Вестник научно-технического развития Bulletin of Science and Technical Development

Номер 4 (140), апрель 2019 г.

DOI: 10.18411/vntr2019-140

Издается с 2007 года

Издание зарегистрировано в Министерстве РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации Эл. № ФС77-29768.

ISSN 2070-6847

*Журнал выпускается под научным руководством Федерального государственного
бюджетного учреждения науки Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН*

ОГЛАВЛЕНИЕ № 4 (140), 2019

Николай Алексеевич Андрианов, Виталий Львович Крупенин. К

экспериментальному описанию периодических виброударных режимов движения в струнных решетках.....стр. 3 – 21

Николай Николаевич Веричев. Структуры в неравновесных ограниченных

средах..... стр. 22 – 46

Сергей Иванович Герасимов, Василий Андреевич Кикеев, Дмитрий Юрьевич**Смирнов. Расчетно-экспериментальные исследования процессов при гиперзвуковых скоростях обтекания объектов.....стр. 47 – 50****Владимир Иванович Ерофеев, Татьяна Сергеевна Есаулова, Владимир****Владимирович Кажаяев, Борис Борисович Лампси (мл.). Нелинейные стационарные волны в тонкостенном стержне, испытывающем влияние деформации его поперечного сечения при кручении.....стр. 51 – 72**

Издание зарегистрировано в Министерстве РФ по делам печати,

телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации Эл. № ФС77-29768.

ISSN 2070-6847

УДК 534.1

К ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМУ ОПИСАНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВИБРОУДАРНЫХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ В СТРУННЫХ РЕШЁТКАХ

© Николай Алексеевич Андрианов, Виталий Львович Крупенин

ИМАШ РАН, Москва, Россия

krupeninster@gmail.com

Аннотация. Изложены результаты исследования динамических особенностей струнной решетчатой конструкции, узлы которой соударяются с неподвижным ограничителем хода. Даны уравнения движения и приведены способы их анализа и построения решений. Экспериментально установлено, в частности, существование периодических стоячих волн, характеризующихся неодновременными ударами всех узлов в режиме силового синусоидального возбуждения, а также свойствами, аналогичными резонансным свойствам виброударной системы с одной степенью свободы (ударного осциллятора). Даны результаты анализа профилей таких волн.

Ключевые слова: струнная, решетка, соударения узлов, периодическая функция Грина, резонанс, фаза удара, импульс удара, профили стоячей волны, хлопок.

Работа выполнялась при поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00065).

TO THE EXPERIMENTAL DESCRIPTION OF PERIODIC VIBRO-IMPACT MOTION MODES IN STRING LATTICES

© N.A. Andrianov, V.L. Krupenin

IMASH RAN, Moscow, Russia

krupeninster@gmail.com

Abstract. The results of the study of the dynamic features of a string lattice structure, whose nodes collide with a fixed travel stop, are presented. Equations of motion are given and methods for their analysis and construction of solutions are given. It has been established experimentally, in particular, the existence of periodic standing waves characterized by non-simultaneous impacts of all nodes in the regime of force sinusoidal excitation, as well as properties similar to the resonant properties of a vibro-impact system with one degree of freedom (impact oscillator). The results of the analysis of profiles of such waves are given.

Keywords: string, lattice, collisions of nodes, periodic Green function, nonlinear resonance, impact phase, impact impulse, standing wave profiles, claps.

Acknowledgements. The research was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-19-00065).

1. Введение. В работе [1] описана картина виброударных режимов движения в струнной решётке. Будем именовать струнной решеткой систему двух семейств взаимно перпендикулярных безынерционных упругих струн, образующих прямоугольные (в частности, квадратные) ячейки, в узлах которых помещены точечные абсолютно твердые тела [2]. Струнные решетки такого типа оказываются естественным $2D$ -расширением известной в теории колебаний модели «струна с бусинами», сыгравшей весьма существенную и нетривиальную роль [3]. Модели струнных решеток могут использоваться при изучении многочисленных двумерных объектов и некоторых типов реальных машин и устройств [4]. С их помощью могут изучаться колебания узлов кристаллических решёток, а также наноструктурированных слоев металлов [5].

Отмеченные выше виброударные режимы отвечали так называемым синхронным хлопкам, ранее описанным в одномерных системах точечных грузов, имеющих ограничители хода и расположенные через одинаковые расстояния на натянутой струне [6, 7]. При реализации хлопков в системах разной размерности все узлы решеток совершали синхронные движения с соударениями о неподвижное препятствие.

Оказалось, что при изменении параметров решёток соударения узлов могут происходить и неодновременно, но в то же время синхронность их движений сохраняется. Соответствующие экспериментальные данные и приводятся в этой статье.

2. Уравнения и представление движения. Ниже мы дадим краткое описание экспериментального стенда «Аллигатор Квадрат», схема которого дана на рис.1, однако, вначале остановимся на уравнениях движения. Квадратная решетка [1], составленная из двух взаимно перпендикулярных семейств идентичных заземленных на концах линейных струн, имеющих длины l . Каждая струна нумеруется индексами $k, q = 0, 1, N$; массы узлов есть m . При моделировании полагаем, что ячейки решётки - квадратные и одинаковые, а струны - безынерционные. Крепления струн в узлах - абсолютно жесткие; их натяжения равны τ ; длина каждой стороны ячеек - ΔL .

Состояние конструкции описывается функциями смещения узлов $u_{kq}(t)$, $k, q = 0, 1, \dots, N$. При этом функция $u_{kq}(t)$ изменяется вдоль некоторой оси, перпендикулярной плоскости статического равновесия решетки; на границах $u_{kq} = 0$.

Обозначим $g_{kq}(p; t, u_{kq})$ – внешние или отнесенные к внешним силы; $p \equiv d/dt$. Каждый узел принадлежит двум струнам и для всех значений индексов имеем $N_0 = N^2$ уравнений [1, 2, 4]:

$$m\ddot{u}_{kq} + c_1(2u_{kq} - u_{(k-1,q)} - u_{(k+1,q)}) + c_1(2u_{kq} - u_{(k,q-1)} - u_{(k,q+1)}) = g_{kq}(p; t, u_{kq}); \quad c_1 = \Delta L \tau^{-1}. \quad (1)$$

Система (1) может быть записана в операторном виде:

$$u_{kq}(t) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} L_{kq,nj}(p) g_{nj}(p; u_{nj}, t). \quad (2)$$

Операторы динамической податливости $L_{kq,nj}(p)$ ставят в соответствие силе, приложенной в узле (n, j) перемещение узла (k, q) и подробно описаны в работе [8]. Они определяются наборами собственных частот $\{\Omega_{kq}\}$ и коэффициентов собственных форм $\{\Theta_{kq}\}$.

3. Если вблизи решеток установлены ограничители хода, то система – виброударная. На рис. 1 показан плоский ограничитель, расположенный снизу; величину зазора обозначаем Δ .

Регулярные алгоритмы изучения виброударных процессов дают частотно-временные методы [6]. Разыскивая Т-периодические свободные колебания с одним взаимодействием каждого

узла с ограничителем, вместо (2) получим систему интегральных уравнений гаммерштейновского типа:

$$u_{kq}(t) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \int_0^T \chi_{kq,nj}(t-s) g_{nj}[u_{nj}(s), \dot{u}_{nj}(s)] ds + w_{kq}(t), \quad (3)$$

где

$$\chi_{kq,nj}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_{kq,nj}(ik\omega) e^{ik\omega t}$$

T -периодическая функция Грина; $w_{kq}(t)$ - перемещения узлов (k, q) в предположении отсутствия соударений. Здесь $g_{nj}[u_{nj}(s), \dot{u}_{nj}(s)]$ - суть сила ударного взаимодействия.

Пусть контакт узлов с ограничителем осуществляется в соответствии с концепцией Ньютона. Тогда условия ударного взаимодействия и представление силы удара:

$$u_{kq}(\varphi_{kq}) = \Delta; \quad \frac{d}{dt} u_{kq}(\varphi_{kq} - 0) = -R \frac{d}{dt} u_{kq}(\varphi_{kq} + 0), \quad g_{kq}[u_{kq}(t)] = J_{kq} \delta^T(t - \varphi_{kq}), \quad (4)$$

где $\Delta, \varphi_{kq} \in [0, T]$ - зазор и момент удара в узле (k, q) ; $R \in (0, 1]$ - коэффициент восстановления; импульсы ударов $J_{kq} = m(1+R)|\dot{u}_{kq}(\varphi_{kq} - 0)|$; $\delta^T(t)$ - T -периодическая последовательность δ -функций.

Из (5) и (4), получаем $2N^2$ -параметрическое представление, в котором неизвестные параметры движения подлежат определению:

$$u_{kq}(t) = w_{kq}(t) - \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} J_{nj} \chi_{kq,nj}(t - \varphi_{nj}), \quad k, q = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

Из первой и второй формул (5) (условий соударений) находим систему уравнений

$$\begin{aligned} \Delta \equiv u_{kq}(\varphi_{kq}) &= w_{kq}(\varphi_{kq}) - \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} J_{nj} \chi_{kq,nj}(-\varphi_{nj}), \\ J_{kq} &= 2m(1+R) \left[\dot{w}_{kq}(\varphi_{kq}) - \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} J_{nj} \frac{d}{dt} \chi_{kq,nj}(\varphi_{kq} - \varphi_{nj} - 0) \right], \quad k, q = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (6)$$

Периодическим свободным колебаниям с одним соударением за период отвечают решения системы (6), определяющей $2N^2$ параметров движения $(J_{kq}; \varphi_{kq})$. Особое внимание привлекают решения с простейшей структурой, отвечающие синфазным, антифазным или локализованным режимам [4, 6-8].

При реализации, например, синфазных периодических режимов фазы законов движения узлов решетки одинаковы. Как правило, такие или подобные режимы регистрировались экспериментально. Они отвечают нелинейным резонансным режимам.

Синфазные «хлопки» характеризуются одновременными ударами узлов. Однако, необходимо подчеркнуть, что синфазные режимы могут и не сопровождаться синхронными соударениями (см. ниже).

3. Описание экспериментального стенда. В состав стенда «Аллигатор Квадрат» (рис.1) входят рабочая установка, а также системы регистрации и управления.

Рис.1. Установка «Аллигатор Квадрат»

В свою очередь, рабочая установка состоит из: вибровозбудителя (**V**), сменяемых квадратных струнных решеток (**L**), размеры которых 250×250 мм, состоящих из рамок, сделанных из алюминиевого профиля и взаимно перпендикулярных натянутых резиновых жгутов диаметром 1мм. Величины сторон ячеек решёток контролируют прецизионные линейки. Рамки (2×2, 3×3, 4×4) прикрепляется к штоку вибровозбудителя. Они сконструированы так, что имеется возможность изменять параметры решетки (количество струн, размеры ячеек и др.). Узлы решеток образованы помещенными в местах пересечения жгутов тороидальными шайбами $d=9$ мм и массой 1,1 г. Шайбы выполнены из закаленной стали; они не фиксируются жестко.

Данная установка допускает применение односторонних или двусторонних ограничителей, в качестве которых могут использоваться датчики силы, смонтированные на стальной платформе. В качестве ограничителей выступают также листы стекла толщиной 8 мм или гетинакса толщиной 10 мм. Будет рассмотрен случай одностороннего ограничителя.

Система регистрации и управления состоит из управляющего компьютера (**CC**), на который возложены функции управления вибратором и частотно-временного анализа регистрируемых величин, поступающих с усилителя мощности (**A**), цифрового стробоскопа (**SL**), измерителя амплитуды вибрации штока вибровозбудителя (**MA**), и, кроме того, также датчиков силы (F_{nj}). Регистрация профилей стоячих волн струнных решеток осуществляет камера (**C**), работающая как в режиме фотографирования, так и в режиме ускоренной видеосъемки.

Сигналы от датчиков силы (F_{nj}) подступают на управляющий компьютер, где могут визуализироваться на дисплее и представляться как в частотном, так и во временном диапазонах; лампа стробоскопа (**SL**) обеспечивает «остановку» движения решеток и непосредственную визуализацию профилей стоячих волн.

4. Периодические режимы. Экспериментальные данные. В работе [1] были описаны наблюдаемые на стенде «Аллигатор Квадрат» синфазные хлопки – периодические режимы с одновременными ударами узлов.

Рис.2. Хлопок в решетке 2×2

На рис. 1 и 2 показаны профили таких режимы для решеток 2×2 и 3×3. При реализации указанных режимов проявляются свойственные хлопкам нелинейные эффекты, характерные для ударных осцилляторов [6] – затягивание по частоте, срыв, явление жёсткого запуска.

Рис.3. Хлопок в решетке 3×3

Видно, что соударения узлов с неподвижным ограничителем происходят одновременно, но при этом величины пролётов решетки не одинаковы. Если для решётки 2×2 можно считать, что равенство пролётов выполняется приближенно, то для решётки 3×3 боковые пролёты более, чем в два раза превышают величины центральных пролётов. Получить устойчивые

режимы с одновременными соударениями при установке одинаковых ячеек в данных экспериментах не удавалось.

При выравнивании ячеек в решетке 3×3 были зарегистрированы устойчивые периодические режимы, для которых, как и для хлопков проявлялись нелинейные резонансные явления, упомянутые выше.

На большой серии фотографий рис. 4, пронумерованных от 1 до 36. Дадим описание приводимым изображениям.

Фото 4.1 – стартовый профиль: все узлы находятся на максимальном удалении от ограничителя.

Фото 4.2—4.4: все узлы совершают движение к ограничителю. Стартовый профиль частично сохраняется. Можно увидеть, что скорость центрального узла нарастает быстрее.

Фото 4.5—4.7: координаты всех узлов приблизительно выравниваются. Все узлы выстроены в плоскости. Можно приближенно считать, что, например, профиль 4.6 отвечает синхронным ударам всех узлов для системы рис.3.

Фото 4.8—4.11: во время движения к ограничителю центральный узел движется с большей скоростью и обгоняет боковые узлы.

Фото 4.12—4.17: центральный узел снижает скорость и стремится «подождать» боковые узлы.

Фото 4.18, 19: центральный узел отстаёт, в то время как боковые узлы двигаются к ограничителю.

Фото 4.20—24: боковые узлы неодновременно соударяются с ограничителем. Центральный узел двигается к ограничителю.

Фото 4.25—27: боковые узлы двигаются в направлении «от ограничителя». Центральный узел соударяется.

Фото 4.28: центральный узел совершает быстрый отскок после удара.

Фото 4.29—4.30: координаты всех узлов снова приблизительно выравниваются (см. фото 4.5.-4.7).

Фото 4.31—4.36: профиль решетки возвращается к стартовому.

Рис.4.-1

Рис.4-2

Рис.4.3

Рис.4.4

Рис.4.5.

Рис.4.6

Рис.4.7

Рис.4.8

Рис.4.9

Рис.4.10

Рис.4.11

Рис.4.12

Рис.4.13

Рис.4-14

Рис.4-15

Рис.4-16

Рис.4-17

Рис.4-18

Рис.4-19

Рис.4-20

Рис.4-21

Рис.4-22

Рис.4-23

Рис.4-24

Рис.4-25

Рис.4-26

Рис.4-27

Рис.4-28

Рис.4-29

Рис.4-30

Рис.4-31

Рис.4-32

Рис.4-33

Рис.4-34

Рис.4-35

Рис.4-36

5. Заключение. В данной статье установлено, что при рассмотрении струнных решеток с расширенными ячейками, описанное ранее свойство образования стоячих волн -хлопков с синхронными соударениями всех узлов может трансформироваться в режимы с более сложными профилями. При этом сохраняются периодичность стоячих волн и ряд свойств, характерных для нелинейных резонансных процессов. Синхронность соударений, по-видимому, переходит в синхронность достижения узлами решетки некоторых промежуточных координат, отличных от величины зазора.

Указанные результаты требуют подробного теоретического изучения, а также ряда уточнений, касающихся выяснению роли числа узлов, ширины пролётов и некоторых других факторов.

Список литературы

1. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Андрианов Н.А. Виброударные эффекты при ограниченных колебаниях струнных решёток с массивными узлами// Доклады Академии наук. - 2018. - Том 480, № 6. - С. 1–5.
2. Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. - Ташкент: ФАН, 1973. - 272 с.

3. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. - М.: Наука, 1972. - 471 с.
4. Astashev V., Andrianov N., Krupenin V. Vibration of string lattice // Vibroengineering PROCEEDIA. - 2016. - Vol.8. - P.97-101.
5. Асташев В.К., Андрианов Н.А., Крупенин В.Л., Привезенцев В.Н., Колик Л.В., Свойства поверхностных слоев, наноструктурированных в результате авторезонансного ультразвукового течения // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2011. - № 5. - С.68-72.
6. Бабицкий В.И. И., Веприк А.М., Крупенин В.Л. Виброударные эффекты при ограниченных колебаниях одномерной цепочки упруго соединенных бусинок // ДАН СССР. - 1989. - Т. 300, № 3. - С. 562— 566.
7. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. В.: Springer-Verlag, 2001. - 404 p.
8. Крупенин В.Л. Анализ сингуляризованных уравнений движения решетчатых виброударных 2D-систем при отказе от гипотезы Ньютона // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2016. - № 2. - С.13-22.

Дата поступления: 25 апреля 2019 г.

УДК 534.1

СТРУКТУРЫ В НЕРАВНОВЕСНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ СРЕДАХ**Николай Николаевич Веричев***Институт проблем машиностроения РАН, Н. Новгород, Россия*nverichev@yandex.ru

Аннотация. Проводится исследование и классификация динамических структур в одномерных решетках – цепочке и кольце, а также в двумерной решетке осцилляторов с диффузионными связями. Данные дискретные динамические системы служат моделями для качественного исследования процессов в сплошных средах, а также представляют многочисленные системы из различных областей естествознания и технических приложений.

Ключевые слова: динамическая система, цепочка, кольцо, решетка, осциллятор.

STRUCTURES IN NONEQUILIBRIUM BOUNDED MEDIA**N.N. Verichev***Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia*nverichev@yandex.ru

Abstract. The study and classification of dynamic structures in one-dimensional lattices: a chain and a ring, as well as in a two-dimensional lattice of oscillators with diffusion coupling have being carried out. These discrete dynamic systems serve as models for a qualitative study of processes in continuous media and also represent numerous systems from various fields of natural science and technical applications.

Keywords: dynamical system, chain, ring, lattice, oscillator.

1. Введение. Колебания жидкости (газа) происходящие на поверхности или в слое, инициированные и поддерживаемые внешними источниками энергии (совместно с источником - автоколебания) - явление давно и хорошо известное [1-5 и др.]. Примером тому являются устойчивые системы вихрей на поверхности двумерных течений жидкости (в атмосфере), а также системы конвективных валов [1, 4]. Однако, не смотря на давнюю историю наблюдений, аналитическое описание этих явлений непосредственно уравнениями гидродинамики крайне затруднено. По-видимому, наиболее удачливым здесь является результат Лоренца по исследованию динамики пространственно-однородной структуры термоконвекции с применением метода Бубнова-Галеркина [6]. Для описания более сложных структур – пространственно-неоднородных, являющихся предметом нашего интереса, использование галеркинских приближений проблематично.

Дискретные модели – решетки («среда») связанных осцилляторов, используются достаточно давно в качественных исследованиях процессов в сплошной среде и с их помощью получают вполне адекватные результаты (системы осцилляторов получают заменой

пространственных производных конечными разностями, а частных производных по времени обыкновенными) [7,8,9 и др.]. На стороне дискретных моделей стоят достаточно хорошо отработанные приемы и методы исследования, а также возможность ясной физической интерпретации исследуемых динамических процессов, в частности - «на языке» синхронизации осцилляторов (автогенераторов). В настоящей работе проводится исследование и классификация структур в классических моделях связанных осцилляторов: цепочка, кольцо и двумерная решетка с диффузионными связями. Результаты будут распространяться на собственно дискретные системы различной природы, описываемые в рамках данных моделей.

Классический пример «структурной» динамики дает термоконвекция, рис.1 [1].

Рис.1 Конвективные валики, движимые плавучестью. Дифференциальные интерферограммы демонстрируют сбоку конвективную неустойчивость силиконового масла в прямоугольном ящике с относительными размерами сторон 10:4:1, подогреваемом снизу.

На верхнем снимке видна ситуация Рэлея – Бенара (равномерный нагрев), на нижней фотографии ящик вращается относительно вертикальной оси (в подписи сохранены стиль и терминология оригинала [1]).

Как видим, на верхнем рисунке выражено в меньшей степени, а на нижнем – явно, структура течения является пространственно-неоднородной и состоит из дискретных объектов - конвективных ячеек. Здесь же видим выделяющиеся две группы ячеек, создающих симметрическую динамическую картину относительно середины кюветы.

Предположим, что динамика жидкости в каждой из ячеек может быть описана в рамках некоторой сосредоточенной математической модели – осциллятора. Пример тому – конвективная петля, описываемая осциллятором Лоренца [10]. В таком случае аналогом динамической картины конвекции будет динамическая картина в системе связанных осцилляторов, блок-схема которой изображена на рис.2.

Рис.2. Схема конвективной структуры, как цепочки осцилляторов.

На схеме одинаковым цветом изображаются осцилляторы с идентичной динамикой. Здесь и далее не будем конкретизировать сами осцилляторы, их внутреннее «устройство» и динамические свойства, а до поры и характер связей между ними.

Как известно из физики автогенераторов (осцилляторов) их согласованные движения и, в частности, тождественное динамическое состояние поддерживается процессом синхронизации. Будет естественным распространить «язык синхронизации» и на

рассматриваемый случай. Однако, пока здесь имеется особенность: синхронизованные осцилляторы (одноцветные), за исключением четвертого и пятого, не имеют непосредственных связей и говорить об их взаимодействии и синхронизации формально проблематично. Эту формальную преграду обойдем введя в рассмотрение групповые (кластерные) осцилляторы (КО), составляющими которых будут являться сами элементарные осцилляторы. В данном случае таковых КО будет два: $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$ и $Y = (X_8, X_7, X_6, X_5)^T$. В случае синхронизации данных КО имеем равенство $X = Y$, то есть $(X_1, X_2, X_3, X_4)^T = (X_8, X_7, X_6, X_5)^T$, что соответствует исследуемой структуре. Далее исследование структуры, в частности – устойчивости, можно проводить в рамках привычных алгоритмов исследования синхронизации.

При изменении параметров эксперимента, в кювете могла бы реализоваться и другая структура – с нечетным количеством конвективных ячеек, схема которой изображена на рис.3.

Рис. 3. Схема пространственно-неоднородной структуры с нечетным числом конвективных ячеек.

В отличие от предыдущего случая, здесь явно не выделяются взаимодействующие КО, но, тем не менее, они существуют. Поясним это на следующем примере.

Допустим, что имеются два соприкасающиеся маятника Фруда [11], посаженных на вращающийся вал. Один из них (второй) является половиной другого, “целого маятника”, рис.4,а. Допустим, что между муфтами и валом существует вязкое трение и таковое же существует между муфтами маятников.

Рис.4. Физическая интерпретация КО $O_a(2)$ и простой клетки на его базе.

Уравнения движения системы, рис.4,а, имеют вид

$$ml^2\ddot{\phi}_1 + d\dot{\phi}_1 + mgl \sin \phi_1 = R(\Omega - \dot{\phi}_1) + \lambda(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1),$$

$$\frac{m}{2}l^2\ddot{\phi}_2 + \frac{d}{2}\dot{\phi}_2 + \frac{m}{2}gl \sin \phi_2 = \frac{R}{2}(\Omega - \dot{\phi}_2) + \lambda(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)$$

Здесь $R(\Omega - \dot{\varphi}_1)$ – момент силы вязкого трения со стороны вала на первый маятник и $\frac{R}{2}(\Omega - \dot{\varphi}_2)$ – на второй (они пропорциональны площади соприкосновения муфты маятника с валом); $\lambda(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$ и $\lambda(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)$ – взаимные моменты сил трения маятников; d – коэффициент вязкого трения среды. В результате введения безразмерного времени $\frac{mgl}{d+R}t = \tau$, получаем динамическую систему КО, который обозначим $O_a(2)$:

$$\dot{X} = G(X) - \varepsilon B_a \otimes CX,$$

где: $X = (X_1, X_2)^T$, $G(X) = (F(X_1), F(X_2))^T$, $X_1 = (\varphi_1, \xi_1)^T$, $X_2 = (\varphi_2, \xi_2)^T$,

$$F(X_1) = (\gamma + I^{-1}\xi_1, -\xi_1 - \sin \varphi_1)^T, \quad F(X_2) = (\gamma + I^{-1}\xi_2, -\xi_2 - \sin \varphi_2)^T, \quad B_a = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \text{diag}(0, 1), \quad I = \frac{l}{g} \left(\frac{mgl}{d+R} \right)^2, \quad \gamma = \frac{R\Omega}{mgl}, \quad \varepsilon = \frac{\lambda I}{d+R}, \quad \otimes - \text{ символ прямого произведения}$$

матриц.

Если бы второй маятник на рис.4а был «полноценным», то различие в уравнениях состояло бы в матрице связи элементарных осцилляторов, входящих в «кластерный» осциллятор: эта пара представляла бы КО $O_s(2)$ с матрицей $B_s = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, подобный $O_s(4)$ на рис.2.

Допустим, что имеется второй КО $O_a(2)$ синхронизованный с первым – его «динамический образ», находящийся на том же валу. Ясно, что соединение их жесткой перемычкой, рис.4б, не изменяет динамический режим ни того ни другого. В результате получаем, что динамика этой пары КО эквивалентна динамике системы из трех «полноценных» элементарных осцилляторов, рис.4в, имеющей аттрактор КО $O_a(2)$. Подобные объекты далее будем называть простыми клетками (ПК). Жесткая связь КО в ПК осуществляет устойчивую к возмущениям начальных условий синхронизацию этих субъектов – структуру ПК.

Собственная структура и роль $O_s(n)$ и $O_a(n)$ в формировании «больших» кластерных структур имеет аналогию с квантомеханическими квазичастицами, – бозонами и фермионами. Как известно, первые играют во взаимодействиях самостоятельную роль, а вторые, прежде чем стать субъектами взаимодействий, «предварительно» объединяются в пары (рождаются и умирают парами). В рамках данных представлений можно предложить и квантомеханическую интерпретацию «кластерной» динамики решетки осцилляторов. Для исследования существования разных типов кластерных структур в решетках различной геометрической размерности и формы далее будут использоваться их схемы и эквивалентные преобразования последних, совпадающие с эквивалентными преобразованиями электрических цепей. При необходимости можно найти к ним гидродинамические, химические и другие аналоги. Используемая далее терминология и принципы будут следующими.

1. Два, непосредственно связанные синхронизованные элементарные осцилляторы, изображаемые на схеме кластерной структуры одним цветом, будем называть *разрезаемой парой* (РП). Связь между такими осцилляторами может быть удалена (разрезана) (на электрической схеме это соответствует разрезанию (вырезанию) обесточенных участков

цепи между эквипотенциальными точками). Наоборот, между любыми одноцветными изображениями схемы может быть установлена любая пассивная связь или произведено короткое замыкание соответственных точек.

2. Если схема имеет хотя бы одну РП, то ее будем называть разрезаемой, в противном случае, - не разрезаемой.

3. Схема кластерной структуры простой клетки является не разрезаемой.

4. Если некоторая схема не имеет ни одной РП, то это или схема простой клетки или схема отдельного КО или эта схема не верна вовсе.

5. Процедуру совмещения двух и более одноцветных изображений путем перегибов схемы через оси симметрии или действуя иным способом, будем называть свертыванием схемы (на электрической схеме это соответствует замыканию эквипотенциальных точек).

6. Схема простой клетки свертывается к схеме ее базового КО, то есть к схеме, не содержащей синхронизованных (одноцветных) элементарных осцилляторов.

7. При разрезании всех РП любая схема кластерной структуры распадается на идентичные схемные блоки - схемы базового КО или схемы базовой простой клетки.

2. Структуры в одномерных средах с диффузией. Рассматриваем дискретную модель однородной одномерной среды с диффузией и неймановскими граничными условиями (цепочку) – дифференциальные уравнения вида

$$\dot{X}_i = F(X_i, t) + \varepsilon C(X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1}),$$

$$i = \overline{1, N}, X_0 \equiv X_1, X_N \equiv X_{N+1}.$$
(1)

Здесь: $X_i, F(X_i, t)$ - вектор-функция состояния и нелинейность «элемента» среды -

осциллятора, $\dim(X_i, F(X_i, t)) = n$, C, ε - матрица и скалярный параметр связи этих элементов.

Здесь и далее вопрос о существовании структур различного типа в решетках осцилляторов, будем решать как вопрос существования различного типа структурообразующих (базовых) субъектов – КО и их ПК.

С учетом очевидного – одномерности возможных в цепочке (1) КО и ПК, а также в результате простых рассуждений о способах заполнения отрезка длины N (осцилляторов) путем перекладывания отрезка меньшей длины n (размер КО) или $2n-1$ (размер ПК) по указанным выше правилам (подобно выкладыванию разноцветного бордюра), приходим к следующему выводу.

В одномерном случае среды ограниченной на концах существуют два типа КО: особый КО, который обозначим $O_s(n)$, и неособый - $O_a(n)$, пара которых по указанному выше принципу, образует ПК с числом осцилляторов $2n-1$. Изображение схем названных КО и ПК, а также синтез схем структур на их базе представлены на рис.5,6.

Рис.5. Схема $O_s(n)$ и синтез схемы кластерной структуры на его базе.

Рис.6. Схема КО $O_a(n)$, синтез схемы его ПК (черный отрезок на верхнем рисунке – след символического зеркала) и синтез схемы кластерной структуры в цепочке (на связях РП изображен символический «нож»).

Дадим математическое определение изображенных выше КО.

Определение 1. К-осциллятором типа $O_s(n)$ ($O_a(n)$) называем динамическую систему n связанных элементарных осцилляторов вида

$$\dot{X} = G(X) - \varepsilon (B_{s(a)} \otimes C) X, \\ X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T, G(X) = (F_1(X_1), F_2(X_2), \dots, F_n(X_n))^T,$$

$$B_s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

при условии существования в фазовом пространстве $H(X)$ аттрактора $A_s(n)$ ($A_a(n)$) для $O_a(n)$), такого, что для $\forall (X_1, X_2, \dots, X_n) \in A_s(n)$ ($\forall (X_1, X_2, \dots, X_n) \in A_a(n)$), $X_i \neq X_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. $B_s \otimes C$ ($B_a \otimes C$) – матрица связи элементарных осцилляторов, $\otimes$ – символ прямого (кронекерова) произведения матриц.

Замечание. В данном определении нелинейные функции осцилляторов могут быть как одинаковыми так и разными, а сами осцилляторы могут быть различными не только по параметрам, но и по своей природе. На эту возможность указывают принципы синтеза схем. В случае различных элементарных осцилляторов любые аттракторы в фазовом пространстве КО могут быть использованы для реализации структурированного динамического режима цепочки. В этом случае мы будем иметь дело со структурной динамикой в искусственно созданной упорядоченной среде. При необходимости здесь можно ставить и решать задачи по формированию необходимых динамических структур в некоторой среде и, соответственно, управлению этими структурами.

Обратим внимание на важность в определении условия того, что $\forall (X_1, X_2, \dots, X_n) \in A_s(n)$ $X_i \neq X_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Дело в том, что в случае однородной среды в фазовом пространстве КО, как правило, существует множество других аттракторов, не отвечающих интересующему структурному режиму цепочки. Кроме того, нужный аттрактор может вовсе исчезнуть при определенных параметрах. В частности, можно показать, что при достаточно большом ε в фазовом пространстве исчезают все аттракторы за исключением «главного»,

для которого $X_i = X_j, \forall i, j = \overline{1, n}$. Этот аттрактор совпадает с аттрактором одиночного осциллятора и соответствует пространственно-однородному состоянию среды. Например, если $X = (x, y, z)^T, F(X) = (-\sigma(x - y), -y + rx - xz, -bz + xy)^T$, то мы будем иметь дело с цепочкой осцилляторов Лоренца, хорошо известных по моделированию тепловой конвекции в подогреваемом снизу слое жидкости. В этом случае знаменитый аттрактор Лоренца будет соответствовать хотя и турбулентному, но совершенно идентичному, синхронизованному движению жидкости во всех конвективных ячейках. Аттрактор (аттракторы), упоминаемый в *Определении* существует при «умеренных» значениях параметра связи и он всегда сосуществует с другими аттракторами связанной системы. В частности, по этой причине исследуемые структуры могут быть устойчивы «в большом», но не глобально. Физически данная ситуация совершенно аналогична той, с которой мы имеем дело в теории и практике классической синхронизации автогенераторов: есть режим синхронизации, соответствующий предельному циклу и есть режим биений, соответствующий тору. И если много автогенераторов связать в цепочку некоторой длины, то этот режим биений (для соседней пары) может оказаться режимом синхронизации для групп, составленных из пар осцилляторов (межгрупповая синхронизация), в результате чего образуется динамическая пространственно-неоднородная структура (точнее, - пространственно-периодическая, с полупериодом равным числу осцилляторов в КО), образом которой будет являться названный тор. Если данную ситуацию интерпретировать на сплошную среду, то подобное структурированное течение жидкости можно назвать «вторичным на фоне главного», поскольку оно может содержать особенности главного течения.

Обратим внимание на связь существования структур с алгебраическими свойствами системы (1). А именно, факт существования некоторой структуры отражается возможностью переформатирования системы (1) в виде системы соответствующего числа взаимодействующих КО $O_s(n)$ или в виде системы соответствующего числа взаимодействующих ПК $O_a(n)$ (формально вид ее уравнений тот же самый, что и для $O_s(n)$ при замене $n \rightarrow 2n - 1$). И такое переформатирование уравнений следует сделать, в частности, при исследовании устойчивости структур, обращая тем самым эту задачу в стандартную задачу устойчивости синхронизации автогенераторов.

Выше указаны два типа структур, которые могут возникать в одномерной среде. На вопрос о возможности существования других типов структур отвечает следующая теорема.

Теорема 4.3.1. $O_s(n)$ и $O_a(n)$ составляют полный набор типов КО в цепочке элементарных осцилляторов с неймановскими граничными условиями. Синхронизация этих КО и их простых клеток определяет все возможные типы существующих в цепочке кластерных структур.

Доказательство. Представлено в [12].

Следствие 1. О числе структур в цепочке при заданном N . Если p - количество всех сомножителей (простых и составных) числа N , исключая само число и единицу, то в цепочке из N элементарных осцилляторов существует p кластерных структур на базе $O_s(n)$ при разных n . Если q - количество всех нечетных сомножителей (простых и составных) числа N , включая само число, если оно нечетно, то в цепочке существует q кластерных структур на базе ПК КО $O_a(n)$ при разных n . Полное число кластерных структур в цепочке с заданным N равно $p + q$.

Доказательство. Во-первых, по теореме все схемы КС в цепочке синтезируются или на базе схем $O_s(n)$ или на базе схем ПК $O_a(n)$. Во-вторых, все схемы состоят из целого числа соответствующих блоков, рис.5,6. Для схемы КС на базе $O_s(n)$ имеем равенство $N = mn, m \geq 2, n \geq 2$. Отсюда получаем число кластерных структур на его базе равно p . Для структур на базе ПК $O_a(n)$ $N = m(2n-1), m \geq 1, n \geq 2$, а это значит, что число таких структур равно q . Суммарное число структур равно $p + q$.

Пример. Пусть $N = 100$. В этом случае $p = 7$, а $q = 2$. То есть в цепочке, варьируя начальными условиями и параметрами, может быть реализовано в сумме девять структур. Полный список этих структур с указанием базы: $O_s(2)$ (в структуре содержится $m = 50$ штук таких КО), $O_s(4)$ (25 шт.), $O_s(5)$ (20 шт.), $O_s(10)$ (10 шт.), $O_s(20)$ (5 шт.), $O_s(25)$ (4 шт.), $O_s(50)$ (2 шт.), $O_a(13)$ (в структуре $m = 4$ штук ПК $O_a(13)$), $O_a(3)$ (20 шт.).

Следствие 2. Об интегральных многообразиях уравнений цепочки. Исходя из арифметических свойств числа осцилляторов в цепочке N , а также следствия 1, можно получить все интегральные многообразия уравнений (1) представленные в [13-15]. Их математические выражения получаются приравниванием векторов динамических переменных синхронизированных осцилляторов. По теореме можно утверждать, что каких-либо других «кластерных» интегральных многообразий, кроме данных, в цепочке нет.

3. Структуры в однородном кольце. Наряду с цепочкой кольцо осцилляторов также является одной из базовых моделей теории колебаний и волн [7]. В частности, кольцо является моделью для изучения автоволновых процессов в активных средах с периодическими граничными условиями, при моделировании биологических, химических и других систем [7,9 и др.]. Динамическая система кольца имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= F(X_i, t) + \varepsilon C(X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1}), \\ i &= \overline{1, N}, X_0 \equiv X_N, X_1 \equiv X_{N+1}. \end{aligned} \quad (2)$$

В развитие изложенных выше принципов будем исследовать структурообразующие субъекты кольца – всевозможные типы КО и ПК.

Разрезаемые кластерные структуры кольца. Допустим, что схема кластерной структуры кольца содержит разрезаемую пару. Разрезание этой пары сводит схему структуры в кольцо к эквивалентной схеме в цепочке. Это значит, что базовые КО цепочки $O_s(n)$ и $O_a(n)$ являются базовыми и для кольца. Определения этих КО даны в предыдущем разделе.

Синтез схем разрезаемых кластерных структур производится аналогично цепочке, с одним замечанием, - число схем-блоков КО $O_s(n)$ в общей схеме кольца всегда четно, поскольку эквивалентная схема цепочки является центрально-симметричной.

Для примера, на рис.7 представлена разрезаемая кластерная структура, как синхронизация пары КО $O_s(3)$ в однородном кольце из $N = 6$ диффузионно-связанных осцилляторов Чуа

$$[16]: \quad X = (x, y, z)^T, F(x, y, z) = (\alpha(y - h(x)), -y + z - x, -\beta y - \gamma z)^T$$

$$h(x) = m_1 x + \frac{m_0 - m_1}{2} (|x + 1| - |x - 1|). \text{ Параметры численного эксперимента}$$

$$\{\alpha; \beta; \gamma; m_0; m_1; \varepsilon\} = \{9.5; 14; 0.1; -1/7; 2/7; 0.34\}.$$

Первый и шестой, а также третий и четвертый элементарные осцилляторы – две РП кластерной структуры.

Рис.7. Разрезаемая кластерная структура на базе пары $O_s(3)$.

В отличие от структур на базе $O_s(n)$, число ПК на базе $O_a(n)$ в кластерной структуре кольца может быть любым, – как четным, так и нечетным.

Для примера на рис.8 представлен результат численного эксперимента с тем же кольцом при других параметрах. Здесь изображена разрезаемая кластерная структура, как синхронизация двух ПК $O_a(2)$. Параметры эксперимента $\{\alpha; \beta; \gamma; m_0; m_1; \varepsilon\} = \{9.5; 14; 0,1; -1/7; 2/7; 0.2175\}$.

Рис.8. Кластерная структура в кольце, как синхронизация пары ПК $O_a(2)$

Не разрезаемые кластерные структуры кольца. Предположим, что схема структуры кольца не содержит ни одной РП. В таком случае она (схема) представляет простую клетку и, следовательно, должна свертываться к схеме некоторого (искомого) КО. В кольце процедуры свертывания естественно связывать с различными видами его симметрии.

1⁰. *Зеркальные кластерные структуры кольца.* Будем считать, что кольцо представляет собой окружность с равномерным распределением осцилляторов. Если схема обладает зеркальной симметрией, то след зеркала является диаметром, проходящим через середины противоположных осцилляторов, так как на рис.9,а. Смысл половинок осцилляторов тот же самый, что и для КО $O_a(n)$. Если осцилляторы на большой дуге различны, то она представляет собой схему КО. В общем случае на этой дуге могут быть синхронизованные осцилляторы.

Допустим, что имеется общий случай, - среди осцилляторов дуги имеются синхронизованные (одноцветные), рис.9а. Тогда схема осцилляторов дуги AF представляет целое число схем КО. Причем схема базового КО должна быть подобна той, как если бы он занимал всю дугу AF (половинки на концах).

Рис.9. Свертывание схемы «зеркальной» КС простой клетки.

Начиная от осциллятора F , выделим на схеме все подряд идущие «разноцветные» элементарные осцилляторы – дугу осцилляторов. Продолжая перегибать эту и последующие ей подобные дуги через середину конечного осциллятора, получаем картину, представленную на рис.9с. На рис.9б изображена дуга перед последней итерацией. Элементарные осцилляторы на дуге AB представляют схему искомого КО, базового для кластерной структуры, которую будем называть «зеркальной». Обозначим его $O_a^r(n)$ и приведем определение.

Определение 2. Зеркальным КО $O_a^r(n)$ будем называть систему $n \geq 2$ связанных элементарных осцилляторов вида

$$\begin{aligned} \dot{X} &= G(X) - \varepsilon B_a^r \otimes CX, \\ X &= (X_1, X_2, \dots, X_n)^T, G(X) = (F_1(X_1), F_2(X_2), \dots, F_n(X_n))^T, \end{aligned} \quad (3)$$

$$B_a^r = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & & & \\ 0 & 0 & -1 & 2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 2 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

при условии существования в фазовом пространстве системы аттрактора $A_a^r(n)$, такого, что для $\forall (X_1, X_2, \dots, X_n) \in A_a^r(n)$, $X_i \neq X_j, i \neq j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$.

Уравнение (3) можно получить, в частности, из уравнений (2), где в качестве граничных условий следует взять $X_2 \equiv X_0$, $X_{n+1} \equiv X_{n-1}$.

Для иллюстрации сказанного на рис.10 изображена зеркальная кластерная структура в однородном кольце $N = 6$ осцилляторов Чуа. Параметры эксперимента $\{\alpha; \beta; \gamma; m_0; m_1; \varepsilon\} = \{9.11; 14; 0,1; -1/7; 2/7; 0.25\}$. Плоскость “зеркала” проходит через первый и четвертый осцилляторы.

Рис.10. Зеркальная кластерная структура на базе $O_a^r(4)$.

Синтез схемы зеркальной структуры ведется в порядке обратном свертыванию.

Нетрудно вывести формулу, связывающую общее число осцилляторов в кольце N с числом КО в структуре и числом элементарных осцилляторов n самого КО: $N = 2m(n-1)$, где m - число КО, заполняющих половину кольца. Непосредственно из этой формулы следует, что если r - число всех сомножителей числа $N/2$, включая само число, то в кольце существует r зеркальных кластерных структур на базе КО $O_a^r(n)$. Например, в случае $N=12$ существует три структуры на базе $O_a^r(n)$: структура из двух $O_a^r(7)$, из четырех $O_a^r(4)$ и шести КО $O_a^r(3)$. В случае $N=6$ в кольце существует одна зеркальная структура на базе синхронизации $O_a^r(4)$, рис. 10.

2⁰. Циклические кластерные структуры кольца. Этот тип структур связан с симметрией поворота кольца.

Допустим, что в кольце реализована некоторая n кластерная структура с циклической симметрией. Сведем все элементарные осцилляторы, какого нибудь одного кластера («одноцветные») в один узел (короткие замыкания). В результате получим фигуру, напоминающую m лепестковую «розу». Пример изображен на рис. 11, b.

Рис.11. Свертывание схемы циклической структуры.

Допустим, что среди осцилляторов каждого лепестка нет «одноцветных» (из разных кластеров). Можно доказать, что в этом случае порядок следования синхронизованных осцилляторов на лепестках одинаков. Продолжаем свертывание схемы КС, поворачивая «лепестки» до совмещения «одноцветных» осцилляторов (короткие замыкания). В результате образуется кольцо несинхронизованных осцилляторов, рис.11,с. Это кольцо и является искомым КО «циклических» структур. Синтез «большой» схемы циклической структуры ведется в обратном порядке, исходя из того, что имеется m идентичных колец (КО), наложенных друг на друга. Ту же схему получим и в результате циклической ретрансляции дуги несинхронизованных осцилляторов, рис.11, а. Обозначим базовый КО циклических КС $O_s^r(n)$ и приведем его определение.

Определение 3. Циклическим КО $O_s^r(n)$ будем называть систему $n \geq 3$ связанных элементарных осцилляторов вида

$$\dot{X} = G(X) - \varepsilon B_s^r \otimes CX, \quad (4)$$

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T, G(X) = (F_1(X_1), F_2(X_2), \dots, F_n(X_n))^T$$

$$B_s^r = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

при условии существования в фазовом пространстве системы аттрактора $A_s^r(n)$, такого, что для $\forall (X_1, X_2, \dots, X_n) \in A_s^r(n), X_i \neq X_j, i \neq j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$.

Нетрудно убедиться, что уравнение (4) представляет кольцо из n осцилляторов.

Для иллюстрации, на рис.12 представлена циклическая кластерная структура, полученная в однородном кольце из $N = 6$ осцилляторов Чуа. Параметры эксперимента $\{\alpha; \beta; \gamma; m_0; m_1; \varepsilon\} = \{9.5; 14; 0,1; -1/7; 2/7; 0.08\}$.

Рис.12. Циклическая кластерная структура на базе $O_s^r(3)$.

Очевидно, что число синхронизованных КО и число кластеров (число элементарных осцилляторов в КО) связано с общим числом осцилляторов в кольце простым соотношением $N = mn$. Это позволяет сформулировать столь же простое утверждение.

Пусть s - число всех сомножителей числа N , исключая само N . Тогда число циклических структур в кольце равно s .

Например, в случае $N = 12$ существует четыре циклические структуры на базе $O_s^r(n)$: структура из двух $O_s^r(6)$, из трех $O_s^r(4)$, из четырех $O_s^r(3)$ и шести КО $O_s^r(2)$. В случае $N = 6$ существуют две циклических кластерных структуры, одна из которых (трех кластерная) изображена на рис.12.

Выше определены четыре типа КС кольца. Докажем, что это полная группа КО. Предварим доказательство простой леммой.

Лемма 1. 1). Если осцилляторы на концах двух смежных параллельных хорд попарно синхронизованы, рис.13,а, то попарно синхронизованы осцилляторы на концах всех хорд связки. 2). Если осцилляторы на концах двух смежных пересекающихся хорд попарно синхронизованы, рис.13,б, то попарно синхронизованы осцилляторы на концах всех хорд пучка.

Доказательство. Будем обращаться со схемой структуры, как с электрической схемой, в которой связи между осцилляторами являются резистивными (R), а сами они подключены в узлах схемы. При этом $V_{A,B,C,...}$ - потенциалы узлов, $I_{A,B,C,...}$ - входные токи осцилляторов. Если речь будет идти об уравнении «для осциллятора», то будем понимать это как уравнение для соответствующего узла. Подробнее см. в [12].

Рис.13. К лемме 1.

1). Рассматриваем осцилляторы хорды EF. Напишем уравнения Кирхгоффа для осцилляторов A и B.

$$V_C + V_E - 2V_A = I_A R, V_D + V_F - 2V_B = I_B R.$$

По условию, $V_A = V_B$, $V_C = V_D$, $I_A = I_B$ (синхронизация). Отсюда получаем равенство $V_E = V_F$. То есть, осцилляторы E и F также являются синхронизованными. Далее рассуждения повторяются для осцилляторов всех остальных хорд связки.

2). Все аналогично первому случаю. Рассматриваем осцилляторы хорды EF. Уравнения Кирхгоффа для осцилляторов A и B:

$$V_C + V_E - 2V_A = I_A R, V_D + V_F - 2V_B = I_B R.$$

По условию, $V_A = V_B$, $V_C = V_D$, $I_A = I_B$ (синхронизация). Отсюда получаем равенство $V_E = V_F$. То есть, осцилляторы E и F являются синхронизованными. Далее рассуждения повторяются для осцилляторов всех остальных хорд пучка.

Теорема 2. КО $O_s(n)$, $O_a(n)$, $O_a^r(n)$ и $O_s^r(n)$ составляют полный набор типов КО в кольце осцилляторов и определяют все типы существующих в кольце кластерных структур.

Доказательство. Допустим, в кольце реализована некоторая кластерная структура. Выделим дугу AF с максимальным числом n несинхронизованных осцилляторов и пронумеруем их, начиная с одного из концов (против часовой стрелки), рис.14.

Рис.14. К теореме 2.

По условию осциллятор G синхронизован с одним из осцилляторов дуги AF . Будем рассматривать полный набор случаев. Если при этом, исключая физически невозможные

случаи, все кластерные структуры будут представлены четверкой указанных КО, то это будет доказательством теоремы.

1). Допустим, что осциллятор G синхронизован с осциллятором F. В таком случае эта пара осцилляторов – РП и данная КС является разрезаемой. Базовые КО такой структуры $O_s(n)$ или $O_a(n)$.

2). Допустим, что осциллятор G синхронизован с осциллятором E. По лемме п.1 (частный случай, - одна из хорд стянута в точку) осцилляторы на концах всех хорд параллельных GE синхронизованы и мы имеем структуру, симметричную относительно диаметра, проходящего через осциллятор F. Если число осцилляторов в кольце нечетно, то последняя из связки короткая хорда стягивает разрезаемую пару. То есть, опять имеется разрезаемая структура с базовым КО $O_a(n)$. Если число осцилляторов четно, то диаметр FL проходит через середины осцилляторов. Допустим, что среди осцилляторов дуги LG нет РП (в противном случае структура является разрезаемой и ее КО $O_a(n)$). В таком случае эта кластерная структура (симметричная относительно диаметра FL) является “зеркальной” и ее КО $O_a^r(n)$.

3). Допустим, что осциллятор G синхронизован с произвольным осциллятором C.

Производим эквивалентные преобразования КС: синхронизованные осцилляторы C и G “стягиваем” в узел, а далее “разводим” их по разным окружностям, рис.15,a,b

Рис.15. Эквивалентные преобразования схемы кластерной структуры

Запишем уравнения Кирхгоффа для осцилляторов G и C в первом и втором положениях системы:

$$\begin{aligned} V_{n+2} + V_n - 2V_G &= I_G R, \quad V_{k-1} + V_{k+2} - 2V_C = I_C R, \\ V_{k-1} + V_{n+2} - 2V_C &= I_C R, \quad V_{k+1} + V_n - 2V_G = I_G R. \end{aligned}$$

При учете равенств $V_G = V_C$, $I_G = I_C$ (синхронизация) получаем: $V_n = V_{k-1}$ и $V_{n+2} = V_{k+1}$. При всех $k > 1$ эти уравнения противоречат условию, что первые n осцилляторов не синхронизованы. При $k=1$, с учетом того, что $V_0 = V_N$, они дают равенства $V_n = V_N$, $V_{n+2} = V_2$. По лемме п.2) последние уравнения определяют циклическую кластерную структуру, рис.15,c, с базовым КО $O_s^r(n)$. Теорема доказана.

Следствие. Если p - количество всех сомножителей (простых и составных) числа $N/2$, включая само число, а q - количество всех нечетных сомножителей числа N , включая его, если оно нечетно, то полное число разрезаемых структур в кольце равно $p+q$. Если r - число всех сомножителей числа $N/2$, включая само число, то в кольце существует r “зеркальных” КС на базе КО $O_a^r(n)$. Если s - число всех сомножителей числа N , исключая само N , то число циклических структур на базе $O_s^r(n)$ равно s . Полное число КС всех типов равно $p+q+r+s$.

Доказательство следствия фактически дано выше, при исследовании типов кластерных осцилляторов.

В качестве примера, если $N=12$, то, по *следствию*, в кольце существует 11 кластерных структур. Их перечисление опускаем. Заметим, что в случае простого N в кольце существует единственная и она же разрезаемая структура на базе ПК $O_a(n)$ с числом кластеров $n=(N+1)/2$.

3. Структуры в двумерных средах с диффузией. Исследованию динамических процессов из различных областей естествознания, моделируемых при помощи двумерных решеток осцилляторов, посвящено немало работ [17-20 и др.]. Наш интерес будет состоять в исследовании и систематизации различных типов кластерных структур в данных решетках, проводимых в контексте синхронизации КО и их простых клеток.

Уравнения двумерной решетки осцилляторов с неймановскими граничными условиями имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\dot{X}_{ij} &= F_{ij}(X_{ij}) + \varepsilon C(X_{i-1j} + X_{i+1j} + X_{ij-1} + X_{ij+1} - 4X_{ij}) \\ i &= \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}, \\ X_{0j} &= X_{1j}, X_{N_1+1j} = X_{N_1j}, X_{i0} = X_{i1}, X_{iN_2+1} = X_{iN_2}\end{aligned}\quad (5)$$

1⁰. Одномерные КО двумерных решеток.

Заметим, что цепочка является частным случаем двумерной решетки; ее уравнения получаются из (5) при наложении граничных условий вида $X_{0j} \equiv X_{1j} \equiv X_j$, $X_{i0} \equiv X_{i1} \equiv X_i$, $X_{2j} \equiv X_{1j} \equiv X_j$, $X_{1n+1} \equiv X_{1n} \equiv X_n$. По этой причине КО цепочки $O_s(n)$ и $O_a(n)$ являются базовыми и для двумерной решетки. Соответствующие структуры в конвективных течениях реализуются в виде роликов, вытянутых вдоль одной из сторон кюветы. В пределах каждого ролика движение жидкости синхронизировано, в то время как движения жидкости для роликов из разных кластеров различное. Отражая двухмерность случая, переобозначим $O_s(n)$ как $O_s(1 \times n)$. Далее под записью “ $m \times n$ ” будем понимать как размеры соответствующей решетки, так и произведение mn . Очевидно, что $O_s(1 \times n)$ и $O_s(n \times 1)$ физически тождественны и должны быть отнесены к одному типу: с точностью до обозначений они представляются одинаковыми уравнениями и имеют одинаковые «рабочие» аттракторы. Однако, структуры на базе того или другого, синтезированные в одной и той же решетке будут визуально разными. Следует принимать во внимание этот факт. Пример изображен на рис.16а,б. Здесь и далее связи между изображениями элементарных осцилляторов изображаются примыканием сторон квадратов.

Сформулируем утверждение о числе структур указанного типа в решетке $N_1 \times N_2$.

Утверждение 1. Если p и q - число всех сомножителей чисел N_1 и N_2 , включая в число сомножителей сами числа, то полное число структур на базе КО $O_s(1 \times n)$ и $O_s(n \times 1)$ в решетке $N_1 \times N_2$ равно $p + q$.

Рис.16. Структуры на базе $O_s(1 \times n)$ и $O_s(n \times 1)$

2⁰. Второй тип КО цепочек - $O_a(n)$ также является структурообразующим КО двумерных решеток. Обозначим его $O_a(1 \times n)$. Последний определяется системой осцилляторов (5) при $i=1, j=\overline{1, n}$ и с граничными условиями $X_{0j} \equiv X_{1j} \equiv X_j$, $X_{10} \equiv X_{11} \equiv X_1$, $X_{2j} \equiv X_{1j} \equiv X_j$, $X_{1n+1} \equiv X_{1n-1} \equiv X_{n-1}$. Предполагается, что система содержит в фазовом пространстве кластерный аттрактор $A_a(n)$. Как и выше, КО $O_a(n \times 1)$ отождествляется с $O_a(1 \times n)$, при сделанных оговорках относительно синтеза схем на их базе. Примеры синтеза схем на базе этого КО изображены на рис.17,а,б.

Утверждение 2. Пусть p и q - число всех нечетных сомножителей чисел N_1 и N_2 , включая в число сомножителей сами числа, если они нечетные. В таком случае полное число структур на базе КО $O_a(1 \times n)$ и $O_a(n \times 1)$ равно $p + q$.

Рис.17. Схемы структур на базе схем простых клеток КО $O_a(1 \times n)$ и $O_a(n \times 1)$

Двумерные КО.

Поскольку мы имеем дело с решеткой «прямоугольной» формы (для простоты будем считать ее прямоугольной координатной сеткой с осцилляторами, расположенными в узлах), то естественно предполагать, что и простые клетки имеют тот же вид. Это предположение оказывается верным: если схема не разрезаема, то вся она является схемой прямоугольной ПК; если она разрезаема, то простыми средствами можно доказать, что линия разреза не может быть ломанной. Далее при исследовании КО и ПК будем использовать различные виды симметрии прямоугольников (квадратов).

3⁰. Допустим, что в рассматриваемой решетке реализована некоторая КС и ее схема разрезана на идентичные схемные блоки простых клеток. Будем оценивать различные варианты того, как может быть «устроена» кластерная структура самой ПК. В этой связи, не пропустим первый из возможных случаев – случай максимального числа кластеров или, по-другому, - случай, когда все осцилляторы ПК несинхронизованы. При этом ПК является

особой и она же является особым КО – двумерным аналогом $O_s(n)$ в цепочке. Обозначим его $O_{ss}(m \times n)$ и определим как систему осцилляторов (5) с граничными условиями $X_{0j} \equiv X_{1j}$, $X_{i0} \equiv X_{i1}$, $X_{m+1j} \equiv X_{mj}$, $X_{in+1} \equiv X_{in}$, (прямоугольная $m \times n$ решетка), при условии существования кластерного аттрактора $A_{ss}(mn)$ в своем фазовом пространстве.

Утверждение 3. Если p и q - число всех сомножителей чисел N_1 и N_2 , включая в число сомножителей сами числа, то в решетке $N_1 \times N_2$ существует $pq-1$ кластерных структур на базе КО $O_{ss}(m \times n)$, $m \geq 2, n \geq 2$.

Заметим, что $O_s(n)$ можно рассматривать как частный случай $O_{ss}(m \times n)$, когда одно из чисел равняется единице.

Пример синтеза схемы КС на базе КО $O_{ss}(2 \times 3)$ в прямоугольной решетке (4×6) изображен на рис.18,а, а на рис.18,б – пример «свободного» синтеза схемы структуры в «неправильной» решетке на базе того же КО (это в качестве побочного продукта).

Рис.18. Синтез различных схем кластерных структур на базе $O_{ss}(2 \times 3)$

4⁰. Допустим, что прямоугольная (квадратная) простая клетка является неособой, то есть среди ее элементов имеются синхронизованные осцилляторы. Следовательно, ее схема тем или иным путем должна свертываться к схеме КО. Будем учитывать опыт свертывания простых клеток цепочки и кольца по использованию различных типов симметрии. Начинаем со случая одной итерации свертывания.

Допустим, что схема является зеркальной относительно одной из плоскостей симметрии. В таком случае соответствующая сторона прямоугольника содержит нечетное число элементов, а след зеркала проходит через середины изображений осцилляторов. В противном случае (число осцилляторов на стороне четно) след зеркала являлся бы линией разреза, а это противоречило бы свойству ПК. Перегибая схему через след зеркала получаем изображение КО, рис.19. Допустим, что нечетное число осцилляторов расположено в столбце, рис.19.а. В этом случае КО, который обозначим $O_{as}(m \times n)$, определяется системой

(5) при $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, с граничными условиями $X_{0j} \equiv X_{1j}$, $X_{i0} \equiv X_{i1}$, $X_{m-1j} \equiv X_{m+1j}$, $X_{in} \equiv X_{in+1}$, имеющей в фазовом пространстве кластерный аттрактор $A_{as}(mn)$.

Простая клетка этого КО состоит из пары жестко связанных КО. Ее размер (количество элементарных осцилляторов) $(2m-1) \times n$.

Синтез схемы КС простой клетки происходит в обратном порядке - присоединением к изображению КО его зеркального образа.

Рис.19. Свертывание схем простых клеток на базе КО $O_{as}(m \times n)$ и $O_{sa}(m \times n)$

Если КС простой клетки является симметричной относительно другой плоскости, рис.19,b, то мы приходим к определению КО $O_{sa}(m \times n)$. Это будет система (5) при $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ и с граничными условиями $X_{0j} \equiv X_{1j}, X_{i0} \equiv X_{i1}, X_{in-1} \equiv X_{in+1}, X_{mj} \equiv X_{m+1j}$. При этом размер ПК $m \times (2n - 1)$. Пример КО $O_{sa}(2 \times 3)$ и синтеза ПК приведен на рис.19,b. Тот и другой КО относим к одному типу. Заметим, что КО $O_a(1 \times n)$ и $O_a(m \times 1)$ являются частным случаем этих двумерных КО.

Исходя из размеров простых клеток и размеров решетки $N_1 \times N_2$, получаем следующее утверждение о количестве структур на базе $O_{as}(m \times n)$ и $O_{sa}(m \times n)$.

Утверждение 4. Пусть p и q - число всех нечетных сомножителей чисел N_1 и N_2 , включая в число сомножителей сами числа, если они нечетные. Пусть n_1 и n_2 - число всех сомножителей чисел N_1 и N_2 , включая в число сомножителей сами числа. Тогда в данной решетке существует pn_2 и qn_1 КС на базе $O_{as}(m \times n)$ и $O_{sa}(m \times n)$, соответственно. Общее число структур данного типа $pn_2 + qn_1$.

Например, в решетке 3×6 $p=1, q=1, n_1=1, n_2=3$. То есть, существует четыре кластерные структуры данного типа. Все их схемы с изображением синтеза представлены на рис.20.

Рис.20. Различные структуры на базе $O_{as}(m \times n)$ и $O_{sa}(m \times n)$ в решетке 3×6

Заметим, если N_1 и N_2 - простые числа, то в решетке $N_1 \times N_2$ существует только две кластерные структуры рассмотренного типа. Одна из них имеет число кластеров $N_1(N_2 + 1)/2$, а вторая - $N_2(N_1 + 1)/2$.

5⁰. Допустим, что полученная в результате одной итерации свертывания схема КС простой клетки (в результате перегиба схемы через одну из осей) содержит синхронизованные осцилляторы. В таком случае картина симметрична относительно второй плоскости симметрии, след которой также проходит через середины изображений осцилляторов. В противном случае КС была бы разрезаемой, а это противоречит условию. Выполняя второй перегиб схемы через след второго зеркала, получаем схему искомого КО. Описанная процедура свертывания схемы зеркальной относительно двух плоскостей изображена на рис.21. Здесь “четвертинка” изображения элементарного осциллятора имеет тот же смысл, что и “половинка” (находит свое отражение в матрице КО)

Рис.21. Порядок свертывания схемы КС с двойной осевой симметрией

Обозначим полученный КО $O_{aa}(m \times n)$ и определим его как систему (5) при $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ (прямоугольная решетка из mn осцилляторов) с граничными условиями вида: $X_{0j} \equiv X_{1j}$, $X_{i0} \equiv X_{i1}$, $X_{m-lj} \equiv X_{m+lj}$, $X_{in-l} \equiv X_{in+l}$, при условии существования кластерного аттрактора $A_{aa}(mn)$. ПК этого типа состоит из четырех связанных КО и имеет размеры $(2m-1) \times (2n-1)$.

Из сказанного сформулируем утверждение о числе структур на базе $O_{aa}(m \times n)$ в решетке $N_1 \times N_2$.

Утверждение 5. Пусть $\{p\}$, $\{q\}$ - все нечетные сомножители чисел N_1 и N_2 , включая эти числа, если они нечетные. Тогда число кластерных структур на базе $O_{aa}(m \times n)$ в решетке $N_1 \times N_2$ равно числу всевозможных различных пар (p_i, q_j) . Число кластеров в каждой структуре $mn = (p_i + 1)(q_j + 1)/4$.

6⁰. Обратимся к схемам простых клеток с центральной симметрией.

Допустим, что в клетке $m \times n$ реализована КС с центральной симметрией и хотя бы один из ее размеров четное число. Процедура свертывания схемы КС в этом случае будет выглядеть следующим образом. Мысленно проведем прямую (перпендикулярно четной стороне) делящую схему на две части, содержащие идентичные совокупности несинхронизованных осцилляторов, рис.22,а. При этом схемы обеих частей могут быть совмещены в результате поворота одной из них на 180° относительно центра, рис.22,б. Считаем, что связи осцилляторов, примыкающих по названной линии, при этом сохраняются. Осуществляя эту процедуру, получаем схему изображенную на рис. 22,с. Совокупность осцилляторов этой

решетки представляет КО, который обозначим $O_{2a}^{\pi r}(mn/2)$ и будем называть его “ π -прямоугольник”. Здесь $mn/2$ - число кластеров в КС простой клетки.

Рис.22. Свертывание схемы КС с центральной симметрией на базе $O_{2a}^{\pi r}(mn/2)$

Замечание. Как видим, изображения $O_{2a}^{\pi r}$ и особого КО O_{ss} похожи, а при одинаковом числе осцилляторов совпадают (сравни рис.18,а и рис.22,с). Однако, это совершенно разные по своей динамике КО: они имеют разные «кластерные» матрицы, определяемые разными граничными условиями. Уравнения КО $O_{2a}^{\pi r}$ получаются из общих уравнений (4.5.1) с граничными условиями, отражающими центральную симметрию приграничных осцилляторов. В приведенном выше примере, рис.22, уравнения КО получаются из уравнений (5) в которых: $i = 1, 2, 3; j = 1, 2; X_{12} = X_{33}, X_{22} = X_{23}, X_{31} = X_{13}$.

Утверждение 6. Пусть p и q - число всех четных сомножителей чисел N_1 и N_2 , включая в число сомножителей сами числа, если они нечетные. Пусть n_1 и n_2 - число всех сомножителей чисел N_1 и N_2 , включая в число сомножителей сами числа. Тогда в данной решетке существует $pn_2 + qn_1$ КС на базе $O_{2a}^{\pi r}(mn/2)$.

Заметим, что данного типа двумерные структуры наблюдаются на тонкой пленке электролита, возбуждаемого магнитодинамическим методом [7], а также при термоконвекции жидкости в вертикальной ячейке Хеле - Шоу [4,21].

7^0 . Допустим, что ПК с центрально-симметричной КС имеет размеры $m \times n$, где оба числа нечетны. В этом случае центр решетки находится на изображении центрального элементарного осциллятора. Процедура свертывания схемы КС к схеме КО будет следующей. Мысленно проведем трехзвенную ломаную, пересекающую центральный осциллятор и делящую схему на два идентичных блока составленные их «разноцветных» осцилляторов, рис.23,а. Образовавшаяся пара схем совмещается в результате поворота одной из них на 180° относительно центра решетки, рис. 23,б. Предполагаем, что связи между всеми осцилляторами сохраняются. Производя поворот, получаем изображение КО, рис.23,с. Обозначим этот КО $O_{2a}^{\pi f}((mn+1)/2)$ и будем называть “ π -флаг”. Здесь $(mn+1)/2$ - число кластеров, продуцируемых этим КО. Синтез схемы клетки происходит в обратном порядке. Исходя из размеров ПК, сформулируем следующее утверждение о числе КС в решетке $N_1 \times N_2$, схемы которых могут быть синтезированы на базе $O_{2a}^{\pi f}((mn+1)/2)$.

Утверждение 7. Пусть $\{p\}, \{q\}$ - все нечетные сомножители чисел N_1 и N_2 , включая эти числа, если они нечетные. Тогда число кластерных структур на базе $O_{aa}(m \times n)$ в решетке $N_1 \times N_2$ равно числу всевозможных различных пар (p_i, q_j) .

Рис.23. Свертывание схемы КС с центральной симметрией на базе $O_{2a}^{\pi f}((mn+1)/2)$

Список КО двумерных решеток будет не полон, если к нему не добавить типы КО, определяющие КС в квадратных ПК и связанные с их дополнительной диагональной симметрией.

8⁰. Начинаем со случая максимального числа кластеров КС в квадратной ПК. Допустим, что число несинхронизованных («разноцветных») осцилляторов на стороне квадрата равно n и КС симметрична относительно одной из его диагоналей. Перегибая схему структуры через диагональ (след зеркала), рис.24а, получаем схему КО, рис.24б. Обозначаем данный КО $O_{2a}^f(n(n+1)/2)$ и будем называть его “флаг 2”. Здесь $n(n+1)/2$ - число кластеров, продуцируемых КО.

Рис.24. Свертывание схемы ПК на базе $O_{2a}^f(n(n+1)/2)$

Исходя из простой задачи о количестве способов покрытия решетки $N_1 \times N_2$ всевозможными квадратами, сформулируем утверждение о количестве КС, базой которых может быть $O_{2a}^f(n(n+1)/2)$ при различных n .

Утверждение 8. Пусть $\{p\}$, $\{q\}$ - все сомножители чисел N_1 и N_2 , включая эти числа. Тогда число кластерных структур на базе $O_{2a}^f(n(n+1)/2)$ в решетке $N_1 \times N_2$ равно числу всевозможных пар $(p_i, q_j = p_i)$ одинаковых сомножителей.

9⁰. Для продолжения исследования типов КО следует разделить случаи четного и нечетного числа осцилляторов на стороне квадрата.

Допустим, что число осцилляторов на стороне квадрата четно, $n = 2k$. Допустим также, что после первой итерации (первого перегиба через диагональ) в полученной фигуре остаются синхронизованные осцилляторы симметричные относительно второй диагонали, рис.25а,б. Перегибая последнюю картину через вторую диагональ, получаем фигуру, заполненную не синхронизованными осцилляторами – схему КО. Обозначим этот КО $O_{4a}^f((n^2 + 2n)/4)$ и

будем называть его “флаг 4”. В данном случае ПК состоит из четырех связанных КО. Смысл половинок изображений осцилляторов известен.

Рис.25. Порядок свертывания схемы ПК на базе $O_{4a}^f \left((n^2 + 2n)/4 \right)$

Сформулируем утверждение о числе структур данного типа в решетке заданных размеров.

Утверждение 9. Пусть $\{p\}$, $\{q\}$ - все четные множители чисел N_1 и N_2 , включая эти числа, если они четные. Тогда число кластерных структур на базе $O_{4a}^f \left((n^2 + 2n)/4 \right)$ в решетке $N_1 \times N_2$ равно числу всевозможных пар $(p_i, q_j = p_i)$ одинаковых сомножителей.

10^0 Допустим, что число осцилляторов квадрата нечетно, $n = 2k + 1$. Допустим также, что после первой итерации (перегиба через диагональ) в полученной фигуре остаются синхронизованные осцилляторы симметричные относительно второй диагонали, рис.26,b. Выполняя вторую итерацию, получаем фигуру, заполненную не синхронизованными осцилляторами – схему КО, рис.26,с. Обозначим этот КО $O_{4a}^p \left((n+1)^2 / 4 \right)$ и будем называть его “пирамида 4”. ПК состоит из четырех связанных КО.

Утверждение 10. Пусть $\{p\}$, $\{q\}$ - все нечетные множители чисел N_1 и N_2 , включая эти числа, если они нечетные. Тогда число кластерных структур на базе $O_{4a}^p \left((n+1)^2 / 4 \right)$ в решетке $N_1 \times N_2$ равно числу всевозможных пар $(p_i, q_j = p_i)$ одинаковых сомножителей.

Рис.26. Порядок свертывания схемы ПК на базе $O_{4a}^p \left((n+1)^2 / 4 \right)$

11^0 . Допустим, что после двух итераций, произведенных в п. 10^0 , в полученной схеме, рис.27с, остаются синхронизованные осцилляторы, которые симметричны относительно ее плоскости симметрии. В таком случае свертывание схемы клетки может быть продолжено перегибом через соответствующую ось. Последовательность итераций приведена на рис.27. Обозначим полученный КО как $O_{8a}^f \left((n+1)(n+3)/8 \right)$ и будем называть его “флаг 8”. Синтез схемы КС простой клетки происходит в обратном порядке. ПК состоит из восьми жестко связанных КО. Смысл 1/8 от изображения осциллятора тот же самый, что и 1/2.

Рис.27. Порядок свертывания схемы ПК на базе $O_{8a}^f((n+1)(n+3)/8)$

Число структур на базе $O_{8a}^f((n+1)(n+3)/8)$ определяется утверждением 10.

Замечание. Подобные структуры в квадрате с четным числом осцилляторов отсутствуют: при проведении обратных итераций соответствующего треугольника, рис.28 в порядке d,c,b,a получаем разрезаемую структуру. Это противоречит тому, что квадратная решетка является простой клеткой.

Рис.28. К Замечанию

По-видимому, $(n+1)(n+3)/8$ - минимальное число кластеров в структуре, которое возможно в квадратной решетке осцилляторов с нечетным числом элементарных осцилляторов. Соответственно, $(n^2 + 2n)/4$ - с четным числом осцилляторов.

Выше рассмотрены все типы симметрий структурных схем, а также случай особого КО. Тем самым, имеются все основания полагать, что для двумерной решетки представленный набор типов КО является полным. Доказательство этого факта опускаем.

4. Заключение. Предложенная методика определения типов структур в решетках осцилляторов проста и может быть, при необходимости, распространена как на трехмерные решетки, так и на решетки самых различных геометрических форм: диск, кольцо и т.д. Обратим внимание и на ту особенность, что принципы синтеза схем кластерных структур не связаны с условием однородности элементарных осцилляторов, входящих в состав структурообразующих субъектов – КО и ПК. Соответствующие осцилляторы могут быть различны как по своим параметрам, так и по своей природе. Это дает возможность синтезировать схемы и, может быть, изготавливать материальные решетки различной геометрической формы – технические устройства и материалы с наперед заданными и, возможно, управляемыми динамическими свойствами. И последнее, проведенные исследования дают полную и обозримую качественную картину возможных динамических структур в соответствующих сплошных средах, что, в свою очередь, является основой для эффективных вычислений параметров структур и их свойств, в частности, устойчивости [22].

Список литературы

- [1] Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. - М.: Мир, 1986,
- [2] Гершуни Г.З, Жуковичский Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. - М.: Наука, 1972.
- [3] Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея – Бенара. Структура и динамика. - М.: Эдиториал УРСС, 1999.
- [4] Любимов Д.В., Путин Г.Ф., Чернатынский В.И. // ДАН СССР. – 1997. - 234, 534.
- [5] Рабинович М.И., Сущик М.М. Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости. // УФН. – 1990. - Т.160, №1. - С. 3-64.
- [6] Lorenz E. J. // Atmos. Sci. – 1963. - 30, 448.
- [7] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. - М: Наука, 1984.
- [8] Белых В.Н., Веричев Н.Н. Пространственно-однородные автоволновые процессы в системах с переносом и диффузией. // Изв.Вузов. Радиофизика. - 1996. - Т.39, N5. - С. 588 – 596.
- [9] В. Васильев, Ю. Романовский, В. Яхно. Автоволновые процессы. - М: Наука, 1987.
- [10] Кузнецов С.П. Динамический хаос. - М.: Физматлит, 2001.
- [11] Магнус К. Колебания. - М.: Мир, 1982.
- [12] Веричев Н.Н., Веричев С.Н., Ерофеев В.И. Кластерная динамика однородной цепочки диссипативно связанных ротаторов // ПММ. – 2008. - Т.72, №6. - С. 882-897.
- [13] Georgiou I.T, Bajaj AK, Corless M. Invariant manifolds and chaotic vibrations in singularly perturbed nonlinear oscillators. // Int. J.Eng Sci. -1998. - **36**:431–58.
- [14] Belykh VN, Belykh IV, Hasler M. Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems. // Phys Rev E. 2. – 2000. - 6332–45.
- [15] Belykh VN, Belykh IV, Mosekilde E. Cluster synchronization modes in an ensemble of coupled chaotic oscillators. // Phys Rev E. – 2001. - 63:036216.
- [16] Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T. The Double Scroll Family. // IEEE Transaction on Circuits & Systems. - V. CAS-33. – 1986. - no.11. - P.1073-1118.
- [17] Afraimovich V.S , Chow S.-N , Hale J.K, Synchronization in lattices of coupled oscillators, //Physica D. – 1997. - v.103, n.1-4. - P.442-451.
- [18] Chiu, C.-H., Lin, W.-W. and Wang, C.-S., Synchronization in a lattice of coupled Van Der Pol systems.// Int. J. Bif. Chaos. - v8 i12. - 2353-2373.
- [19] Liang Zhao, Fabricio Aparecido Breve Chaotic synchronization in 2D lattice for scene segmentation // Neurocomputing. – 2008. - Volume 71, Issue 13-15. - P. 2761-2771.
- [20] Hirokazu Fukuda, Hikaru Nagano and Shoichi Kai Stochastic Synchronization in Two-Dimensional Coupled Lattice Oscillators in the Belousov–Zhabotinsky Reaction // J. Phys. Soc. Jpn. - 2003, 72. - P. 487-490.
- [21] Рабинович М.И. Стохастические автоколебания и турбулентность. - УФН, 1978 . - т.125, вып.1. - С.123-168.
- [22] Н.Н. Веричев. Устойчивость структур в неравновесных системах //Вычислительная механика сплошных сред. - 2013. - т.6, №1. - С. 23-33, 2013.

Дата поступления: 26 марта 2019 г.

УДК 531.01

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПРИ ГИПЕРЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ ОБТЕКАНИЯ ОБЪЕКТОВ

© Сергей Иванович Герасимов^{1,2}, Василий Андреевич Кикеев¹,
Дмитрий Юрьевич Смирнов²

¹Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия

²Саровский физико-технический институт, филиал НИЯУ «МИФИ», Саров, Россия

s.i.gerasimov@mail.ru

Аннотация. Обсуждается методика численного моделирования динамических процессов, происходящих при гиперзвуковом обтекании объектов. Расчетные данные сравниваются с данными, полученными при аэробаллистических испытаниях.

Ключевые слова: аэробаллистические испытания, гиперзвуковое обтекание, численное моделирование, визуализация аэродинамических процессов.

Работа выполнена в рамках государственного задания на проведение фундаментальных научных исследований на 2013-2020 г.г. по теме № 0035-2014-0402, № госрегистрации 01201458047 и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 17-08-01096, № 18-29-10073).

CALCULATED AND EXPERIMENTAL STUDIES OF PROCESSES AT HYPERSONIC VELOCITIES AROUND OBJECTS

© S.I. Gerasimov^{1,2}, V.V. Kikeev¹, D.Yu. Smirnov²

¹Mechanical Engineering Research Institute of the RAS, Nizhny Novgorod, Russia

²Sarov Physical Technical Institute, Sarov, Russia

s.i.gerasimov@mail.ru

Abstract. Discusses the technique of numerical simulation of dynamic processes occurring during hypersonic flow around objects. The calculated data are compared with the data obtained during aeroballistic tests.

Keywords: aeroballistic tests, hypersonic flow, numerical simulation, visualization of aerodynamic processes.

Acknowledgements. The work was carried out within the Russian state task for conducting fundamental scientific research for 2013-2020 on the topic No. 0035-2014-0402, state registration number 01201458047 and the work was supported by the Russian Foundation Investigation Fond, projects no.17-08-01096, no.18-29-10073.

Юстировка аэробаллистической трассы проводилась с помощью шаров из различных материалов при разных начальных скоростях полёта. Трасса имеет измерительный участок длиной 120 м и позволяет реализовывать скорости полета от 130 м/с до 6500 м/с ($M = 0,4–20$), числа Рейнольдса $Re = 6 \cdot 10^5–1,2 \cdot 10^7$.

Шары из высокопрочного сплава с добавлением вольфрама и рения (диаметр 10,4 мм, масса 11,5 г) металлись с начальными скоростями 3,86 км/с (опыт №1); 4,70 км/с (опыт № 2); 5,07 км/с (опыт №3); 5,27 км/с (опыт №4).

Зависимость коэффициента силы лобового сопротивления $C_x(M)$ от числа Маха для шаров представлена на рис.1. Зависимость коэффициента силы лобового сопротивления $C_x(M)$ для сферы при отсутствии уноса материала ОИ соответствуют "классическим" представлениям и практически постоянна в пределах погрешности эксперимента во всем реализованном скоростном диапазоне. В опыте № 4 зависимость $C_x(M)$ имеет больший градиент, что является косвенным доказательством наличия аэротермомеханического разрушения конструкционных материалов ОИ, сопровождающегося существенными изменениями геометрии и массы ($\sim 10–15\%$).

Рис. 1. Зависимость коэффициента силы лобового сопротивления от числа Маха для шаров из высокопрочного сплава с добавлением вольфрама и рения.

Для отработки методик расчета с помощью современных инженерных методов компьютерного моделирования процесса сверхзвукового обтекания произведен расчет моделей при различных скоростях обтекания.

В качестве объекта моделирования выбран шар 10,4 мм. В качестве метода моделирования выбран метод численного решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, дополненный $k-\varepsilon$ – моделью турбулентности. Этот метод реализован в современном инженерном программном пакете COSMOSFloWorks.

На рис.2 приведена дважды адаптированная после 1380 и 2070 итераций сетка для условий обтекания с начальной скоростью $M = 7$. Исходная сетка состояла из 234963 ячеек, а адаптированная сетка из 381676, 801067.

Диапазон рассмотренных начальных скоростей обтекания составлял 6–10 M . В процессе расчета определялись полные в объеме домена поля для всех параметров обтекающего газа, определялось значение коэффициента лобового сопротивления шара.

Полученные результаты показаны на рис. 1 и рис. 3, характер обтекания шара при начальной скорости $M = 7$ показан на рис. 4. Из рисунков можно заметить, что характер обтекания и вычисленные значения коэффициента сопротивления в зависимости от чисел Маха в целом соответствуют экспериментальным данным, приведенным в различных источниках ранее [1–4].

Рис. 2. Адаптированная расчетная сетка при $M = 7$.

Рис. 3. Зависимость коэффициента силы лобового сопротивления от числа итераций при различных числах Маха для шара диаметром 10,4 мм.

Рис.4. Распределение полей давлений (а), температур (б), плотностей (в) и скоростей (г) шара при обтекании с начальной скоростью $M = 7$.

Расчеты с начальными скоростями более $M = 10$ показали, что инженерный программный пакет COSMOSFloWorks не предназначен для столь высоких скоростей обтекания. При данных скоростях происходит нарушение алгоритма автоматической адаптации расчетной сетки, что приводит к некорректным значениям коэффициента лобового сопротивления и характера обтекания шара в целом. На рис.1 отлично видно огромное отличие от экспериментальных результатов. Учитывая этот факт, можно сделать предположение, что данный программный пакет ориентирован на расчет сверх- и гиперзвукового обтекания до $M \approx 10$.

Список литературы

1. Герасимов С.И., Файков Ю.И. Теневое фотографирование в расходящемся пучке света. – Саров: Изд-во РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2010. - 342 с.
2. Герасимов С.И., Файков Ю.И., Холин С.А. Кумулятивные источники света. – Саров: Изд-во РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2011. - 327 с.
3. Бейли А.Б., Хайт Дж. Коэффициент сопротивления сферы в широком диапазоне чисел Маха и Рейнольдса // Ракетная техника и космонавтика. - 1972. - Т. 10, № 11. - С. 56-62.
4. Van Dyke M. An Album of Fluid Motion. - Stanford, California, The Parabolic Press, 1982. - 176 p.

Дата поступления: 13 апреля 2019 г.

УДК 534.1

НЕЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В ТОНКОСТЕННОМ СТЕРЖНЕ, ИСПЫТЫВАЮЩЕМ ВЛИЯНИЕ ДЕПЛАНАЦИИ ЕГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

© Владимир Иванович Ерофеев¹, Татьяна Сергеевна Есаулова¹,
Владимир Владимирович Кажаяев¹, Борис Борисович Лампси (мл.)²

¹Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» (ИПМ РАН), Нижний Новгород, Россия

²Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет
erof.vi@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается математическая модель, позволяющая описать распространение крутильной волны в тонкостенном стержне. Модель включает в себя геометрическую и физическую упругие нелинейности, а так же депланацию, т.е. выход поперечного сечения, в процессе деформации стержня, из первоначального плоского состояния. На основе анализа модели определено, что депланация, приводящая к появлению дисперсии фазовой скорости крутильной волны, приводит еще и к появлению квадратичной нелинейности, характерной для интенсивных продольных колебаний и не встречавшейся прежде в математических моделях, описывающих крутильные колебания. Показано, что в стержне с квадратичной нелинейностью может сформироваться стационарная крутильная волна. Такая волна является периодической и движется быстрее, чем любые линейные возмущения. Волна имеет пилообразную форму, длина волны увеличивается с ростом ее амплитуды. Кроме того, показано, что совместное действие кубической нелинейности (вызванной высокой интенсивностью вибрации) и дисперсии (обусловленной депланацией) в стержне может привести к формированию несинусоидальных стационарных волн, распространяющихся с постоянной скоростью без изменения формы.

Ключевые слова: тонкостенный стержень, депланация, нелинейность, кручение, стационарная волна.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН на проведение фундаментальных научных исследований на 2013-2020 г.г. по теме № 0035-2014-0402, № госрегистрации 01201458047 и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10073).

NONLINEAR STATIONARY WAVES IN A THIN-WALLED ROD, TESTING THE IMPACT OF DEPLANING IT TRANSVERSE SECTION WHEN TURNING

© V.I. Erofeev¹, T.S. Esaulova¹, V.V. Kazhaev¹, B.B. Lampsi (Jr.)²

¹Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia

²Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russia
erof.vi@yandex.ru

Abstract. A mathematical model is considered that allows one to describe the propagation of a torsional wave in a thin-walled rod. The model includes geometrical and physical elastic nonlinearity, as well as deplanation, i.e. the output of the cross section, in the process of deformation of the rod, from the initial flat state. Based on the analysis of the model, it is determined that the deplanation leading to the appearance of the dispersion of the phase velocity of the torsional wave also leads to the appearance of quadratic nonlinearity characteristic of intense longitudinal oscillations and not previously encountered in mathematical models describing the torsional vibrations. It is shown that a stationary torsional wave can form in a rod with a quadratic nonlinearity. Such a wave is periodic and moves faster than any linear perturbation. The wave has a sawtooth shape, the wavelength increases with increasing its amplitude. In addition, it is shown that the combined action of cubic nonlinearity (caused by high vibration intensity) and dispersion (due to deplanation) in the rod can lead to the formation of non-sinusoidal stationary waves propagating at a constant speed without changing the shape.

Keywords: thin-walled core, deplanation, nonlinearity, torsion, stationary wave.

Acknowledgements. The work was carried out within the Russian state task for conducting fundamental scientific research for 2013-2020 on the topic No. 0035-2014-0402, state registration number 01201458047 and the work was supported by RFBR (project 18-29-10073).

1. Дифференциальное уравнение крутильных колебаний стержня с учетом нелинейности и депланации поперечного сечения стержня. Известно, что для стержней кругового и кольцевого поперечных сечений эффект депланации (т.е. выход поперечного сечения из первоначального плоского состояния) остается малым даже при значительных углах закручивания и в расчетах им обычно пренебрегают [1, 2]. Для тонкостенных стержней иных поперечных сечений депланация может быть значительной даже при малых углах закручивания. Если депланация неоднородна вдоль стержня, то кручение принято называть стесненным. По теориям Тимошенко и Власова депланация пропорциональна относительному углу закручивания, что приводит к дисперсии, т.е. зависимости фазовой скорости крутильной волны от ее частоты.

В. И. Сливкером [3] предложена уточненная теория, в которой связь между углом закручивания $\theta(x, t)$ и мерой депланации $\beta(x, t)$ не постулируется как в теориях Тимошенко и Власова, а определяется в процессе решения задачи.

В работах В.И. Ерофеева и Б.Б. Лампси (мл.) [4, 5] модель Сливкера обобщена на случай учета геометрической и физической упругих нелинейностей.

Выражение для кинетической энергии деформации имеет вид:

$$W_k = \frac{1}{2} \left[\rho I_r \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \rho I_\omega \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (1)$$

где ρ – плотность материала стержня; I_r – полярный момент инерции; I_ω – секториальный момент инерции.

Для учета упругой нелинейности в выражении для плотности потенциальной энергии следует удерживать не только квадратичные слагаемые, но и слагаемые в четвертой степени:

$$W_p = \frac{1}{2} G I_x \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} E I_\omega \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} G I_g \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right)^2 + \alpha_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^4 + \alpha_2 \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^4 + \alpha_3 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right)^4 \quad (2)$$

где $G = \frac{E}{2(1+\gamma)}$ – модуль сдвига; E – модуль Юнга; I_x – крутящий момент инерции; γ – коэффициент Пуассона; $I_g = \frac{I_x}{(\psi-1)}$ –

депланационный момент инерции; ψ – геометрический параметр (см. [3]);

α_i – коэффициенты, характеризующие геометрическую и физическую нелинейности стержня. Если стержень является геометрически нелинейным, то $\alpha_i > 0$, если – физически нелинейным, то $\alpha_i < 0$.

Составляя лагранжиан $L = W_k - W_p$ и применяя вариационный принцип Гамильтона-Остроградского [6], получим систему уравнений динамики стержня:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \beta_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \beta_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

где введены обозначения:

$$\theta_t = \frac{\partial \theta}{\partial t}; \theta_x = \frac{\partial \theta}{\partial x}; \beta_t = \frac{\partial \beta}{\partial t}; \beta_x = \frac{\partial \beta}{\partial x}.$$

После проведения необходимых дифференцирований и преобразований (3) запишется в виде:

$$\begin{cases} \rho I_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - G(I_x + I_g) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + G I_g \frac{\partial \beta}{\partial x} + N_1 = 0 \\ \rho I_\omega \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} - E I_\omega \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - G I_g \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right) + N_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Здесь через $N_{1,2}$ обозначены нелинейные слагаемые:

$$\begin{aligned} N_1 = & -12(\alpha_1 + \alpha_3) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 24\alpha_3 \beta \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 12\alpha_3 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \beta}{\partial x} - \\ & - 24\alpha_3 \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} - 12\alpha_3 \beta^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 12\alpha_3 \beta^2 \frac{\partial \beta}{\partial x} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} N_2 = & -12\alpha_3 \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - 4\alpha_3 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^3 + 12\alpha_3 \beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 - 12\alpha_3 \frac{\partial \theta}{\partial x} \beta^2 + \\ & + 4\alpha_3 \beta^3 \end{aligned} \quad (6)$$

Система (4) – (6) достаточно сложна для анализа. Для ее упрощения будем предполагать, что депланация $\beta(x, t)$ является малой. Поскольку нелинейные эффекты проявляются на величинах более высокого порядка малости, чем линейные, это позволяет учитывать депланацию только в линейной части уравнений, а в нелинейных слагаемых приближенно считать, что $\beta \approx \frac{\partial \theta}{\partial x}$. Тогда нелинейные слагаемые будут иметь вид:

$$N_1 = -12\alpha_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (7)$$

$$N_1 = -12\alpha_3 \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (8)$$

При данных предположениях система уравнений (1.45) сводится к одному уравнению относительно $\theta(x, t)$. Для этого из первого уравнения системы выразим

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{(I_x + I_g)}{I_g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{I_r \rho}{GI_g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{12\alpha_1}{GI_g} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

и подставим его во второе уравнение, предварительно продифференцированное по переменной x .

Таким образом, нелинейное дифференциальное уравнение крутильных колебаний стержня с учетом деформации его поперечного сечения, будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{EI_\omega(I_x + I_g)}{\rho I_g I_r} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - \frac{I_\omega}{I_g I_r G} [(I_x + I_g)G + EI_r] \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} + \\ + \frac{I_\omega}{c_\tau^2 I_g} \frac{\partial^4 \theta}{\partial t^4} - \frac{12I_\omega \alpha_1}{GI_g I_r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right] + \frac{12I_\omega \alpha_1 EI_\omega}{\rho I_r GI_g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right] - \\ - \frac{12\alpha_1}{\rho I_r} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{12\alpha_3}{\rho I_r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что уравнение (9) содержит в себе, наряду с кубической нелинейностью, характерной для интенсивных крутильных колебаний стержней, еще и квадратичную нелинейность (последнее слагаемое), характерную для интенсивных продольных колебаний и не встречающуюся прежде в математических моделях, описывающих крутильные колебания.

2. Волновые процессы в тонкостенном стержне при учете квадратичной нелинейности.

Будем далее рассматривать волновые процессы, учитывая квадратичную нелинейность ($\alpha_3 \neq 0$) и пренебрегая кубической нелинейностью ($\alpha_1 = 0$).

Уравнение (9) в этом случае можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{I_\omega}{c_\tau^2 I_g} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(I_x + I_g)c_\tau^2}{I_g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \theta + \\ + \frac{6\alpha_3}{\rho I_r} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – скорость распространения продольных волн в стержне;

$c_\tau = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ – скорость распространения сдвиговых волн.

Линейные крутильные волны в стержне обладают дисперсией фазовой скорости [6]. Таким образом, на распространение крутильных волн, описываемых уравнением (10), будут влиять два фактора: дисперсия и нелинейность. Нелинейность приводит к зарождению в спектре волны новых гармоник, что способствует появлению в движущемся профиле волны резких перепадов. Дисперсия же наоборот, сглаживает перепады из-за различия в фазовых скоростях гармонических составляющих волны. Совместное действие этих факторов может привести к формированию стационарных волн, которые распространяются с постоянной скоростью без изменения формы.

Обзор основных результатов теоретических и экспериментальных исследований нелинейных стационарных волн в стержнях, пластинах и оболочках содержится в работе [7].

Решение уравнения (10) будем искать в виде: $\theta(x, t) = \theta(\xi)$, где $\xi = x - Vt$,

V – скорость стационарной волны (заранее не известна).

Для относительного угла закручивания поперечного сечения стержня

$$\Theta = \frac{d\theta}{d\xi}$$

уравнение в частных производных (10) сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + m_1\Theta + m_2\frac{d}{d\xi}(\Theta)^2 = 0 \quad (11)$$

$$\text{где } m_1 = \frac{V^2 - \frac{c_\tau^2 I_x}{I_r}}{\frac{I_\omega}{c_\tau^2 I_g} \left(V^2 - \frac{(I_x + I_g)c_\tau^2}{I_g} \right) (V^2 - c_0^2)},$$

$$m_2 = \frac{6\alpha_3 c_\tau^2 I_g}{\rho I_r I_\omega \left(V^2 - \frac{(I_x + I_g)c_\tau^2}{I_g} \right) (V^2 - c_0^2)}.$$

Анализ уравнения (11) на фазовой плоскости $(\Theta, \frac{d\Theta}{d\xi})$ показывает, что замкнутые фазовые траектории, а только им соответствуют финитные решения уравнения, возможны, если $m_1 > 0$. Следовательно, нелинейные крутильные стационарные волны могут существовать лишь при $m_1 > 0$. Это возможно если нелинейная волна является «быстрой», т.е. ее скорость превышает скорости всех линейных возмущений:

$$V > c_0 > c_\tau \sqrt{\frac{(I_x + I_g)}{I_g}} > c_s \quad (12)$$

или если нелинейная волна является «медленной» и ее скорость лежит в интервале:

$$c_s < V < c_\tau \sqrt{\frac{(I_x + I_g)}{I_g}} \quad (13)$$

В начале координат на фазовой плоскости имеется особая точка типа «центр». Прямая $\frac{d\Theta}{d\xi} = \varepsilon^*$ определяет устойчивые движения (замкнутые фазовые траектории):

$$\varepsilon^* = \frac{m_1}{2m_2} = \frac{\rho I_r c_s^2}{12\alpha_3} \left(\frac{V^2}{c_s^2} - 1 \right) \quad (14)$$

Этот параметр растет с увеличением относительного значения скорости нелинейной стационарной волны, т.е. $|\varepsilon^*| \sim \left(\frac{V}{c_s}\right)^2$, и уменьшается с увеличением α_3 : $|\varepsilon^*| \sim 1/|\alpha_3|$. Знак m_2 определяется знаком α_3 .

На рис. 1 показан фазовый портрет уравнения (11) при $\alpha_3 < 0$ (а) и профиль стационарной волны, при амплитудах, близких к ε^* (б).

a)

б)

Рис.1.

a)

б)

Рис.2.

Аналитические построения, выполненные для случая $\alpha_3 > 0$, показаны на рис.2. (а,б).

Фазовый портрет позволяет оценить зависимость волнового числа нелинейной волны (k) от ее амплитуды (a):

$$\frac{k}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a/a_0}{\pi \varepsilon^*}\right)^2}} \quad (15)$$

где k_0, a_0 – волновое число и амплитуда гармонической (линейной) волны.

С ростом амплитуды волны относительное значение волнового числа уменьшается (длина волны растет) (рис.3).

Рис. 3.

Профили нелинейной волны при фиксированной амплитуде ($a/a_0 = \text{const}$) и различных значениях ε^* приведены на рис. 4.

3. Волновые процессы в тонкостенном стержне при учете кубической нелинейности.

Будем далее рассматривать волновые процессы, учитывая кубическую нелинейность ($\alpha_3=0$) и пренебрегая квадратичной нелинейностью ($\alpha_1 \neq 0$).

Уравнение (9) в этом случае можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{I_\omega}{c_\tau^2 I_g} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{I_x + I_g}{I_g} c_\tau^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \theta - \\ - \frac{4\alpha_1}{\rho I_r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^3 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь θ – угол поворота поперечного сечения, ρ – плотность материала, I_ω – секториальный момент инерции, I_r – полярный момент инерции, I_x – крутящий момент инерции, $I_g = I_x/(\Psi - 1)$, Ψ – геометрический параметр (см. [3]), $c_s = \sqrt{G I_x / \rho I_r}$ – скорость распространения крутильных волн в стержне, $c_\tau = \sqrt{G / \rho}$ – скорость распространения сдвиговых волн, $c_0 = \sqrt{E / \rho}$ – скорость распространения продольных волн в стержне, E – модуль Юнга, $G = E / (2(1 + \nu))$ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Третье слагаемое в уравнении (17) появилось из-за наличия депланации, приводящей к возникновению дисперсии фазовой скорости крутильной волны; четвертое слагаемое появилось в уравнении из-за наличия нелинейности.

Рис.4.

Коэффициент α_1 – характеризует геометрическую и физическую нелинейности стержня. Если стержень является геометрически нелинейным, то $\alpha_1 > 0$, если физически нелинейным, то $\alpha_1 < 0$.

Таким образом, на распространение крутильных волн, описываемых уравнением (16) будут влиять два фактора: дисперсия и нелинейность. Нелинейность приводит к зарождению в спектре волны новых гармоник, что способствует появлению в движущемся профиле волны резких перепадов. Дисперсия же, наоборот, сглаживает перепады из-за различия в фазовых скоростях гармонических составляющих волны. Совместное действие этих факторов может привести к формированию стационарных волн, которые распространяются с постоянной скоростью без изменения формы.

Решение уравнения (16) будем искать в виде: $\theta(x, t) = \theta(\xi)$,

где $\xi = x - Vt$,

V – скорость стационарной волны (заранее не известна).

Для относительного угла закручивания поперечного сечения стержня $\Theta = d\theta/d\xi$ уравнение в частных производных (16) сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению (уравнение Дуффинга):

$$\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + m_1\Theta + m_2\Theta^3 = 0 \quad (17)$$

где

$$m_1 = \frac{(V^2 - c_s^2)c_\tau^2 I_g}{I_\omega \left[V^2 - \left((I_x + I_g)/I_g \right) c_\tau^2 \right] (V^2 - c_0^2)} \quad (18)$$

$$m_2 = \frac{-4\alpha_1 c_\tau^2 I^2}{\rho I_r I_\omega \left[V^2 - \left((I_x + I_g)/I_g \right) c_\tau^2 \right] (V^2 - c_0^2)}$$

Для входящих в (18) скоростей линейных возмущений справедливо следующее неравенство:

$$c_0 > c_\tau \sqrt{\frac{I_x + I_g}{I_g}} > c_\tau > c_s$$

Если стержень обладает геометрической нелинейностью ($\alpha_1 > 0$), то стационарных крутильных волн не существует в диапазоне скоростей $V < c_s$. Во всех других диапазонах нелинейные стационарные волны могут формироваться. Однако в зависимости от величины скорости V имеются качественно различные волновые картины, поскольку при этом уравнение Дуффинга (17) имеет различные решения.

Уравнение (17) имеет первый интеграл:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Theta}{d\xi} \right)^2 = E - \frac{m_1}{2} \Theta^2 - \frac{m_1}{4} \Theta^4 \quad (19)$$

который можно интерпретировать как закон сохранения энергии для ангармонического осциллятора. Здесь E – константа интегрирования, имеющая смысл начальной энергии системы, а функция $f(\Theta) = (m_1/2)\Theta^2 - (m_2/4)\Theta^4$ имеет смысл потенциальной энергии.

Уравнение (19) допускает разделение переменных:

$$\sqrt{2} d\xi = \frac{d\Theta}{\sqrt{E - f(\Theta)}} \quad (20)$$

и имеет ограниченные решения в области между любыми действительными корнями полинома $E - f(\Theta)$, где $E - f(\Theta) > 0$.

Пусть $m_1 > 0$, $m_2 < 0$. Это возможно если скорость стационарной волны находится в диапазоне $c_s < V < c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g}$ или $V > c_0$. В этом случае функция потенциальной энергии $f(\Theta) = (m_1/2)\Theta^2 - (m_2/4)\Theta^4$ имеет локальный максимум $f_{max} = -m_1^2/4m_2$ в точках $\Theta = \pm \sqrt{-m_1/m_2}$ и локальный минимум $f_{min} = 0$ при $\Theta = 0$ (рис.5а). Поэтому на фазовой плоскости $(\Theta; d\Theta/d\xi)$ точка $(0; 0)$ является устойчивым положением равновесия типа «центр», а точки $(\pm \sqrt{m_1/m_2}; 0)$ – неустойчивыми положениями равновесия типа «узел». Фазовый портрет системы приведен на (рис.5б).

Ограниченные решения уравнения (2.20) в этом случае существуют только при $0 \leq E \leq f_{max}$. При этом полином $E - f(\Theta)$ имеет четыре действительных корня $\Theta_{1,2} = \pm \alpha$, $\Theta_{3,4} = \pm \beta$, где

$$\alpha^2 = \frac{m_1 - \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{-m_2}, \quad \beta^2 = \frac{m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{-m_2}, \quad (\alpha^2 > \beta^2) \quad (21)$$

и принимает положительные значения при $-\alpha < \Theta < \alpha$. При $E = f_{max} = -m_1^2/4m_2$ корни попарно совпадают $\Theta_1 = \Theta_3$, $\Theta_2 = \Theta_4$, что соответствует на фазовой плоскости движению по сепаратрисе.

Уравнение (20) принимает вид:

$$\alpha\beta \sqrt{-\frac{m_2}{2}} d\xi = \frac{d\Theta}{\sqrt{(1 - (\Theta^2/\alpha^2))(1 - (\Theta^2/\beta^2))}} \quad (22)$$

и с помощью замены

$$\frac{\Theta}{\alpha} = z \quad (23)$$

приводится к эллиптическому интегралу первого рода

$$\sqrt{\frac{m_2}{2}} (\xi - \xi_0) = \frac{1}{\beta} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-s^2z^2)}}, \quad (24)$$

где $s^2 = \alpha^2/\beta^2$.

Рис.5.

Обращая эллиптический интеграл, стоящий в правой части (24) при $z = 0, \xi_0 = 0$, получаем решение, описывающее нелинейные периодические колебания в виде:

$$\Theta(\xi) = \alpha \operatorname{sn} \left(-\sqrt{\frac{1}{2} m_2 \beta^2 \xi}, s \right) \quad (25)$$

В выражении (25) введем обозначения:

$$\begin{aligned} A = \alpha &= \sqrt{\frac{(m_1 - \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E})}{-m_2}} \\ k &= \sqrt{-\frac{1}{2} m_2 \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E} \right)} \\ s^2 &= \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{m_1 - \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E}}{m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E}} \end{aligned} \quad (26)$$

где A – амплитуда стационарной волны, k – нелинейный аналог волнового числа, s – модуль эллиптической функции, а длина волны Λ равна $\Lambda = 4K(s)/k$. Из соотношений (26) следует, что при изменении E от 0 до $E_{\max} = -m_1^2/4m_2$ частота колебаний

уменьшается от $k = \sqrt{m_1}$ до $k = \sqrt{m_1/2}$, а амплитуда колебаний изменяется в пределах $0 \leq A \leq A_c^1 = \sqrt{m_1/m_2}$, где A_c^1 - амплитуда колебания, соответствующая на фазовой плоскости движению по сепаратрисе. Модуль эллиптической функции (коэффициент линейных искажений) при этом изменяется в интервале $0 \leq s^2 \leq 1$.

Аналогично, исключая E из выражений (26), получим связи между параметрами A, k, s в решении (25):

$$s^2 = -\frac{m_1 A^2}{2m_1 + m_2 A^2}, \quad k = \sqrt{\frac{2m_1 + m_2 A^2}{2}}, \quad \Lambda = \frac{4K(s)}{\sqrt{m_1 + m_2 A^2/2}} \quad (27)$$

Другая форма этих выражений:

$$A = \pm \sqrt{-\frac{2m_1}{m_2} \frac{s^2}{1+s^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{m_1}{1+s^2}} \quad (28)$$

С учетом введенных обозначений решение (25), описывающее нелинейные периодические колебания по замкнутым фазовым траекториям вблизи сепаратрисы, можно представить в виде эллиптического синуса:

$$\Theta(\xi) = A \operatorname{sn}(k\xi, s) \quad (29)$$

Параметры крутильной стационарной волны связаны соотношением (29). При подстановке в (29) выражений (18) получим:

$$A = \pm \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho I_r}{2\alpha_1} \frac{s^2}{(1+s^2)}} \quad (30)$$

Следовательно, амплитуда волны растет прямо пропорционально с ростом ее скорости, а угол наклона кривых (30) возрастает при увеличении s от 0 до 1. При s близких к единице, форма колебаний приведена на рис.6а.

Рис. 6.

Уединенная волна, является предельным случаем периодических волн (29). При $E = E_{max} = -m_1^2/4m_2$, $s^2 = 1$ выражение (25) описывает сепаратрисное решение:

$$\Theta(\xi) = A \operatorname{th}\left(\frac{\xi}{\Delta}\right), \quad (31)$$

где

$$A = \pm \sqrt{-\frac{m_1}{m_2}} = \pm \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho I_r}{4\alpha_1}} \quad (32)$$

$$\Delta = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{m_2}} = \sqrt{\frac{2I_\omega [V^2 - ((I_x + I_g)/I_g) c_t^2] (V^2 - c_0^2)}{(V^2 - c_s^2) c_t^2 I_g}} \quad (33)$$

V – скорость уединенной волны, A – амплитуда, Δ – ширина. Сепаратрисное решение имеет форму перепада, его вид представлен на рис. 6б.

Амплитуда уединенной волны увеличивается с ростом скорости, но ее график лежит выше соответствующей зависимости (30) для периодической волны.

Ширина уединенной волны (33) при $c_s < V < c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g}$ уменьшается пропорционально $1/V$. При скоростях $V > c_0$ проявляется аномальное поведение уединенной волны, которое выражается в увеличении ее ширины ($\Delta \sim V$) с ростом ее скорости и амплитуды.

Пусть $m_1 < 0$, $m_2 > 0$. Этот случай справедлив для скоростей находящихся в интервале $c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g} < V < c_0$. В этом случае функция потенциальной энергии $f(\theta) = (m_1/2)\theta^2 - (m_2/4)\theta^4$ имеет локальный максимум $f_{max} = 0$ при $\theta = 0$ и локальный минимум $f_{min} = -m_1^2/4m_2$ в точках $\theta = \pm \sqrt{-m_1/m_2}$ (рис. 7а). На фазовой плоскости $(\theta; d\theta/d\xi)$ точки $(\pm \sqrt{-m_1/m_2}, 0)$ являются устойчивым положением равновесия типа «центр», а точка $(0, 0)$ является «седлом» (рис. 7б).

Ограниченные решения уравнения (20) существуют, если константа интегрирования изменяется в диапазоне $f_{min} \leq E < +\infty$, причем различным значениям начальной энергии E соответствуют качественно различные режимы движения.

Рис. 7.

Пусть $f_{min} \leq E \leq 0$. В этом случае полином $E - f(\Theta)$ имеет четыре действительных корня $\Theta_{1,2} = \pm\alpha$, $\Theta_{3,4} = \pm\beta$, где

$$\alpha^2 = \frac{-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{m_2}, \quad \beta^2 = \frac{-m_1 - \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{m_2}, \quad (\alpha^2 \geq \beta^2) \quad (34)$$

и принимает положительные значения в областях $|\alpha| \leq \Theta \leq |\beta|$ (рис. 7а). На фазовой плоскости им соответствуют замкнутые траектории, лежащие внутри сепаратрисы.

Уравнение (20) принимает вид:

$$\alpha\beta\sqrt{\frac{m_2}{2}}d\xi = \frac{d\Theta}{\sqrt{-(1 - (\Theta^2/\alpha^2))(1 - (\Theta^2/\beta^2))}} \quad (35)$$

и с помощью замены

$$\frac{\Theta}{\alpha} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} z^2} \quad (36)$$

сводится к эллиптическому интегралу первого рода

$$\sqrt{\frac{m_2}{2}}(\xi - \xi_0) = \frac{1}{\alpha} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - s^2 z^2)}}, \quad (37)$$

где $s^2 = (\alpha^2 - \beta^2)/\alpha^2$. Обращая эллиптический интеграл при $z = 0$, $\xi_0 = 0$, получаем решение, описывающее нелинейные периодические колебания в виде:

$$\Theta(\xi) = \alpha \operatorname{dn} \left(\sqrt{\frac{1}{2} m_2 \alpha^2} \xi, s \right) \quad (38)$$

В выражении (38) введем обозначения:

$$\begin{aligned} A = \alpha &= \sqrt{\frac{(-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E})}{m_2}} \\ k &= \sqrt{-\frac{1}{2} m_2 \alpha^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E} \right)} \\ s^2 &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2} = \frac{2\sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}} \end{aligned} \quad (39)$$

где A – амплитуда стационарной волны, k – нелинейный аналог волнового числа, s – модуль эллиптической функции, $\Lambda = 4K(s)/k$ – длина волны. Из соотношений (39) следует, что при изменении E от $E_{min} = -m_1^2/4m_2$ до 0 частота колебаний увеличивается от $k = \sqrt{-m_1/2}$ до $k = \sqrt{-m_1}$, а амплитуда периодических колебаний изменяется от значения $A = A_c^1 = \sqrt{-m_1/m_2}$ до значения $A = A_c^2 = \sqrt{-2m_1/m_2}$, где A_c^1 , A_c^2 – амплитуды колебаний, соответствующих движений по сепаратрисам для фазовых портретов, приведенных на рис. 5 и 7 соответственно. Модуль эллиптической функции меняется в пределах $0 \leq s^2 \leq 1$.

Исключая из выражений (39) константу интегрирования E , получим зависимость между параметрами A , k , s в решении (38):

$$s^2 = 2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2 A^2} \right), \quad k = \sqrt{m_2 A^2 / 2}, \quad \Lambda = \frac{4\sqrt{2}K(s)}{\sqrt{m_2 A^2}}, \quad (40)$$

которые можно представить в виде:

$$A = \sqrt{-\frac{2m_1}{m_2} \frac{1}{2-s^2}} = \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho I_r}{2\alpha_1} \frac{1}{2-s^2}}, \quad k = \sqrt{-\frac{m_1}{2-s^2}}, \quad 0 \leq s^2 \leq 1 \quad (41)$$

т.е. $A \sim V$, но амплитуда периодической волны при любом s меньше амплитуды уединенной волны.

С учетом введенных обозначений решение (38), описывающее нелинейные периодические колебания по замкнутым фазовым траекториям внутри сепаратрисы можно представить в виде эллиптической функции дельта-амплитуды:

$$\Theta(\xi) = A \operatorname{dn}(k\xi, s) \quad (42)$$

Эти колебания не имеют линейного вырождения, так как при $E \rightarrow E_{\min} =$

$$= -\frac{m_1^2}{4m_2} s \rightarrow 0 \text{ и } \operatorname{dn}(k\xi, s) = 1.$$

При $E = 0, s = 1$ из (38) получаем вырождение в сепаратрисное решение:

$$\Theta(\xi) = A_c^2 \operatorname{ch}^{-1}(\xi/\Delta) \quad (43)$$

где:

$$A_c^2 = \pm \sqrt{-\frac{2m_1}{m_2}} = \pm \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho I_r}{2\alpha_1}} \quad (44)$$

$$\Delta = \frac{1}{k} = \sqrt{-\frac{1}{m_1}} = \sqrt{\frac{I_\omega [V^2 - ((I_x + I_g)/I_g) c_t^2] (V^2 - c_0^2)}{(V^2 - c_s^2) c_t^2 I_g}}$$

A_c^2 – амплитуда колебания Δ – ширина уединенной волны.

Видно, что в этом диапазоне $A \sim V$, а $\Delta \sim \sqrt{1 - V^2/c_0^2}$. Качественный вид нелинейных периодических движений, описываемых дельта-амплитудой приведен на рис. 8а, а на рис.8в показан вид сепаратрисного решения.

Рис. 8

Если $E = 0$, то в этом случае полином $E - f(\Theta)$ имеет два действительных корня $\Theta_{1,2} = \pm\alpha$, $\Theta_{3,4} = \pm i\beta$, где

$$\alpha^2 = \frac{-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{m_2}, \quad \beta^2 = \frac{m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{m_2} \quad (45)$$

и принимает положительные значения в областях $-\alpha < \Theta < \alpha$ (рис. 7а). На фазовой ограниченные решения при таких значениях E соответствуют замкнутые фазовые траектории, лежащие вне петли сепаратрисы (рис. 7б).

Уравнение (20) принимает вид:

$$\alpha\beta\sqrt{\frac{m_2}{2}}d\xi = \frac{d\Theta}{\sqrt{(1 - (\Theta^2/\alpha^2))(1 - (\Theta^2/\beta^2))}} \quad (46)$$

и с помощью замены

$$\frac{\Theta}{\alpha} = \sqrt{1 - z^2} \quad (47)$$

сводится к эллиптическому интегралу первого рода

$$\sqrt{\frac{m_2}{2}}(\xi - \xi_0) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - s^2 z^2)}}, \quad (48)$$

где $s^2 = \alpha/(\alpha^2 + \beta^2)$.

Обращая эллиптический интеграл при $z = 0, \xi_0 = 0$, получаем решение, описывающее нелинейные периодические колебания в виде:

$$\Theta(\xi) = \alpha \operatorname{cn}\left(\sqrt{\frac{m_1}{2}}(m_1^2 + \beta^2)\xi, s\right) \quad (49)$$

В выражении (49) введем обозначения:

$$\begin{aligned} A &= \alpha = \sqrt{\frac{(-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E})}{m_2}} \\ k &= \sqrt{\frac{m_1}{2}}(\alpha^2 + \beta^2) = (m_1^2 + 4m_2E)^{1/4} \\ s^2 &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{-m_1\sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{2\sqrt{m_1^2 + 4m_2E}} \end{aligned} \quad (50)$$

где A – амплитуда стационарной волны, k – нелинейный аналог волнового числа, s – модуль эллиптической функции, $\Lambda = 4\mathbf{K}(s)/k$ – длина волны.

Анализируя соотношения (50) получим, что при изменении E от 0 до $+\infty$ частота колебаний возрастает от значения $k = \sqrt{-m_1}$ до $+\infty$, амплитуда колебаний так же неограниченно возрастает от значения $A = A_c^1 = \sqrt{-2m_1/m_2}$, а модуль эллиптической функции при этом уменьшается $0,5 \leq s \leq 1$.

Исключая константу интегрирования E из (50), получим зависимость между параметрами A , k , s в решении:

$$s^2 = \left(\frac{m_2 A^2}{2(m_1 + m_2 A^2)}\right), \quad k = \sqrt{2m_1 + m_2 A^2}, \quad \Lambda = \frac{4\mathbf{K}(s)}{\sqrt{m_1 + m_2 A^2}}. \quad (51)$$

Эти соотношения можно представить в виде:

$$A = \sqrt{-\frac{2m_1}{m_2} \frac{s^2}{2s^2 - 1}} = \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho I_r}{2\alpha_1} \frac{s^2}{2s^2 - 1}},$$

$$k = \sqrt{-\frac{m_1}{2s^2 - 1}},$$

$$1 > s^2 > \frac{1}{2}$$
(52)

С учетом введенных обозначений решение (49), описывающее колебания по замкнутым фазовым траекториям вне сепаратрисы представляется в виде:

$$\Theta(\xi) = A \operatorname{cn}(k\xi, s) \quad (53)$$

Это решение описывает нелинейные колебания, которые не имеют линейного вырождения. Их форма при s^2 близких к единице показана на рис.8б. При $s = 1$ из (53) получаем сепаратрисное решение (43). Амплитуда таких периодических колебаний всегда больше амплитуды уединенных.

На основании приведенных рассуждений можно сделать следующий вывод: если стержень обладает геометрической нелинейностью ($\alpha_1 > 0$), то стационарных крутильных волн не существует в диапазоне скоростей $V < c_s$. Во всех других диапазонах нелинейные стационарные волны могут формироваться. Однако в зависимости от величины скорости V имеются качественно различные волновые картины, поскольку при этом уравнение Дуффинга (17) имеет различные решения.

Если скорость стационарной волны $c_s < V < c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g}$ или $V > c_0$, то уравнение Дуффинга (17) имеет два типа финитных решений – периодическое (29), выражающееся через эллиптический синус и уединенное (31), являющееся предельным случаем периодического.

Для скоростей, лежащих в интервале $c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g} < V < c_0$, фазовый портрет уравнения (17) содержит два устойчивых положения равновесия, в окрестности которых фазовые траектории имеют форму, близкую к эллипсу. В этом случае имеются три типа финитных решений. Одним из них является уединенная стационарная волна (43), связывающая между собой два класса периодических волн. На фазовой плоскости это решение соответствует сепаратрисе, проходящей через начало координат и отделяющей одну область решений от другой. Второй тип финитного решения соответствует движению по замкнутым траекториям вблизи положения равновесия и описывается эллиптической функцией дельта-амплитуды (42). Другой тип периодических движений описывается эллиптическим косинусом (53).

Типы фазовых портретов уравнения (17) в зависимости от скорости стационарной волны приведены на рис.9.

Если стержень обладает физической нелинейностью ($\alpha_1 < 0$), то возможны следующие случаи:

Рис. 9

Пусть $m_1 > 0$, $m_2 > 0$. Это справедливо если скорость стационарной волны находится в диапазоне $c_s < V < c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g}$ или $V > c_0$. В этом случае функция потенциальной энергии $f(\Theta) = (m_1/2)\Theta^2 - (m_2/4)\Theta^4$ имеет локальный минимум $f_{min} = 0$ в при $\Theta = 0$ (рис.10 а). На фазовой плоскости $(\Theta; d\Theta/d\xi)$ точка с координатами $(0, 0)$ является устойчивым положением равновесия типа «центр» (рис. 10 б).

Рис. 10.

Ограниченные решения уравнения (20) существуют при $0 < E < +\infty$. Полином $E - f(\Theta)$, в этом случае, имеет два действительных корня $\Theta_{1,2} = \pm\alpha$ и два мнимых корня $\Theta_{3,4} = \pm i\beta$, где

$$\alpha^2 = \frac{-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{m_2}, \quad \beta^2 = \frac{m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{m_2} \quad (54)$$

и принимает положительные значения в областях $-\alpha < \Theta < \alpha$ (рис. 10 а).

Тогда уравнение (20) запишется в виде:

$$\alpha\beta\sqrt{\frac{m_2}{2}}d\xi = \frac{d\Theta}{\sqrt{(1 - (\Theta^2/\alpha^2))(1 - (\Theta^2/\beta^2))}} \quad (55)$$

и с помощью замены

$$\frac{\Theta}{\alpha} = \sqrt{1 - z^2} \quad (56)$$

сводится к эллиптическому интегралу первого рода

$$\sqrt{\frac{m_2}{2}}(\xi - \xi_0) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - s^2 z^2)}}, \quad (57)$$

где $s^2 = \alpha/(\alpha^2 + \beta^2)$.

Обращая эллиптический интеграл при $z = 0$, $\xi_0 = 0$, стоящий в правой части (57), получаем решение, описывающее нелинейные периодические колебания в виде:

$$\Theta(\xi) = \alpha \operatorname{cn}\left(\sqrt{\frac{m_1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)}\xi, s\right) \quad (58)$$

В выражении (58) введем обозначения:

$$\begin{aligned} A &= \alpha = \sqrt{\frac{(-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E})}{m_2}} \\ k &= \sqrt{\frac{m_1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)} = (m_1^2 + 4m_2E)^{1/4} \\ s^2 &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{-m_1\sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{2\sqrt{m_1^2 + 4m_2E}} \end{aligned} \quad (59)$$

где A – амплитуда стационарной волны, k – нелинейный аналог волнового числа, s – модуль эллиптической функции, имеющий смысл коэффициента нелинейных искажений формы колебания $\Theta(\xi)$. Из соотношений (59) видно, что при изменении E от 0 до $+\infty$, амплитуда колебаний и частота изменяются в пределах $0 < A < +\infty$, $\sqrt{m_1} < k < \infty$, а коэффициент нелинейных искажений – в интервале $0,5 \leq s^2 \leq 1$.

Исключая константу интегрирования E из (59), получаем связи между параметрами A , k , s в решении (58):

$$s^2 = \frac{m_2 A^2}{2(m_1 + m_2 A^2)}, \quad k = \sqrt{m_1 + m_2 A^2}, \quad \Lambda = \frac{4K(s)}{\sqrt{m_1 + m_2 A^2}} \quad (60)$$

где Λ – длина волны, $K(s)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Из этих соотношений выразим зависимость амплитуды и частоты колебаний от коэффициента нелинейных искажений и коэффициентов уравнения Дуффинга:

$$A = \sqrt{\frac{2m_1}{m_2} \frac{s^2}{1 - 2s^2}} = \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho I_r}{-2\alpha_1} \frac{s^2}{1 - 2s^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{m_1}{1 - s^2}} \quad (61)$$

При $E \rightarrow +\infty$ ($s^2 \approx 0$ и $A \rightarrow 0$) выражение описывает квазигармонические колебания вблизи положения равновесия вида:

$$\Theta = A \cos(k, \xi) \quad (62)$$

При $E \rightarrow +\infty$, $s^2 \rightarrow 1/2$ и в этом случае (58) описывают существенно нелинейные колебания,

$$\Theta = A \operatorname{cn}(k\xi, s), \quad (63)$$

которые имеют пилообразную форму (рис. 11).

Рис.11.

В диапазоне скоростей $V < c_s$ фазовый портрет уравнения (17) содержит два положения равновесия типа «центр», а точка $(0, 0)$ является седлом (см. рис. 7б). В этом случае, как и для стержня, обладающего геометрической нелинейностью, будут иметь место три типа финитных решений, двум из которых отвечают периодические волны (48) и (53), а третьему – уединенная волна (43).

Скорость, амплитуда и ширина уединенной волны связаны соотношениями (44). Параметры периодической волны (42) связаны между собой соотношением (41), а параметры периодической волны (53) соотношением (52).

Если скорость V находится в диапазоне $c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g} < V < c_0$, а это означает, что $m_1 < 0$, $m_2 > 0$, то уравнение (17) не имеет замкнутых фазовых траекторий. Следовательно, в этом интервале скоростей нелинейных стационарных волн не существует.

Типы фазовых портретов уравнения Дуффинга в зависимости от скорости стационарной волны для стержня обладающего физической нелинейностью приведены на рис. 12.

В результате проведенного анализа показано, что совместное действие нелинейности (вызванной высокой интенсивностью вибрации) и дисперсией (обусловленной депланацией) в стержне могут формироваться несинусоидальные стационарные волны, распространяющиеся с постоянной скоростью без изменения формы.

Рис. 12.

4. Волновые процессы в тонкостенном стержне при одновременном учете квадратичной и кубической нелинейностей. Если при анализе стационарных волн учитывать в (9) и кубическую, и квадратичную нелинейности, то обыкновенное дифференциальное уравнение, к которому сведется (9), будет иметь следующий вид:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + m_1\theta + m_2\theta \frac{d\theta}{d\xi} + m_3\theta^3 = 0 \quad (64)$$

Этому уравнению эквивалентна система:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\xi} = \varphi \\ \frac{d\varphi}{d\xi} = m_3\theta^3 - m_1\theta - m_2\theta\varphi \end{cases} \quad (65)$$

На фазовой плоскости (θ, φ) координаты положений равновесия ищутся из условий $(\theta = 0, \varphi = 0)$. Таким образом, ординаты всех равновесных положений равны нулю, а абсциссы являются действительными корнями алгебраического уравнения третьей степени:

$$m_1\theta - m_3\theta^3 = 0 \quad (66)$$

При $m_1 m_3 < 0$ начало координат, точка $(0,0)$ является единственным положением равновесия, причем в любом случае при $m_1 < 0$ это «седло», а при $m_1 > 0$ – «центр». Когда в системе существует единственная «седловая» точка, то периодических движений нет и этот случай для поиска стационарных волн не интересен. Если в системе имеется единственный «центр», то все движения периодические и фазовый портрет представляет собой набор непересекающихся замкнутых кривых. Для определенного набора параметров, а именно $m_1 > 0$, $m_1 = 3$ и $m_1 = -1$ удается записать точное аналитическое решение:

$$\Theta(\xi) = \frac{\sqrt{m_1} (C_1 \sin(\sqrt{m_1} \xi) + C_2 \cos(\sqrt{m_1} \xi))}{C_1 \sin(\sqrt{m_1} \xi) + C_2 \cos(\sqrt{m_1} \xi) + C_3} \quad (67)$$

где C_1, C_2, C_3 – константы интегрирования находятся из начальных условий.

На первый взгляд может показаться странным, что уравнение второго порядка, а констант интегрирования три, но это не так, поскольку числитель и знаменатель можно поделить на любую ненулевую константу и неизвестных будет две. Данная форма решения приведена здесь для общности, полагая, что любая из констант может обращаться в ноль. Непериодическое решение при этих значениях параметров и $m_1 < 0$, так же может быть записано через экспоненты с показателями $\pm \sqrt{|m_1|} \xi$. При другом наборе параметров m_2 и m_3 , конечно с теми же знаками, динамика системы качественно не изменяется, однако точных решений найти не удастся. Нелинейное слагаемое при коэффициенте m_2 несимметрично, по этому, фазовый портрет несимметричен относительно оси абсцисс. При смене знака у коэффициента m_2 на противоположный фазовый портрет (и в случае неединственного положения равновесия) симметрично отражается относительно $(0, \Theta)$, а решение (67) просто меняет знак. Движение по замкнутым фазовым траекториям всегда происходит по часовой стрелке.

При $m_1 m_3 > 0$ имеется три положения равновесия с координатами $(-\sqrt{m_1/m_3}, 0)$, $(0, 0)$ и $(\sqrt{m_1/m_3}, 0)$, при $m_3 > 0$, $(\pm \sqrt{m_1/m_3}, 0)$ – «седла», $(0, 0)$ – «центр». В этом случае все периодические движения находятся внутри области, ограниченной парой сепаратрис, исходящих из левого «седла» в правое и из правого – в левое. Из-за несимметричной нелинейности сепаратрисы также не симметричны и описываются по-разному, хотя величина перехода (амплитуда) из одного состояния в другое одинаковое, но скорость перехода разная. Так при $m_1 > 0$ сепаратриса из левого «седла» в правое имеет вид:

$$\Theta(\xi) = -\sqrt{\frac{m_1}{m_3}} \operatorname{th} \left(\frac{2m_1 m_3 \sqrt{\frac{m_1}{m_3}}}{m_1 m_2 - \sqrt{m_1^2 m_2^2 + 8m_1^2 m_3}} \xi \right) \quad (68)$$

а из правого – в левое:

$$\Theta(\xi) = -\sqrt{\frac{m_1}{m_3}} \operatorname{th} \left(\frac{2m_1 m_3 \sqrt{\frac{m_1}{m_3}}}{m_1 m_2 + \sqrt{m_1^2 m_2^2 + 8m_1^2 m_3}} \xi \right) \quad (69)$$

При смене знака перед m_2 картина симметрично отражается относительно оси абсцисс.

В случае $m_1 < 0$ и $m_3 < 0$ начало координат является «седлом», а точки $(\pm \sqrt{m_1/m_3}, 0)$ «фокусами» при $m_2 > 0$ левый «фокус» – неустойчивый, правый – устойчивый. При смене знака перед m_2 устойчивость фокусов так же меняется на противоположную. При увеличении коэффициента m_2 область притяжения устойчивого «фокуса» увеличивается, за этой областью находится область периодических движений, соответствующих замкнутым фазовым траекториям. К сожалению, для этого случая никаких точных аналитических решений найти не удалось.

Все качественно различные фазовые портреты приведены в таблице.

Выводы. Обсуждается математическая модель, позволяющая описать распространение крутильной волны в тонкостенном стержне. Модель включает в себя геометрическую и физическую упругие нелинейности, а также депланацию. В этой модели связь между углом закручивания стержня и мерой депланации не постулируется, как в большинстве известных моделей, а находится в процессе решения задачи. Из анализа модели определено, что депланация, которая вызывает появление дисперсии фазовой скорости крутильной волны, приводит еще к появлению характерной для интенсивных продольных колебаний квадратичной нелинейности, не встречавшейся прежде в математических моделях, описывающих крутильные колебания. Показано, что в тонкостенном стержне, совершающем интенсивные крутильные колебания, могут формироваться локализованные в пространстве несинусоидальные волны деформации.

Таблица.

m_1	m_3	$m_2 > 0$	$m_2 < 0$
< 0	< 0
< 0	> 0
		Периодических движений НЕТ	Периодических движений НЕТ
> 0	< 0
> 0	> 0

Список литературы

1. Вибрации в технике. Справочник в 6-ти томах. Т.1/ под ред. Болотина В.В. - М.: Машиностроение, 1999. - 504 с.

2. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д. Введение в акустическую динамику машин. - М.: Наука, 1979. - 296 с.
3. Сливкер В. И. Строительная механика. Вариационные основы. - М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2005. - 736 с.
4. Ерофеев В.И., Лампси Б.Б. Нелинейная математическая модель упругого стержня, совершающего крутильные колебания, учитывающая деформацию поперечного сечения // Вестник научно-технического развития. - 2014. - № 4 (80). - С.12-15.
5. Ерофеев В.И., Лампси Б.Б. Математическая модель упругого тонкостенного стержня, совершающего крутильные колебания при наличии нелинейности и деформации // Приволжский научный журнал. - 2014. - № 2. - С.14-17.
6. Ерофеев В. И., Кажаяев В. В., Семирикова Н. П. Волны в стержнях. Дисперсия. Деформация. Нелинейность. - М.: Физматлит, 2002. - 208 с.
7. Ерофеев В. И., Ключева Н. В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. - 2002. - Т.48, №6. - С. 725-740.

Дата поступления: 24 марта 2019 г.