УДК 534.1

СТРУКТУРЫ В НЕРАВНОВЕСНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ СРЕДАХ

Николай Николаевич Веричев

Институт проблем машиностроения РАН, Н. Новгород, Россия

nverichev@yandex.ru

Аннотация. Проводится исследование и классификация динамических структур в одномерных решетках – цепочке и кольце, а также в двумерной решетке осцилляторов с диффузионными связями. Данные дискретные динамические системы служат моделями для качественного исследования процессов в сплошных средах, а также представляют многочисленные системы из различных областей естествознания и технических приложений.

Ключевые слова: динамическая система, цепочка, кольцо, решетка, осциллятор.

STRUCTURES IN NONEQUILIBRIUM BOUNDED MEDIA

N.N. Verichev

Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia

nverichev@yandex.ru

Abstract. The study and classification of dynamic structures in one-dimensional lattices: a chain and a ring, as well as in a two-dimensional lattice of oscillators with diffusion coupling have being carried out. These discrete dynamic systems serve as models for a qualitative study of processes in continuous media and also represent numerous systems from various fields of natural science and technical applications.

Keywords: dynamical system, chain, ring, lattice, oscillator.

1. Введение. Колебания жидкости (газа) происходящие на поверхности или в слое, инициированные и поддерживаемые внешними источниками энергии (совместно с источником - автоколебания) - явление давно и хорошо известное [1-5 и др.]. Примером тому являются устойчивые системы вихрей на поверхности двумерных течений жидкости (в атмосфере), а также системы конвективных валов [1, 4]. Однако, не смотря на давнюю историю наблюдений, аналитическое описание этих явлений непосредственно уравнениями гидродинамики крайне затруднено. По-видимому, наиболее удачливым здесь является результат Лоренца по исследованию динамики пространственно-однородной структуры термоконвекции с применением метода Бубнова-Галеркина [6]. Для описания более сложных структур – пространственно-неоднородных, являющихся предметом нашего интереса, использование галеркинских приближений проблематично.

Дискретные модели – решетки («среда») связанных осцилляторов, используются достаточно давно в качественных исследованиях процессов в сплошной среде и с их помощью получают вполне адекватные результаты (системы осцилляторов получают заменой

пространственных производных конечными разностями, а частных производных по времени обыкновенными) [7,8,9 и др.]. На стороне дискретных моделей стоят достаточно хорошо отработанные приемы и методы исследования, а также возможность ясной физической интерпретации исследуемых динамических процессов, в частности - «на языке» синхронизации осцилляторов (автогенераторов). В настоящей работе проводится исследование и классификация структур в классических моделях связанных осцилляторов: цепочка, кольцо и двумерная решетка с диффузионными связями. Результаты будут распространяться на собственно дискретные системы различной природы, описываемые в рамках данных моделей.

Классический пример «структурной» динамики дает термоконвекция, рис.1 [1].

Рис.1 Конвективные валики, движимые плавучестью. Дифференциальные интерферограммы демонстрируют сбоку конвективную неустойчивость силиконового масла в прямоугольном ящике с относительными размерами сторон 10:4:1, подогреваемом снизу.

На верхнем снимке видна ситуация Рэлея – Бенара (равномерный нагрев), на нижней фотографии ящик вращается относительно вертикальной оси (в подписи сохранены стиль и терминология оригинала [1]).

Как видим, на верхнем рисунке выражено в меньшей степени, а на нижнем – явно, структура течения является пространственно-неоднородной и состоит из дискретных объектов - конвективных ячеек. Здесь же видим выделяющиеся две группы ячеек, создающих симметрическую динамическую картину относительно середины кюветы.

Предположим, что динамика жидкости в каждой из ячеек может быть описана в рамках некоторой сосредоточенной математической модели – осциллятора. Пример тому – конвективная петля, описываемая осциллятором Лоренца [10]. В таком случае аналогом динамической картины конвекции будет динамическая картина в системе связанных осцилляторов, блок-схема которой изображена на рис.2.

Рис.2. Схема конвективной структуры, как цепочки осцилляторов.

На схеме одинаковым цветом изображаются осцилляторы с идентичной динамикой. Здесь и далее не будем конкретизировать сами осцилляторы, их внутреннее «устройство» и динамические свойства, а до поры и характер связей между ними.

Как известно из физики автогенераторов (осцилляторов) их согласованные движения и, в частности, тождественное динамическое состояние поддерживается процессом синхронизации. Будет естественным распространить «язык синхронизации» и на

рассматриваемый случай. Однако, пока здесь имеется особенность: синхронизованные осцилляторы (одноцветные), за исключением четвертого и пятого, не имеют непосредственных связей и говорить об их взаимодействии и синхронизации формально проблематично. Эту формальную преграду обойдем введя в рассмотрение групповые (кластерные) осцилляторы (КО), составляющими которых будут являться сами элементарные осцилляторы. В данном случае таковых КО будет два: $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$ и $Y = (X_8, X_7, X_6, X_5)^T$. В случае синхронизации данных КО имеем равенство $X = Y$, то есть $(X_1, X_2, X_3, X_4)^T = (X_8, X_7, X_6, X_5)^T$, что соответствует исследуемой структуре. Далее исследование структуры, в частности – устойчивости, можно проводить в рамках привычных алгоритмов исследования синхронизации.

При изменении параметров эксперимента, в кювете могла бы реализоваться и другая структура – с нечетным количеством конвективных ячеек, схема которой изображена на рис.3.

Рис. 3. Схема пространственно-неоднородной структуры с нечетным числом конвективных ячеек.

В отличие от предыдущего случая, здесь явно не выделяются взаимодействующие КО, но, тем не менее, они существуют. Поясним это на следующем примере.

Допустим, что имеются два соприкасающиеся маятника Фруда [11], посаженных на вращающийся вал. Один из них (второй) является половиной другого, “целого маятника”, рис.4,а. Допустим, что между муфтами и валом существует вязкое трение и таковое же существует между муфтами маятников.

Рис.4. Физическая интерпретация КО $O_a(2)$ и простой клетки на его базе.

Уравнения движения системы, рис.4,а, имеют вид

$$ml^2\ddot{\phi}_1 + d\dot{\phi}_1 + mgl \sin \phi_1 = R(\Omega - \dot{\phi}_1) + \lambda(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1),$$

$$\frac{m}{2}l^2\ddot{\phi}_2 + \frac{d}{2}\dot{\phi}_2 + \frac{m}{2}gl \sin \phi_2 = \frac{R}{2}(\Omega - \dot{\phi}_2) + \lambda(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)$$

Здесь $R(\Omega - \dot{\varphi}_1)$ – момент силы вязкого трения со стороны вала на первый маятник и $\frac{R}{2}(\Omega - \dot{\varphi}_2)$ – на второй (они пропорциональны площади соприкосновения муфты маятника с валом); $\lambda(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$ и $\lambda(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)$ – взаимные моменты сил трения маятников; d – коэффициент вязкого трения среды. В результате введения безразмерного времени $\frac{mgl}{d+R}t = \tau$, получаем динамическую систему КО, который обозначим $O_a(2)$:

$$\dot{X} = G(X) - \varepsilon B_a \otimes CX,$$

где: $X = (X_1, X_2)^T$, $G(X) = (F(X_1), F(X_2))^T$, $X_1 = (\varphi_1, \xi_1)^T$, $X_2 = (\varphi_2, \xi_2)^T$,

$$F(X_1) = (\gamma + I^{-1}\xi_1, -\xi_1 - \sin \varphi_1)^T, \quad F(X_2) = (\gamma + I^{-1}\xi_2, -\xi_2 - \sin \varphi_2)^T, \quad B_a = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \text{diag}(0, 1), \quad I = \frac{l}{g} \left(\frac{mgl}{d+R} \right)^2, \quad \gamma = \frac{R\Omega}{mgl}, \quad \varepsilon = \frac{\lambda I}{d+R}, \quad \otimes - \text{символ прямого произведения}$$

матриц.

Если бы второй маятник на рис.4а был «полноценным», то различие в уравнениях состояло бы в матрице связи элементарных осцилляторов, входящих в «кластерный» осциллятор: эта пара представляла бы КО $O_s(2)$ с матрицей $B_s = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, подобный $O_s(4)$ на рис.2.

Допустим, что имеется второй КО $O_a(2)$ синхронизованный с первым – его «динамический образ», находящийся на том же валу. Ясно, что соединение их жесткой перемычкой, рис.4б, не изменяет динамический режим ни того ни другого. В результате получаем, что динамика этой пары КО эквивалентна динамике системы из трех «полноценных» элементарных осцилляторов, рис.4в, имеющей аттрактор КО $O_a(2)$. Подобные объекты далее будем называть простыми клетками (ПК). Жесткая связь КО в ПК осуществляет устойчивую к возмущениям начальных условий синхронизацию этих субъектов – структуру ПК.

Собственная структура и роль $O_s(n)$ и $O_a(n)$ в формировании «больших» кластерных структур имеет аналогию с квантомеханическими квазичастицами, – бозонами и фермионами. Как известно, первые играют во взаимодействиях самостоятельную роль, а вторые, прежде чем стать субъектами взаимодействий, «предварительно» объединяются в пары (рождаются и умирают парами). В рамках данных представлений можно предложить и квантомеханическую интерпретацию «кластерной» динамики решетки осцилляторов. Для исследования существования разных типов кластерных структур в решетках различной геометрической размерности и формы далее будут использоваться их схемы и эквивалентные преобразования последних, совпадающие с эквивалентными преобразованиями электрических цепей. При необходимости можно найти к ним гидродинамические, химические и другие аналоги. Используемая далее терминология и принципы будут следующими.

1. Два, непосредственно связанные синхронизованные элементарные осцилляторы, изображаемые на схеме кластерной структуры одним цветом, будем называть *разрезаемой парой* (РП). Связь между такими осцилляторами может быть удалена (разрезана) (на электрической схеме это соответствует разрезанию (вырезанию) обесточенных участков

цепи между эквипотенциальными точками). Наоборот, между любыми одноцветными изображениями схемы может быть установлена любая пассивная связь или произведено короткое замыкание соответственных точек.

2. Если схема имеет хотя бы одну РП, то ее будем называть разрезаемой, в противном случае, - не разрезаемой.

3. Схема кластерной структуры простой клетки является не разрезаемой.

4. Если некоторая схема не имеет ни одной РП, то это или схема простой клетки или схема отдельного КО или эта схема не верна вовсе.

5. Процедуру совмещения двух и более одноцветных изображений путем перегибов схемы через оси симметрии или действуя иным способом, будем называть свертыванием схемы (на электрической схеме это соответствует замыканию эквипотенциальных точек).

6. Схема простой клетки свертывается к схеме ее базового КО, то есть к схеме, не содержащей синхронизованных (одноцветных) элементарных осцилляторов.

7. При разрезании всех РП любая схема кластерной структуры распадается на идентичные схемные блоки - схемы базового КО или схемы базовой простой клетки.

2. Структуры в одномерных средах с диффузией. Рассматриваем дискретную модель однородной одномерной среды с диффузией и неймановскими граничными условиями (цепочку) – дифференциальные уравнения вида

$$\dot{X}_i = F(X_i, t) + \varepsilon C(X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1}), \quad (1)$$

$$i = \overline{1, N}, \quad X_0 \equiv X_1, \quad X_N \equiv X_{N+1}.$$

Здесь: $X_i, F(X_i, t)$ - вектор-функция состояния и нелинейность «элемента» среды -

осциллятора, $\dim(X_i, F(X_i, t)) = n$, C, ε - матрица и скалярный параметр связи этих элементов.

Здесь и далее вопрос о существовании структур различного типа в решетках осцилляторов, будем решать как вопрос существования различного типа структурообразующих (базовых) субъектов – КО и их ПК.

С учетом очевидного – одномерности возможных в цепочке (1) КО и ПК, а также в результате простых рассуждений о способах заполнения отрезка длины N (осцилляторов) путем перекладывания отрезка меньшей длины n (размер КО) или $2n-1$ (размер ПК) по указанным выше правилам (подобно выкладыванию разноцветного бордюра), приходим к следующему выводу.

В одномерном случае среды ограниченной на концах существуют два типа КО: особый КО, который обозначим $O_s(n)$, и неособый - $O_a(n)$, пара которых по указанному выше принципу, образует ПК с числом осцилляторов $2n-1$. Изображение схем названных КО и ПК, а также синтез схем структур на их базе представлены на рис.5,6.

Рис.5. Схема $O_s(n)$ и синтез схемы кластерной структуры на его базе.

Рис.6. Схема КО $O_a(n)$, синтез схемы его ПК (черный отрезок на верхнем рисунке – след символического зеркала) и синтез схемы кластерной структуры в цепочке (на связях РП изображен символический «нож»).

Дадим математическое определение изображенных выше КО.

Определение 1. К-осциллятором типа $O_s(n)$ ($O_a(n)$) называем динамическую систему n связанных элементарных осцилляторов вида

$$\dot{X} = G(X) - \varepsilon (B_{s(a)} \otimes C) X, \\ X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T, G(X) = (F_1(X_1), F_2(X_2), \dots, F_n(X_n))^T, \\ B_s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

при условии существования в фазовом пространстве $H(X)$ аттрактора $A_s(n)$ ($A_a(n)$) для $O_a(n)$, такого, что для $\forall (X_1, X_2, \dots, X_n) \in A_s(n)$ ($\forall (X_1, X_2, \dots, X_n) \in A_a(n)$), $X_i \neq X_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. $B_s \otimes C$ ($B_a \otimes C$) – матрица связи элементарных осцилляторов, $\otimes$ – символ прямого (кронекерова) произведения матриц.

Замечание. В данном определении нелинейные функции осцилляторов могут быть как одинаковыми так и разными, а сами осцилляторы могут быть различными не только по параметрам, но и по своей природе. На эту возможность указывают принципы синтеза схем. В случае различных элементарных осцилляторов любые аттракторы в фазовом пространстве КО могут быть использованы для реализации структурированного динамического режима цепочки. В этом случае мы будем иметь дело со структурной динамикой в искусственно созданной упорядоченной среде. При необходимости здесь можно ставить и решать задачи по формированию необходимых динамических структур в некоторой среде и, соответственно, управлению этими структурами.

Обратим внимание на важность в определении условия того, что $\forall (X_1, X_2, \dots, X_n) \in A_s(n)$ $X_i \neq X_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Дело в том, что в случае однородной среды в фазовом пространстве КО, как правило, существует множество других аттракторов, не отвечающих интересующему структурному режиму цепочки. Кроме того, нужный аттрактор может вовсе исчезнуть при определенных параметрах. В частности, можно показать, что при достаточно большом ε в фазовом пространстве исчезают все аттракторы за исключением «главного»,

для которого $X_i = X_j, \forall i, j = \overline{1, n}$. Этот аттрактор совпадает с аттрактором одиночного осциллятора и соответствует пространственно-однородному состоянию среды. Например, если $X = (x, y, z)^T, F(X) = (-\sigma(x - y), -y + rx - xz, -bz + xy)^T$, то мы будем иметь дело с цепочкой осцилляторов Лоренца, хорошо известных по моделированию тепловой конвекции в подогреваемом снизу слое жидкости. В этом случае знаменитый аттрактор Лоренца будет соответствовать хотя и турбулентному, но совершенно идентичному, синхронизованному движению жидкости во всех конвективных ячейках. Аттрактор (аттракторы), упоминаемый в *Определении* существует при «умеренных» значениях параметра связи и он всегда сосуществует с другими аттракторами связанной системы. В частности, по этой причине исследуемые структуры могут быть устойчивы «в большом», но не глобально. Физически данная ситуация совершенно аналогична той, с которой мы имеем дело в теории и практике классической синхронизации автогенераторов: есть режим синхронизации, соответствующий предельному циклу и есть режим биений, соответствующий тору. И если много автогенераторов связать в цепочку некоторой длины, то этот режим биений (для соседней пары) может оказаться режимом синхронизации для групп, составленных из пар осцилляторов (межгрупповая синхронизация), в результате чего образуется динамическая пространственно-неоднородная структура (точнее, - пространственно-периодическая, с полупериодом равным числу осцилляторов в КО), образом которой будет являться названный тор. Если данную ситуацию интерпретировать на сплошную среду, то подобное структурированное течение жидкости можно назвать «вторичным на фоне главного», поскольку оно может содержать особенности главного течения.

Обратим внимание на связь существования структур с алгебраическими свойствами системы (1). А именно, факт существования некоторой структуры отражается возможностью переформатирования системы (1) в виде системы соответствующего числа взаимодействующих КО $O_s(n)$ или в виде системы соответствующего числа взаимодействующих ПК $O_a(n)$ (формально вид ее уравнений тот же самый, что и для $O_s(n)$ при замене $n \rightarrow 2n - 1$). И такое переформатирование уравнений следует сделать, в частности, при исследовании устойчивости структур, обращая тем самым эту задачу в стандартную задачу устойчивости синхронизации автогенераторов.

Выше указаны два типа структур, которые могут возникать в одномерной среде. На вопрос о возможности существования других типов структур отвечает следующая теорема.

Теорема 4.3.1. $O_s(n)$ и $O_a(n)$ составляют полный набор типов КО в цепочке элементарных осцилляторов с неймановскими граничными условиями. Синхронизация этих КО и их простых клеток определяет все возможные типы существующих в цепочке кластерных структур.

Доказательство. Представлено в [12].

Следствие 1. О числе структур в цепочке при заданном N . Если p - количество всех сомножителей (простых и составных) числа N , исключая само число и единицу, то в цепочке из N элементарных осцилляторов существует p кластерных структур на базе $O_s(n)$ при разных n . Если q - количество всех нечетных сомножителей (простых и составных) числа N , включая само число, если оно нечетно, то в цепочке существует q кластерных структур на базе ПК КО $O_a(n)$ при разных n . Полное число кластерных структур в цепочке с заданным N равно $p + q$.

Доказательство. Во-первых, по теореме все схемы КС в цепочке синтезируются или на базе схем $O_s(n)$ или на базе схем ПК $O_a(n)$. Во-вторых, все схемы состоят из целого числа соответствующих блоков, рис.5,6. Для схемы КС на базе $O_s(n)$ имеем равенство $N = mn, m \geq 2, n \geq 2$. Отсюда получаем число кластерных структур на его базе равно p . Для структур на базе ПК $O_a(n)$ $N = m(2n-1), m \geq 1, n \geq 2$, а это значит, что число таких структур равно q . Суммарное число структур равно $p + q$.

Пример. Пусть $N = 100$. В этом случае $p = 7$, а $q = 2$. То есть в цепочке, варьируя начальными условиями и параметрами, может быть реализовано в сумме девять структур. Полный список этих структур с указанием базы: $O_s(2)$ (в структуре содержится $m = 50$ штук таких КО), $O_s(4)$ (25 шт.), $O_s(5)$ (20 шт.), $O_s(10)$ (10 шт.), $O_s(20)$ (5 шт.), $O_s(25)$ (4 шт.), $O_s(50)$ (2 шт.), $O_a(13)$ (в структуре $m = 4$ штук ПК $O_a(13)$), $O_a(3)$ (20 шт.).

Следствие 2. Об интегральных многообразиях уравнений цепочки. Исходя из арифметических свойств числа осцилляторов в цепочке N , а также следствия 1, можно получить все интегральные многообразия уравнений (1) представленные в [13-15]. Их математические выражения получаются приравниванием векторов динамических переменных синхронизированных осцилляторов. По теореме можно утверждать, что каких-либо других «кластерных» интегральных многообразий, кроме данных, в цепочке нет.

3. Структуры в однородном кольце. Наряду с цепочкой кольцо осцилляторов также является одной из базовых моделей теории колебаний и волн [7]. В частности, кольцо является моделью для изучения автоволновых процессов в активных средах с периодическими граничными условиями, при моделировании биологических, химических и других систем [7,9 и др.]. Динамическая система кольца имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= F(X_i, t) + \varepsilon C(X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1}), \\ i &= \overline{1, N}, X_0 \equiv X_N, X_1 \equiv X_{N+1}. \end{aligned} \quad (2)$$

В развитие изложенных выше принципов будем исследовать структурообразующие субъекты кольца – всевозможные типы КО и ПК.

Разрезаемые кластерные структуры кольца. Допустим, что схема кластерной структуры кольца содержит разрезаемую пару. Разрезание этой пары сводит схему структуры в кольцо к эквивалентной схеме в цепочке. Это значит, что базовые КО цепочки $O_s(n)$ и $O_a(n)$ являются базовыми и для кольца. Определения этих КО даны в предыдущем разделе.

Синтез схем разрезаемых кластерных структур производится аналогично цепочке, с одним замечанием, - число схем-блоков КО $O_s(n)$ в общей схеме кольца всегда четно, поскольку эквивалентная схема цепочки является центрально-симметричной.

Для примера, на рис.7 представлена разрезаемая кластерная структура, как синхронизация пары КО $O_s(3)$ в однородном кольце из $N = 6$ диффузионно-связанных осцилляторов Чуа

$$[16]: \quad X = (x, y, z)^T, F(x, y, z) = (\alpha(y - h(x)), -y + z - x, -\beta y - \gamma z)^T$$

$$h(x) = m_1 x + \frac{m_0 - m_1}{2} (|x + 1| - |x - 1|). \text{ Параметры численного эксперимента}$$

$$\{\alpha; \beta; \gamma; m_0; m_1; \varepsilon\} = \{9.5; 14; 0.1; -1/7; 2/7; 0.34\}.$$

Первый и шестой, а также третий и четвертый элементарные осцилляторы – две РП кластерной структуры.

Рис.7. Разрезаемая кластерная структура на базе пары $O_s(3)$.

В отличие от структур на базе $O_s(n)$, число ПК на базе $O_a(n)$ в кластерной структуре кольца может быть любым, – как четным, так и нечетным.

Для примера на рис.8 представлен результат численного эксперимента с тем же кольцом при других параметрах. Здесь изображена разрезаемая кластерная структура, как синхронизация двух ПК $O_a(2)$. Параметры эксперимента $\{\alpha; \beta; \gamma; m_0; m_1; \varepsilon\} = \{9.5; 14; 0,1; -1/7; 2/7; 0.2175\}$.

Рис.8. Кластерная структура в кольце, как синхронизация пары ПК $O_a(2)$

Не разрезаемые кластерные структуры кольца. Предположим, что схема структуры кольца не содержит ни одной РП. В таком случае она (схема) представляет простую клетку и, следовательно, должна свертываться к схеме некоторого (искомого) КО. В кольце процедуры свертывания естественно связывать с различными видами его симметрии.

1⁰. *Зеркальные кластерные структуры кольца.* Будем считать, что кольцо представляет собой окружность с равномерным распределением осцилляторов. Если схема обладает зеркальной симметрией, то след зеркала является диаметром, проходящим через середины противоположных осцилляторов, так как на рис.9,а. Смысл половинок осцилляторов тот же самый, что и для КО $O_a(n)$. Если осцилляторы на большой дуге различны, то она представляет собой схему КО. В общем случае на этой дуге могут быть синхронизованные осцилляторы.

Допустим, что имеется общий случай, - среди осцилляторов дуги имеются синхронизованные (одноцветные), рис.9а. Тогда схема осцилляторов дуги AF представляет целое число схем КО. Причем схема базового КО должна быть подобна той, как если бы он занимал всю дугу AF (половинки на концах).

Рис.9. Свертывание схемы «зеркальной» КС простой клетки.

Начиная от осциллятора F , выделим на схеме все подряд идущие «разноцветные» элементарные осцилляторы – дугу осцилляторов. Продолжая перегибать эту и последующие ей подобные дуги через середину конечного осциллятора, получаем картину, представленную на рис.9с. На рис.9б изображена дуга перед последней итерацией. Элементарные осцилляторы на дуге AB представляют схему искомого КО, базового для кластерной структуры, которую будем называть «зеркальной». Обозначим его $O_a^r(n)$ и приведем определение.

Определение 2. Зеркальным КО $O_a^r(n)$ будем называть систему $n \geq 2$ связанных элементарных осцилляторов вида

$$\begin{aligned} \dot{X} &= G(X) - \varepsilon B_a^r \otimes CX, \\ X &= (X_1, X_2, \dots, X_n)^T, G(X) = (F_1(X_1), F_2(X_2), \dots, F_n(X_n))^T, \end{aligned} \quad (3)$$

$$B_a^r = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & & & & \\ 0 & 0 & -1 & 2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 2 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

при условии существования в фазовом пространстве системы аттрактора $A_a^r(n)$, такого, что для $\forall (X_1, X_2, \dots, X_n) \in A_a^r(n), X_i \neq X_j, i \neq j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$.

Уравнение (3) можно получить, в частности, из уравнений (2), где в качестве граничных условий следует взять $X_2 \equiv X_0, X_{n+1} \equiv X_{n-1}$.

Для иллюстрации сказанного на рис.10 изображена зеркальная кластерная структура в однородном кольце $N = 6$ осцилляторов Чуа. Параметры эксперимента $\{\alpha; \beta; \gamma; m_0; m_1; \varepsilon\} = \{9.11; 14; 0,1; -1/7; 2/7; 0.25\}$. Плоскость “зеркала” проходит через первый и четвертый осцилляторы.

Рис.10. Зеркальная кластерная структура на базе $O_a^r(4)$.

Синтез схемы зеркальной структуры ведется в порядке обратном свертыванию.

Нетрудно вывести формулу, связывающую общее число осцилляторов в кольце N с числом КО в структуре и числом элементарных осцилляторов n самого КО: $N = 2m(n-1)$, где m - число КО, заполняющих половину кольца. Непосредственно из этой формулы следует, что если r - число всех сомножителей числа $N/2$, включая само число, то в кольце существует r зеркальных кластерных структур на базе КО $O_a^r(n)$. Например, в случае $N=12$ существует три структуры на базе $O_a^r(n)$: структура из двух $O_a^r(7)$, из четырех $O_a^r(4)$ и шести КО $O_a^r(3)$. В случае $N=6$ в кольце существует одна зеркальная структура на базе синхронизации $O_a^r(4)$, рис. 10.

2⁰. Циклические кластерные структуры кольца. Этот тип структур связан с симметрией поворота кольца.

Допустим, что в кольце реализована некоторая n кластерная структура с циклической симметрией. Сведем все элементарные осцилляторы, какогонибудь одного кластера («одноцветные») в один узел (короткие замыкания). В результате получим фигуру, напоминающую m лепестковую «розу». Пример изображен на рис. 11, b.

Рис.11. Свертывание схемы циклической структуры.

Допустим, что среди осцилляторов каждого лепестка нет «одноцветных» (из разных кластеров). Можно доказать, что в этом случае порядок следования синхронизованных осцилляторов на лепестках одинаков. Продолжаем свертывание схемы КС, поворачивая «лепестки» до совмещения «одноцветных» осцилляторов (короткие замыкания). В результате образуется кольцо несинхронизованных осцилляторов, рис.11,с. Это кольцо и является искомым КО «циклических» структур. Синтез «большой» схемы циклической структуры ведется в обратном порядке, исходя из того, что имеется m идентичных колец (КО), наложенных друг на друга. Ту же схему получим и в результате циклической ретрансляции дуги несинхронизованных осцилляторов, рис.11, а. Обозначим базовый КО циклических КС $O_s^r(n)$ и приведем его определение.

Определение 3. Циклическим КО $O_s^r(n)$ будем называть систему $n \geq 3$ связанных элементарных осцилляторов вида

$$\dot{X} = G(X) - \varepsilon B_s^r \otimes CX, \quad (4)$$

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T, G(X) = (F_1(X_1), F_2(X_2), \dots, F_n(X_n))^T$$

$$B_s^r = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

при условии существования в фазовом пространстве системы аттрактора $A_s^r(n)$, такого, что для $\forall (X_1, X_2, \dots, X_n) \in A_s^r(n)$, $X_i \neq X_j, i \neq j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$.

Нетрудно убедиться, что уравнение (4) представляет кольцо из n осцилляторов.

Для иллюстрации, на рис.12 представлена циклическая кластерная структура, полученная в однородном кольце из $N = 6$ осцилляторов Чуа. Параметры эксперимента $\{\alpha; \beta; \gamma; m_0; m_1; \varepsilon\} = \{9.5; 14; 0,1; -1/7; 2/7; 0.08\}$.

Рис.12. Циклическая кластерная структура на базе $O_s^r(3)$.

Очевидно, что число синхронизованных КО и число кластеров (число элементарных осцилляторов в КО) связано с общим числом осцилляторов в кольце простым соотношением $N = mn$. Это позволяет сформулировать столь же простое утверждение.

Пусть s - число всех сомножителей числа N , исключая само N . Тогда число циклических структур в кольце равно s .

Например, в случае $N = 12$ существует четыре циклические структуры на базе $O_s^r(n)$: структура из двух $O_s^r(6)$, из трех $O_s^r(4)$, из четырех $O_s^r(3)$ и шести КО $O_s^r(2)$. В случае $N = 6$ существуют две циклических кластерных структуры, одна из которых (трех кластерная) изображена на рис.12.

Выше определены четыре типа КС кольца. Докажем, что это полная группа КО. Предварим доказательство простой леммой.

Лемма 1. 1). Если осцилляторы на концах двух смежных параллельных хорд попарно синхронизованы, рис.13,а, то попарно синхронизованы осцилляторы на концах всех хорд связки. 2). Если осцилляторы на концах двух смежных пересекающихся хорд попарно синхронизованы, рис.13,б, то попарно синхронизованы осцилляторы на концах всех хорд пучка.

Доказательство. Будем обращаться со схемой структуры, как с электрической схемой, в которой связи между осцилляторами являются резистивными (R), а сами они подключены в узлах схемы. При этом $V_{A,B,C,\dots}$ - потенциалы узлов, $I_{A,B,C,\dots}$ - входные токи осцилляторов. Если речь будет идти об уравнении «для осциллятора», то будем понимать это как уравнение для соответствующего узла. Подробнее см. в [12].

Рис.13. К лемме 1.

1). Рассматриваем осцилляторы хорды EF. Напишем уравнения Кирхгоффа для осцилляторов A и B.

$$V_C + V_E - 2V_A = I_A R, V_D + V_F - 2V_B = I_B R.$$

По условию, $V_A = V_B$, $V_C = V_D$, $I_A = I_B$ (синхронизация). Отсюда получаем равенство $V_E = V_F$. То есть, осцилляторы E и F также являются синхронизованными. Далее рассуждения повторяются для осцилляторов всех остальных хорд связки.

2). Все аналогично первому случаю. Рассматриваем осцилляторы хорды EF. Уравнения Кирхгоффа для осцилляторов A и B:

$$V_C + V_E - 2V_A = I_A R, V_D + V_F - 2V_B = I_B R.$$

По условию, $V_A = V_B$, $V_C = V_D$, $I_A = I_B$ (синхронизация). Отсюда получаем равенство $V_E = V_F$. То есть, осцилляторы E и F являются синхронизованными. Далее рассуждения повторяются для осцилляторов всех остальных хорд пучка.

Теорема 2. КО $O_s(n)$, $O_a(n)$, $O_a^r(n)$ и $O_s^r(n)$ составляют полный набор типов КО в кольце осцилляторов и определяют все типы существующих в кольце кластерных структур.

Доказательство. Допустим, в кольце реализована некоторая кластерная структура. Выделим дугу AF с максимальным числом n несинхронизованных осцилляторов и пронумеруем их, начиная с одного из концов (против часовой стрелки), рис.14.

Рис.14. К теореме 2.

По условию осциллятор G синхронизован с одним из осцилляторов дуги AF . Будем рассматривать полный набор случаев. Если при этом, исключая физически невозможные

случаи, все кластерные структуры будут представлены четверкой указанных КО, то это будет доказательством теоремы.

1). Допустим, что осциллятор G синхронизован с осциллятором F. В таком случае эта пара осцилляторов – РП и данная КС является разрезаемой. Базовые КО такой структуры $O_s(n)$ или $O_a(n)$.

2). Допустим, что осциллятор G синхронизован с осциллятором E. По лемме п.1 (частный случай, - одна из хорд стянута в точку) осцилляторы на концах всех хорд параллельных GE синхронизованы и мы имеем структуру, симметричную относительно диаметра, проходящего через осциллятор F. Если число осцилляторов в кольце нечетно, то последняя из связки короткая хорда стягивает разрезаемую пару. То есть, опять имеется разрезаемая структура с базовым КО $O_a(n)$. Если число осцилляторов четно, то диаметр FL проходит через середины осцилляторов. Допустим, что среди осцилляторов дуги LG нет РП (в противном случае структура является разрезаемой и ее КО $O_a(n)$). В таком случае эта кластерная структура (симметричная относительно диаметра FL) является “зеркальной” и ее КО $O_a^r(n)$.

3). Допустим, что осциллятор G синхронизован с произвольным осциллятором C.

Производим эквивалентные преобразования КС: синхронизованные осцилляторы C и G “стягиваем” в узел, а далее “разводим” их по разным окружностям, рис.15,a,b

Рис.15. Эквивалентные преобразования схемы кластерной структуры

Запишем уравнения Кирхгоффа для осцилляторов G и C в первом и втором положениях системы:

$$V_{n+2} + V_n - 2V_G = I_G R, \quad V_{k-1} + V_{k+2} - 2V_C = I_C R,$$

$$V_{k-1} + V_{n+2} - 2V_C = I_C R, \quad V_{k+1} + V_n - 2V_G = I_G R.$$

При учете равенств $V_G = V_C$, $I_G = I_C$ (синхронизация) получаем: $V_n = V_{k-1}$ и $V_{n+2} = V_{k+1}$. При всех $k > 1$ эти уравнения противоречат условию, что первые n осцилляторов не синхронизованы. При $k=1$, с учетом того, что $V_0 = V_N$, они дают равенства $V_n = V_N$, $V_{n+2} = V_2$. По лемме п.2) последние уравнения определяют циклическую кластерную структуру, рис.15,c, с базовым КО $O_s^r(n)$. Теорема доказана.

Следствие. Если p - количество всех сомножителей (простых и составных) числа $N/2$, включая само число, а q - количество всех нечетных сомножителей числа N , включая его, если оно нечетно, то полное число разрезаемых структур в кольце равно $p+q$. Если r - число всех сомножителей числа $N/2$, включая само число, то в кольце существует r “зеркальных” КС на базе КО $O_a^r(n)$. Если s - число всех сомножителей числа N , исключая само N , то число циклических структур на базе $O_s^r(n)$ равно s . Полное число КС всех типов равно $p+q+r+s$.

Доказательство следствия фактически дано выше, при исследовании типов кластерных осцилляторов.

В качестве примера, если $N=12$, то, по *следствию*, в кольце существует 11 кластерных структур. Их перечисление опускаем. Заметим, что в случае простого N в кольце существует единственная и она же разрезаемая структура на базе ПК $O_a(n)$ с числом кластеров $n=(N+1)/2$.

3. Структуры в двумерных средах с диффузией. Исследованию динамических процессов из различных областей естествознания, моделируемых при помощи двумерных решеток осцилляторов, посвящено немало работ [17-20 и др.]. Наш интерес будет состоять в исследовании и систематизации различных типов кластерных структур в данных решетках, проводимых в контексте синхронизации КО и их простых клеток.

Уравнения двумерной решетки осцилляторов с неймановскими граничными условиями имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\dot{X}_{ij} &= F_{ij}(X_{ij}) + \varepsilon C(X_{i-1j} + X_{i+1j} + X_{ij-1} + X_{ij+1} - 4X_{ij}) \\ i &= \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}, \\ X_{0j} &= X_{1j}, X_{N_1+1j} = X_{N_1j}, X_{i0} = X_{i1}, X_{iN_2+1} = X_{iN_2}\end{aligned}\quad (5)$$

1⁰. Одномерные КО двумерных решеток.

Заметим, что цепочка является частным случаем двумерной решетки; ее уравнения получаются из (5) при наложении граничных условий вида $X_{0j} \equiv X_{1j} \equiv X_j$, $X_{i0} \equiv X_{i1} \equiv X_i$, $X_{2j} \equiv X_{1j} \equiv X_j$, $X_{1n+1} \equiv X_{1n} \equiv X_n$. По этой причине КО цепочки $O_s(n)$ и $O_a(n)$ являются базовыми и для двумерной решетки. Соответствующие структуры в конвективных течениях реализуются в виде роликов, вытянутых вдоль одной из сторон кюветы. В пределах каждого ролика движение жидкости синхронизировано, в то время как движения жидкости для роликов из разных кластеров различное. Отражая двухмерность случая, переобозначим $O_s(n)$ как $O_s(1 \times n)$. Далее под записью “ $m \times n$ ” будем понимать как размеры соответствующей решетки, так и произведение mn . Очевидно, что $O_s(1 \times n)$ и $O_s(n \times 1)$ физически тождественны и должны быть отнесены к одному типу: с точностью до обозначений они представляются одинаковыми уравнениями и имеют одинаковые «рабочие» аттракторы. Однако, структуры на базе того или другого, синтезированные в одной и той же решетке будут визуально разными. Следует принимать во внимание этот факт. Пример изображен на рис.16а,б. Здесь и далее связи между изображениями элементарных осцилляторов изображаются примыканием сторон квадратов.

Сформулируем утверждение о числе структур указанного типа в решетке $N_1 \times N_2$.

Утверждение 1. Если p и q - число всех сомножителей чисел N_1 и N_2 , включая в число сомножителей сами числа, то полное число структур на базе КО $O_s(1 \times n)$ и $O_s(n \times 1)$ в решетке $N_1 \times N_2$ равно $p + q$.

Рис.16. Структуры на базе $O_s(1 \times n)$ и $O_s(n \times 1)$

2⁰. Второй тип КО цепочек - $O_a(n)$ также является структурообразующим КО двумерных решеток. Обозначим его $O_a(1 \times n)$. Последний определяется системой осцилляторов (5) при $i = 1, j = \overline{1, n}$ и с граничными условиями $X_{0j} \equiv X_{1j} \equiv X_j$, $X_{10} \equiv X_{11} \equiv X_1$, $X_{2j} \equiv X_{1j} \equiv X_j$, $X_{1n+1} \equiv X_{1n-1} \equiv X_{n-1}$. Предполагается, что система содержит в фазовом пространстве кластерный аттрактор $A_a(n)$. Как и выше, КО $O_a(n \times 1)$ отождествляется с $O_a(1 \times n)$, при сделанных оговорках относительно синтеза схем на их базе. Примеры синтеза схем на базе этого КО изображены на рис.17,а,б.

Утверждение 2. Пусть p и q - число всех нечетных сомножителей чисел N_1 и N_2 , включая в число сомножителей сами числа, если они нечетные. В таком случае полное число структур на базе КО $O_a(1 \times n)$ и $O_a(n \times 1)$ равно $p + q$.

Рис.17. Схемы структур на базе схем простых клеток КО $O_a(1 \times n)$ и $O_a(n \times 1)$

Двумерные КО.

Поскольку мы имеем дело с решеткой «прямоугольной» формы (для простоты будем считать ее прямоугольной координатной сеткой с осцилляторами, расположенными в узлах), то естественно предполагать, что и простые клетки имеют тот же вид. Это предположение оказывается верным: если схема не разрезаема, то вся она является схемой прямоугольной ПК; если она разрезаема, то простыми средствами можно доказать, что линия разреза не может быть ломанной. Далее при исследовании КО и ПК будем использовать различные виды симметрии прямоугольников (квадратов).

3⁰. Допустим, что в рассматриваемой решетке реализована некоторая КС и ее схема разрезана на идентичные схемные блоки простых клеток. Будем оценивать различные варианты того, как может быть «устроена» кластерная структура самой ПК. В этой связи, не пропустим первый из возможных случаев – случай максимального числа кластеров или, по-другому, - случай, когда все осцилляторы ПК несинхронизованы. При этом ПК является

особой и она же является особым КО – двумерным аналогом $O_s(n)$ в цепочке. Обозначим его $O_{ss}(m \times n)$ и определим как систему осцилляторов (5) с граничными условиями $X_{0j} \equiv X_{1j}$, $X_{i0} \equiv X_{i1}$, $X_{m+1j} \equiv X_{mj}$, $X_{in+1} \equiv X_{in}$, (прямоугольная $m \times n$ решетка), при условии существования кластерного аттрактора $A_{ss}(mn)$ в своем фазовом пространстве.

Утверждение 3. Если p и q - число всех сомножителей чисел N_1 и N_2 , включая в число сомножителей сами числа, то в решетке $N_1 \times N_2$ существует $pq-1$ кластерных структур на базе КО $O_{ss}(m \times n)$, $m \geq 2, n \geq 2$.

Заметим, что $O_s(n)$ можно рассматривать как частный случай $O_{ss}(m \times n)$, когда одно из чисел равняется единице.

Пример синтеза схемы КС на базе КО $O_{ss}(2 \times 3)$ в прямоугольной решетке (4×6) изображен на рис.18,а, а на рис.18,б – пример «свободного» синтеза схемы структуры в «неправильной» решетке на базе того же КО (это в качестве побочного продукта).

Рис.18. Синтез различных схем кластерных структур на базе $O_{ss}(2 \times 3)$

4⁰. Допустим, что прямоугольная (квадратная) простая клетка является неособой, то есть среди ее элементов имеются синхронизированные осцилляторы. Следовательно, ее схема тем или иным путем должна свертываться к схеме КО. Будем учитывать опыт свертывания простых клеток цепочки и кольца по использованию различных типов симметрии. Начинаем со случая одной итерации свертывания.

Допустим, что схема является зеркальной относительно одной из плоскостей симметрии. В таком случае соответствующая сторона прямоугольника содержит нечетное число элементов, а след зеркала проходит через середины изображений осцилляторов. В противном случае (число осцилляторов на стороне четно) след зеркала являлся бы линией разреза, а это противоречило бы свойству ПК. Перегибая схему через след зеркала получаем изображение КО, рис.19. Допустим, что нечетное число осцилляторов расположено в столбце, рис.19.а. В этом случае КО, который обозначим $O_{as}(m \times n)$, определяется системой

(5) при $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, с граничными условиями $X_{0j} \equiv X_{1j}$, $X_{i0} \equiv X_{i1}$, $X_{m-1j} \equiv X_{m+1j}$, $X_{in} \equiv X_{in+1}$, имеющей в фазовом пространстве кластерный аттрактор $A_{as}(mn)$.

Простая клетка этого КО состоит из пары жестко связанных КО. Ее размер (количество элементарных осцилляторов) $(2m-1) \times n$.

Синтез схемы КС простой клетки происходит в обратном порядке - присоединением к изображению КО его зеркального образа.

Рис.19. Свертывание схем простых клеток на базе КО $O_{as}(m \times n)$ и $O_{sa}(m \times n)$

Если КС простой клетки является симметричной относительно другой плоскости, рис.19,b, то мы приходим к определению КО $O_{sa}(m \times n)$. Это будет система (5) при $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ и с граничными условиями $X_{0j} \equiv X_{1j}, X_{i0} \equiv X_{i1}, X_{in-1} \equiv X_{in+1}, X_{mj} \equiv X_{m+1j}$. При этом размер ПК $m \times (2n - 1)$. Пример КО $O_{sa}(2 \times 3)$ и синтеза ПК приведен на рис.19,b. Тот и другой КО относим к одному типу. Заметим, что КО $O_a(1 \times n)$ и $O_a(m \times 1)$ являются частным случаем этих двумерных КО.

Исходя из размеров простых клеток и размеров решетки $N_1 \times N_2$, получаем следующее утверждение о количестве структур на базе $O_{as}(m \times n)$ и $O_{sa}(m \times n)$.

Утверждение 4. Пусть p и q - число всех нечетных сомножителей чисел N_1 и N_2 , включая в число сомножителей сами числа, если они нечетные. Пусть n_1 и n_2 - число всех сомножителей чисел N_1 и N_2 , включая в число сомножителей сами числа. Тогда в данной решетке существует pn_2 и qn_1 КС на базе $O_{as}(m \times n)$ и $O_{sa}(m \times n)$, соответственно. Общее число структур данного типа $pn_2 + qn_1$.

Например, в решетке 3×6 $p=1, q=1, n_1=1, n_2=3$. То есть, существует четыре кластерные структуры данного типа. Все их схемы с изображением синтеза представлены на рис.20.

Рис.20. Различные структуры на базе $O_{as}(m \times n)$ и $O_{sa}(m \times n)$ в решетке 3×6

Заметим, если N_1 и N_2 - простые числа, то в решетке $N_1 \times N_2$ существует только две кластерные структуры рассмотренного типа. Одна из них имеет число кластеров $N_1(N_2 + 1)/2$, а вторая - $N_2(N_1 + 1)/2$.

5⁰. Допустим, что полученная в результате одной итерации свертывания схема КС простой клетки (в результате перегиба схемы через одну из осей) содержит синхронизованные осцилляторы. В таком случае картина симметрична относительно второй плоскости симметрии, след которой также проходит через середины изображений осцилляторов. В противном случае КС была бы разрезаемой, а это противоречит условию. Выполняя второй перегиб схемы через след второго зеркала, получаем схему искомого КО. Описанная процедура свертывания схемы зеркальной относительно двух плоскостей изображена на рис.21. Здесь “четвертинка” изображения элементарного осциллятора имеет тот же смысл, что и “половинка” (находит свое отражение в матрице КО)

Рис.21. Порядок свертывания схемы КС с двойной осевой симметрией

Обозначим полученный КО $O_{aa}(m \times n)$ и определим его как систему (5) при $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ (прямоугольная решетка из mn осцилляторов) с граничными условиями вида: $X_{0j} \equiv X_{1j}$, $X_{i0} \equiv X_{i1}$, $X_{m-lj} \equiv X_{m+lj}$, $X_{in-l} \equiv X_{in+l}$, при условии существования кластерного аттрактора $A_{aa}(mn)$. ПК этого типа состоит из четырех связанных КО и имеет размеры $(2m-1) \times (2n-1)$.

Из сказанного сформулируем утверждение о числе структур на базе $O_{aa}(m \times n)$ в решетке $N_1 \times N_2$.

Утверждение 5. Пусть $\{p\}, \{q\}$ - все нечетные сомножители чисел N_1 и N_2 , включая эти числа, если они нечетные. Тогда число кластерных структур на базе $O_{aa}(m \times n)$ в решетке $N_1 \times N_2$ равно числу всевозможных различных пар (p_i, q_j) . Число кластеров в каждой структуре $mn = (p_i + 1)(q_j + 1)/4$.

6⁰. Обратимся к схемам простых клеток с центральной симметрией.

Допустим, что в клетке $m \times n$ реализована КС с центральной симметрией и хотя бы один из ее размеров четное число. Процедура свертывания схемы КС в этом случае будет выглядеть следующим образом. Мысленно проведем прямую (перпендикулярно четной стороне) делящую схему на две части, содержащие идентичные совокупности несинхронизованных осцилляторов, рис.22,а. При этом схемы обеих частей могут быть совмещены в результате поворота одной из них на 180° относительно центра, рис.22,б. Считаем, что связи осцилляторов, примыкающих по названной линии, при этом сохраняются. Осуществляя эту процедуру, получаем схему изображенную на рис. 22,с. Совокупность осцилляторов этой

решетки представляет КО, который обозначим $O_{2a}^{\pi r}(mn/2)$ и будем называть его “ π -прямоугольник”. Здесь $mn/2$ - число кластеров в КС простой клетки.

Рис.22. Свертывание схемы КС с центральной симметрией на базе $O_{2a}^{\pi r}(mn/2)$

Замечание. Как видим, изображения $O_{2a}^{\pi r}$ и особого КО O_{ss} похожи, а при одинаковом числе осцилляторов совпадают (сравни рис.18,а и рис.22,с). Однако, это совершенно разные по своей динамике КО: они имеют разные «кластерные» матрицы, определяемые разными граничными условиями. Уравнения КО $O_{2a}^{\pi r}$ получаются из общих уравнений (4.5.1) с граничными условиями, отражающими центральную симметрию приграничных осцилляторов. В приведенном выше примере, рис.22, уравнения КО получаются из уравнений (5) в которых: $i = 1, 2, 3; j = 1, 2; X_{12} = X_{33}, X_{22} = X_{23}, X_{31} = X_{13}$.

Утверждение 6. Пусть p и q - число всех четных сомножителей чисел N_1 и N_2 , включая в число сомножителей сами числа, если они нечетные. Пусть n_1 и n_2 - число всех сомножителей чисел N_1 и N_2 , включая в число сомножителей сами числа. Тогда в данной решетке существует $pn_2 + qn_1$ КС на базе $O_{2a}^{\pi r}(mn/2)$.

Заметим, что данного типа двумерные структуры наблюдаются на тонкой пленке электролита, возбуждаемого магнитодинамическим методом [7], а также при термоконвекции жидкости в вертикальной ячейке Хеле - Шоу [4,21].

7⁰. Допустим, что ПК с центрально-симметричной КС имеет размеры $m \times n$, где оба числа нечетны. В этом случае центр решетки находится на изображении центрального элементарного осциллятора. Процедура свертывания схемы КС к схеме КО будет следующей. Мысленно проведем трехзвенную ломаную, пересекающую центральный осциллятор и делящую схему на два идентичных блока составленные их «разноцветных» осцилляторов, рис.23,а. Образовавшаяся пара схем совмещается в результате поворота одной из них на 180° относительно центра решетки, рис. 23,б. Предполагаем, что связи между всеми осцилляторами сохраняются. Производя поворот, получаем изображение КО, рис.23,с. Обозначим этот КО $O_{2a}^{\pi f}((mn+1)/2)$ и будем называть “ π -флаг”. Здесь $(mn+1)/2$ - число кластеров, продуцируемых этим КО. Синтез схемы клетки происходит в обратном порядке. Исходя из размеров ПК, сформулируем следующее утверждение о числе КС в решетке $N_1 \times N_2$, схемы которых могут быть синтезированы на базе $O_{2a}^{\pi f}((mn+1)/2)$.

Утверждение 7. Пусть $\{p\}, \{q\}$ - все нечетные сомножители чисел N_1 и N_2 , включая эти числа, если они нечетные. Тогда число кластерных структур на базе $O_{aa}(m \times n)$ в решетке $N_1 \times N_2$ равно числу всевозможных различных пар (p_i, q_j) .

Рис.23. Свертывание схемы КС с центральной симметрией на базе $O_{2a}^{\pi f}((mn+1)/2)$

Список КО двумерных решеток будет не полон, если к нему не добавить типы КО, определяющие КС в квадратных ПК и связанные с их дополнительной диагональной симметрией.

8⁰. Начинаем со случая максимального числа кластеров КС в квадратной ПК. Допустим, что число несинхронизованных («разноцветных») осцилляторов на стороне квадрата равно n и КС симметрична относительно одной из его диагоналей. Перегибая схему структуры через диагональ (след зеркала), рис.24а, получаем схему КО, рис.24б. Обозначаем данный КО $O_{2a}^f(n(n+1)/2)$ и будем называть его “флаг 2”. Здесь $n(n+1)/2$ - число кластеров, продуцируемых КО.

Рис.24. Свертывание схемы ПК на базе $O_{2a}^f(n(n+1)/2)$

Исходя из простой задачи о количестве способов покрытия решетки $N_1 \times N_2$ всевозможными квадратами, сформулируем утверждение о количестве КС, базой которых может быть $O_{2a}^f(n(n+1)/2)$ при различных n .

Утверждение 8. Пусть $\{p\}$, $\{q\}$ - все сомножители чисел N_1 и N_2 , включая эти числа. Тогда число кластерных структур на базе $O_{2a}^f(n(n+1)/2)$ в решетке $N_1 \times N_2$ равно числу всевозможных пар $(p_i, q_j = p_i)$ одинаковых сомножителей.

9⁰. Для продолжения исследования типов КО следует разделить случаи четного и нечетного числа осцилляторов на стороне квадрата.

Допустим, что число осцилляторов на стороне квадрата четно, $n = 2k$. Допустим также, что после первой итерации (первого перегиба через диагональ) в полученной фигуре остаются синхронизованные осцилляторы симметричные относительно второй диагонали, рис.25а,б. Перегибая последнюю картину через вторую диагональ, получаем фигуру, заполненную не синхронизованными осцилляторами – схему КО. Обозначим этот КО $O_{4a}^f((n^2 + 2n)/4)$ и

будем называть его “флаг 4”. В данном случае ПК состоит из четырех связанных КО. Смысл половинок изображений осцилляторов известен.

Рис.25. Порядок свертывания схемы ПК на базе $O_{4a}^f \left((n^2 + 2n)/4 \right)$

Сформулируем утверждение о числе структур данного типа в решетке заданных размеров.

Утверждение 9. Пусть $\{p\}$, $\{q\}$ - все четные множители чисел N_1 и N_2 , включая эти числа, если они четные. Тогда число кластерных структур на базе $O_{4a}^f \left((n^2 + 2n)/4 \right)$ в решетке $N_1 \times N_2$ равно числу всевозможных пар $(p_i, q_j = p_i)$ одинаковых сомножителей.

10^0 Допустим, что число осцилляторов квадрата нечетно, $n = 2k + 1$. Допустим также, что после первой итерации (перегиба через диагональ) в полученной фигуре остаются синхронизованные осцилляторы симметричные относительно второй диагонали, рис.26,b. Выполняя вторую итерацию, получаем фигуру, заполненную не синхронизованными осцилляторами – схему КО, рис.26,c. Обозначим этот КО $O_{4a}^p \left((n+1)^2 / 4 \right)$ и будем называть его “пирамида 4”. ПК состоит из четырех связанных КО.

Утверждение 10. Пусть $\{p\}$, $\{q\}$ - все нечетные множители чисел N_1 и N_2 , включая эти числа, если они нечетные. Тогда число кластерных структур на базе $O_{4a}^p \left((n+1)^2 / 4 \right)$ в решетке $N_1 \times N_2$ равно числу всевозможных пар $(p_i, q_j = p_i)$ одинаковых сомножителей.

Рис.26. Порядок свертывания схемы ПК на базе $O_{4a}^p \left((n+1)^2 / 4 \right)$

11^0 . Допустим, что после двух итераций, произведенных в п. 10^0 , в полученной схеме, рис.27c, остаются синхронизованные осцилляторы, которые симметричны относительно ее плоскости симметрии. В таком случае свертывание схемы клетки может быть продолжено перегибом через соответствующую ось. Последовательность итераций приведена на рис.27. Обозначим полученный КО как $O_{8a}^f \left((n+1)(n+3)/8 \right)$ и будем называть его “флаг 8”. Синтез схемы КС простой клетки происходит в обратном порядке. ПК состоит из восьми жестко связанных КО. Смысл 1/8 от изображения осциллятора тот же самый, что и 1/2.

Рис.27. Порядок свертывания схемы ПК на базе $O_{8a}^f((n+1)(n+3)/8)$

Число структур на базе $O_{8a}^f((n+1)(n+3)/8)$ определяется утверждением 10.

Замечание. Подобные структуры в квадрате с четным числом осцилляторов отсутствуют: при проведении обратных итераций соответствующего треугольника, рис.28 в порядке d,c,b,a получаем разрезаемую структуру. Это противоречит тому, что квадратная решетка является простой клеткой.

Рис.28. К Замечанию

По-видимому, $(n+1)(n+3)/8$ - минимальное число кластеров в структуре, которое возможно в квадратной решетке осцилляторов с нечетным числом элементарных осцилляторов. Соответственно, $(n^2 + 2n)/4$ - с четным числом осцилляторов.

Выше рассмотрены все типы симметрий структурных схем, а также случай особого КО. Тем самым, имеются все основания полагать, что для двумерной решетки представленный набор типов КО является полным. Доказательство этого факта опускаем.

4. Заключение. Предложенная методика определения типов структур в решетках осцилляторов проста и может быть, при необходимости, распространена как на трехмерные решетки, так и на решетки самых различных геометрических форм: диск, кольцо и т.д. Обратим внимание и на ту особенность, что принципы синтеза схем кластерных структур не связаны с условием однородности элементарных осцилляторов, входящих в состав структурообразующих субъектов – КО и ПК. Соответствующие осцилляторы могут быть различны как по своим параметрам, так и по своей природе. Это дает возможность синтезировать схемы и, может быть, изготавливать материальные решетки различной геометрической формы – технические устройства и материалы с наперед заданными и, возможно, управляемыми динамическими свойствами. И последнее, проведенные исследования дают полную и обозримую качественную картину возможных динамических структур в соответствующих сплошных средах, что, в свою очередь, является основой для эффективных вычислений параметров структур и их свойств, в частности, устойчивости [22].

Список литературы

- [1] Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. - М.: Мир, 1986,
- [2] Гершуни Г.З, Жуковичский Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. - М.: Наука, 1972.
- [3] Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея – Бенара. Структура и динамика. - М.: Эдиториал УРСС, 1999.
- [4] Любимов Д.В., Путин Г.Ф., Чернатынский В.И. // ДАН СССР. – 1997. - 234, 534.
- [5] Рабинович М.И., Сущик М.М. Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости. // УФН. – 1990. - Т.160, №1. - С. 3-64.
- [6] Lorenz E. J. // Atmos. Sci. – 1963. - 30, 448.
- [7] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. - М: Наука, 1984.
- [8] Белых В.Н., Веричев Н.Н. Пространственно-однородные автоволновые процессы в системах с переносом и диффузией. // Изв.Вузов. Радиофизика. - 1996. - Т.39, N5. - С. 588 – 596.
- [9] В. Васильев, Ю. Романовский, В. Яхно. Автоволновые процессы. - М: Наука, 1987.
- [10] Кузнецов С.П. Динамический хаос. - М.: Физматлит, 2001.
- [11] Магнус К. Колебания. - М.: Мир, 1982.
- [12] Веричев Н.Н., Веричев С.Н., Ерофеев В.И. Кластерная динамика однородной цепочки диссипативно связанных ротаторов // ПММ. – 2008. - Т.72, №6. - С. 882-897.
- [13] Georgiou I.T, Bajaj AK, Corless M. Invariant manifolds and chaotic vibrations in singularly perturbed nonlinear oscillators. // Int. J.Eng Sci. -1998. - **36**:431–58.
- [14] Belykh VN, Belykh IV, Hasler M. Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems. // Phys Rev E. 2. – 2000. - 6332–45.
- [15] Belykh VN, Belykh IV, Mosekilde E. Cluster synchronization modes in an ensemble of coupled chaotic oscillators. // Phys Rev E. – 2001. - 63:036216.
- [16] Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T. The Double Scroll Family. // IEEE Transaction on Circuits & Systems. - V. CAS-33. – 1986. - no.11. - P.1073-1118.
- [17] Afraimovich V.S , Chow S.-N , Hale J.K, Synchronization in lattices of coupled oscillators, //Physica D. – 1997. - v.103, n.1-4. - P.442-451.
- [18] Chiu, C.-H., Lin, W.-W. and Wang, C.-S., Synchronization in a lattice of coupled Van Der Pol systems.// Int. J. Bif. Chaos. - v8 i12. - 2353-2373.
- [19] Liang Zhao, Fabricio Aparecido Breve Chaotic synchronization in 2D lattice for scene segmentation // Neurocomputing. – 2008. - Volume 71, Issue 13-15. - P. 2761-2771.
- [20] Hirokazu Fukuda, Hikaru Nagano and Shoichi Kai Stochastic Synchronization in Two-Dimensional Coupled Lattice Oscillators in the Belousov–Zhabotinsky Reaction // J. Phys. Soc. Jpn. - 2003, 72. - P. 487-490.
- [21] Рабинович М.И. Стохастические автоколебания и турбулентность. - УФН, 1978 . - т.125, вып.1. - С.123-168.
- [22] Н.Н. Веричев. Устойчивость структур в неравновесных системах //Вычислительная механика сплошных сред. - 2013. - т.6, №1. - С. 23-33, 2013.

Дата поступления: 26 марта 2019 г.