vntr.ru).
16. Романов А.Н. Разрушение при малоцикловом нагружении. - М.: Наука, 1988. - 280 с.
17. Романов А.Н. Критерии усталостного разрушения// Инженерный журнал «Справочник», Приложение. – 2007. - №6. - 36 с.

Дата поступления: 8 июня 2019 г.