Вестник научно-технического развития Bulletin of Science and Technical Development

Номер 1 (137), январь 2019 г.

DOI: 10.18411/vntr2019-137

Издается с 2007 года

Издание зарегистрировано в Министерстве РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации Эл. № ФС77-29768.

ISSN 2070-6847

*Журнал выпускается под научным руководством Федерального государственного
бюджетного учреждения науки Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН*

ОГЛАВЛЕНИЕ № 1 (137), 2019

Иосиф Исаакович Вульфсон. Анализ чувствительности динамики цикловых механизмов к характеристикам электродвигателя..... стр. 3 – 13

Владислав Львович Литвинов. Применение метода Дюамеля и метода Канторовича-Галеркина для описания колебаний механических систем с движущимися границами стр. 14 – 22

Елена Николаевна Федосеева. Состав и свойства кислых гудронов, нейтрализованных аминами.....стр. 23 – 30

Владимир Михайлович Шаповалов. Влияние аксиальной теплопроводности на температурное поле проводника в цепи постоянного тока.....стр. 31 – 39

*Издание зарегистрировано в Министерстве РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации Эл. № ФС77-29768.*

ISSN 2070-6847

УДК 621.01:534.1

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДИНАМИКИ ЦИКЛОВЫХ МЕХАНИЗМОВ К ХАРАКТЕРИСТИКАМ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ

© Иосиф Исаакович Вульфсон

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна", СПбГУПТД, Санкт-Петербург, Россия

jvulf@yandex.ru

Аннотация. В статье исследуется ряд динамических моделей, анализ которых позволяет выявить взаимовлияние характеристик электродвигателей, механических подсистем приводов и исполнительных органов технологических цикловых машин. Предложены направления динамического синтеза с целью устранения повышенной виброактивности, возникающей из-за соударений в зазорах.

Ключевые слова: колебания, электродвигатели, цикловые машины, механизмы.

DYNAMICS SENSITIVITY ANALYSIS OF CYCLIC MECHANISMS TO THE CHARACTERISTICS OF ELECTRIC MOTOR

© I. I. Vulfson

Saint Petersburg State University of Industrial Technologies and Design
Saint-Petersburg, Russia

jvulf@yandex.ru

Abstract. The article examines a number of dynamic models, which allows to reveal the influence of the characteristics of electric motors, mechanical subsystems of drives and executive bodies of technological cycle machines. It has been suggested the directions of dynamic synthesis in order to eliminate the vibroactivity arising from collisions in the gaps.

Key words: vibrations, electric motors, cyclic machines.

1. Колебаниям машинных агрегатов посвящено много публикаций, обзор которых не рассматривается в качестве цели данной статьи. В ссылках мы использовали лишь те из них, которые в общей постановке служат опорой для решения излагаемой задачи [1–9]. Непосредственно в статье получили развитие некоторые связанные с обсуждаемой проблемой важные вопросы, которые нуждаются в отдельном рассмотрении. В частности, в дальнейшем развитии нуждаются исследования ряда источников виброактивности цикловых машин, возникающей из-за колебаний ротора электродвигателя [10, 11].

На рис.1 представлены две универсальные динамические модели, которые включают основные структурные компоненты, формирующие виброактивность исполнительных органов технологических машин. Выделим следующие элементы этой модели: 1)

электродвигатель M ; 2) механическая подсистема привода, (c_1, ψ_1, J_1) , связанная с электродвигателем редуктором с передаточным отношением u ; 3) ведомая подсистема исполнительного органа (s, c_2, ψ_2, J_2) , связанная с подсистемой привода цикловым механизмом с нелинейной функцией положения Π . Здесь приняты условные обозначения: J_j – моменты инерции; c_j – коэффициенты жесткости; ψ_j – коэффициенты рассеяния; s – зазор. Нередко привод и исполнительные органы объединяются общим термином – рабочая машина [6,7].

Модель 1

Модель 2

Рис.1. Динамические модели

Отличие второй модели от первой состоит в учете зазора в цикловом механизме исполнительного органа. Зазоры могут существенно повысить виброактивность привода и точность воспроизведения заданных программных движений рабочих органов.

Механические колебания привода исполнительных органов в основном формируются в рабочей машине, поэтому при определении уровня виброактивности для установившихся режимов нередко задаются постоянной средней угловой скоростью на «входе» привода машины. При этом исходят из допущения о малой динамической связанности функциональных частей машины. В цикловых технологических машинах, к которым относятся многие машины текстильной, легкой, полиграфической и ряда других отраслей промышленности, управление движением обычно реализуется в самой механической системе без использования специальных средств программного управления. Это связано с повышенными требованиями к точности позиционирования рабочих органов. В подобных случаях возникает необходимость анализа взаимовлияния электромеханического привода и рабочей машины.

2. Описание электромагнитных колебательных процессов в двигателях связано с решением достаточно сложных систем нелинейных дифференциальных уравнений. Однако применительно к установившимся режимам в инженерной практике хорошо себя зарекомендовали приближенные линеаризованные уравнения, которые для двигателя постоянного тока и асинхронных двигателей имеют вид [2, 3]

$$\Omega_{\dot{A}} = \Omega_{\dot{A}0} [1 - v(\dot{I}_{\dot{A}} + \tau \dot{I}_{\dot{A}})], \quad (1)$$

где $\dot{I}_{\dot{A}}$ – момент двигателя; v – коэффициент крутизны статической характеристики; τ – электромагнитная постоянная времени; $\Omega_{\dot{A}0}$ – угловая скорость идеального холостого хода (т.е. при $\dot{I}_{\dot{A}} \equiv 0$).

Для асинхронных двигателей $\tau = (2\pi f_c s_e)^{-1}$; $s_e = (1 - \Omega_{\dot{A}}^i / \Omega_{\dot{A}0})(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$; $v = s_e / (2\dot{I}_{\dot{A}}^i \xi)$, где s_k – критическое скольжение; $f_c = 50$ Гц – частота сети; ξ – отношение максимального момента к номинальному $\dot{I}_{\dot{A}}^i$. (Исходные данные заимствуются из каталога электродвигателей). Характеристика электродвигателя (1) соответствует реологической модели Максвелла, в которой ротор соединен со статором посредством «упругого элемента» с коэффициентом жесткости $\tilde{n}_{\dot{A}} = (v\Omega_{\dot{A}0}\tau)^{-1}$ и последовательно включенного демпфера с моментом сопротивления $b_{\dot{A}}\Omega_{\dot{A}}$ при $b_{\dot{A}} = (v\Omega_{\dot{A}0})^{-1}$ [5, 6, 10, 11, 12].

Как уже отмечалось, в данной статье акцентируется внимание на влиянии характеристик двигателя на колебания рабочих органов. Исходные данные для определения τ и v заимствуются из каталогов электродвигателей. Если в уравнении (1) принять $\tau = 0$, то характеристика называется *статической*.

Обратимся к анализу модели 1. Как показано в [5], если приведенный к валу двигателя момент инерции J является постоянным, то задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$v\tau J\ddot{\omega}_{\dot{A}} + vJ\dot{\omega}_{\dot{A}} + \omega_{\dot{A}} / \omega_{\dot{A}}^0 = 1 - v(\dot{I}_{\dot{N}} + \tau \dot{I}_{\dot{N}}). \quad (2)$$

Далее представим момент сопротивления M_C в виде суммы среднего значения M_C^* и переменной составляющей $\Delta M_C(t)$. Соответственно функцию $\Delta\omega_{\dot{A}}(t)$ также представим как $\omega_{\dot{A}}(t) = \omega_{\dot{A}}^* + \Delta\omega_{\dot{A}}(t)$. Постоянная составляющая $\omega_{\dot{A}}^*$ определяется статической характеристикой двигателя:

$$\omega_{\dot{A}}^* = \omega_{\dot{A}}^0 (1 - v\dot{I}_{\dot{N}}^*). \quad (3)$$

При учете (3) перепишем уравнение (2) в следующем виде:

$$\Delta\ddot{\omega}_{\dot{A}} + 2n\Delta\dot{\omega}_{\dot{A}} + k^2\Delta\omega_{\dot{A}} = W(t), \quad (4)$$

где $n = 0,5\tau^{-1}$; $k^2 = (v\tau J\omega_{\dot{A}}^0)^{-1}$; $W(t) = -(\Delta M_{\dot{N}} / \tau + \Delta\dot{I}_{\dot{N}}) / J$.

Заметим, что в отличие от случаев, когда диссипативная сила была вызвана в основном конструкционным демпфированием, параметр n здесь может оказаться соизмерим с

частотой k . Поэтому при расчете собственной частоты k_1 следует пользоваться зависимостью

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{(J\nu\tau\omega_A^0)^{-1} - 0,25\tau^{-2}}.$$

При $\tau = \tau^* = 0,25\nu\omega_A^0 J$ собственная частота обращается в нуль. Таким образом, при $\tau \leq \tau^*$ решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего (4), становится аperiодическим. С увеличением τ до значения $\tau^{**} = 0,5\nu\omega_A^0 J$ величина k_1 растет до своего максимального значения $k_{1\max} = (\nu\omega_A^0 J)^{-1}$; при $\tau > \tau^{**}$ собственная частота с ростом электромагнитной постоянной времени τ соответственно убывает. Такой характер влияния параметра τ связан с тем, что динамическая характеристика двигателя (1) соответствует модели, в которой ротор соединен с статором посредством условного «упругого элемента» с коэффициентом жесткости $c_A = (\nu\omega_A^0 \tau)^{-1}$ и последовательно включенного «демпфера», соответствующего моменту сопротивления, пропорционального первой степени скорости при коэффициенте пропорциональности $b_A = (\nu\omega_A^0)^{-1}$. При малых значениях τ доминирующую роль играет демпфер, что даже может привести к возможности появления аperiодических решений. При больших значениях τ «жесткость» убывает, и соответственно уменьшается собственная частота. Первая резонансная частота располагается в окрестности k_1 .

Более подробный анализ уравнения (4) отражен на графиках (рис.2). В рамках данной статьи мы ограничимся качественным анализом, принимая во внимание, что для рассматриваемого класса двигателей обычно изменение частоты Ω не превышает значений $\Delta\Omega = (5-10)\tilde{n}^{-1}$, а параметры $\nu \leq 0,01(\tilde{n})^{-1}$; $\tau \leq 0,05\tilde{n}$. При построении графиков на рис. 2,а зафиксировано значение параметра τ , а для графиков на рис. 2,б зафиксировано значение параметра ν . Кривые 1 и 3 отвечают изменению нормированной угловой скорости двигателя и отличаются лишь тем, что во втором случае уточнены коррективы, возникающие при учете переменности функции положения. Кривые 2 соответствуют изменению момента двигателя. Из графиков следует, что кинематические характеристики рабочей машины в большей степени влияют при малых значениях параметра ν , а максимальный момент двигателя – при повышенных значениях электромагнитного параметра τ .

Рис.2. К анализу чувствительности кинематических и силовых факторов от характеристик электродвигателя

3. На первом этапе анализа следует произвести оценку низшей собственной частоты рабочей машины p_1 (или определение динамической жесткости), считая входные сечения главного вала заземленными. Заметим, что при сложной структуре колебательной системы, например, при кольцевой структуре привода исполнительных органов, характерной для многих трикотажных машин, нередко целесообразно использовать континуальную идеализацию, при которой реализуется прием агрегирования системы [3, 4, 5].

Второй этап базируется на анализе модифицированной модели, полученной при приведении параметров двигателей к главному валу. Можно показать, что при этом $c_0 = c_{\bar{A}} u^2$, $b_0 = b_{\bar{A}} u^2$, $J_0 = J_{\bar{A}} u^2$, а в уравнении (1) следует произвести замену $\Omega_{\bar{A}} = \Omega u^{-1}$, $\Omega_{\bar{A}0} = \Omega_0 u^{-1}$, $v_{\bar{A}} = v u$, $M_{\bar{A}} = M_0 u^{-1}$, где Ω , Ω_0 , M_0 – соответствующие угловые скорости и движущий момент на главном валу. Далее представим момент инерции рабочей машины как $J = \bar{J} + \Delta J(\varphi)$, где $\varphi = \bar{\omega} t$, $\bar{\omega} = \Omega_{\bar{A}}^i u^{-1}$ – номинальная угловая скорость главного вала, $\bar{J}$ – среднее значение приведенного момента инерции. Для одностороннего привода приведенный коэффициент жесткости в первом приближении равен $c = \bar{J} p_1^2$, а для двухстороннего – $c = 0,5 \bar{J} p_1^2$. Момент, действующий на приводные двигатели, выразим как $M = M_c + 0,5 \bar{\omega}^2 \Delta J'(\varphi)$, где M_c – момент сопротивления, $(\quad)' = d/d\varphi$. При этом переменная составляющая этого момента ΔM описывается следующим рядом Фурье:

$$\Delta M = \sum_{j=1}^{\infty} [\mu_{j1} \sin(j\bar{\omega}t + \alpha_{1j}) + \mu_{j2} \sin(j\bar{\omega}t + \alpha_{2j})], \quad (2)$$

где μ_{j1} , μ_{j2} – амплитудные значения гармоники j момента сопротивления или динамической составляющей.

В машинах текстильной и легкой промышленности обычно доминирует динамическая составляющая вынуждающего момента, связанная с переменностью приведенного момента инерции при $j=2$. Тогда основная частота возбуждения равна $\omega = 2\bar{\omega}$ и $\mu_{22} = 0,125 \omega^2 \Delta J'_2$, где $\Delta J'_2$ соответствует этой гармонике.

Не сужая общности, для иллюстрации методики расчета ниже принято $\mu_{j1} = 0$, $\mu_{j2} = \mu_{22} = 0,04 \omega^2 \zeta J_M$, где $\zeta = \bar{J}_1 / \bar{J}_M$. Представим гармонические колебания с частотой ω в комплексной форме $q = A \exp[i(\omega t + \alpha)] = \tilde{A} \exp(i\omega t)$, где $\tilde{A} \exp(i\alpha)$ – комплексная амплитуда, модуль которой $|\tilde{A}| = A$ равен амплитуде, а аргумент α – фазе колебаний. Аналогичным образом, представляя момент в комплексной форме $\tilde{\Delta M}$, запишем для одинарного привода следующее матричное равенство:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{\Delta M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\Delta M}_0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь γ_{ks} – элементы матрицы перехода Γ , которая равна произведению в обратном порядке матриц перехода подсистем:

$$\Gamma = \Gamma_J \Gamma_{c\psi} \Gamma_{J0} \Gamma_{c0} \Gamma_{b0}, \quad (4)$$

где

$$\Gamma_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 J & 1 \end{pmatrix}; \Gamma_{J_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 J_0 & 1 \end{pmatrix}; \Gamma_{c_0} = \begin{pmatrix} 1 & c_0^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \Gamma_{c_\psi} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{c}^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \Gamma_{b_0} = \begin{pmatrix} 1 & (b_0 \omega i)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\tilde{c}$ – комплексный коэффициент жесткости реологической модели Кельвина–Фойхта, который при конструкционном демпфировании согласно гипотезе Е.С. Сорокина определяется зависимостью $\tilde{c} = c(1 + 2\delta i)$ при $\delta = \psi / (2\pi)$ (ψ – приведенный коэффициент рассеяния).

Собственные частоты с достаточной точностью соответствуют $\min |\gamma_{22}|$ [10, 11]. Заметим, что здесь и ниже при применении матричных зависимостей не требуется производить каких-либо аналитических выкладок, поскольку можно воспользоваться любым современным пакетом программ, например, пакетом Mathcad. На рис. 3 приведены графики собственных частот $k_1(\zeta)$ полученные при следующих исходных данных: $J_0 = 0,1 \text{ кгм}^2$, $\tau = 0,043 \text{ с}$, $v^* = v/u = 0,001 \text{ (Нм)}^{-1}$, $p_1 = 500 \text{ с}^{-1}$. (кривая 1), $k_2(\zeta)$ (кривая 2). Кривая 3, которая отвечает низшей собственной частоте без учета упруго-диссипативных свойств рабочей машины.

Кривая 4 получена согласно зависимости $k_{20} = p_1 \sqrt{1 + \zeta}$ без учета влияния электромагнитных характеристик двигателя на собственную частоту машинного агрегата.

Рис. 3. Графики частотных характеристик

Как следует из сопоставления графиков, учет колебательной системы рабочей машины оказывает некоторое влияние на низшую частоту лишь при больших значениях ζ . В то же время параметры двигателя v, τ при достаточно большой разнице парциальных частот подсистем практически не влияют на частотный спектр рабочей машины. Это существенно, поскольку устраняет опасность возбуждения параметрических резонансов и связанных с ними возможностью нарушения условий динамической устойчивости из-за характеристик электродвигателя. Разумеется, данный вывод не относится к двигателям, которые включают подсистемы управления, имеющие обратные связи с подсистемами рабочей машины [6].

«Упругая» характеристика асинхронного двигателя или двигателя постоянного тока обычно существенно ниже жесткости элементов привода. Это позволяет в первом приближении при определении неравномерности вращения вала двигателя в окрестности $\omega \approx k_1$, считать остальную кинематическую цепь либо абсолютно жесткой, либо ограничиться учетом наиболее податливых элементов привода. При анализе второго резонансного режима следует иметь в виду, что под действием номинального момента двигателя эквивалентная динамическая ошибка на входе привода соответствует деформации $(0,05-1,4)$ рад., что, как правило, значительно превышает деформации остальных участков валопровода. Это свидетельствует о высокой эквивалентной податливости. Тогда, для инженерных оценок второй резонансной частоты можно принять $c_{\bar{\omega}} = 0$ при обязательном учете момента инерции ротора двигателя [10, 11].

Одним из традиционных способов уменьшения неравномерности вращения входных звеньев привода является увеличение момента инерции установкой маховика. Однако, как показывает анализ, увеличение J приводит к уменьшению $\Delta\omega_{\bar{\omega}}$ только в зарезонансном режиме, когда частота вынуждающего момента $\omega > k_1$. Если при этом с целью отстройки от резонанса принять $\omega \geq \sqrt{2}k_1$, то при установке маховика во всяком случае должно быть удовлетворено условие $J > 2(\omega^2 \omega_{\bar{\omega}}^0 \nu \tau)^{-1}$. Далее на основании решения уравнений (2), (4) может быть определен коэффициент неравномерности $\delta_i \approx 2|\Delta\omega_{\bar{\omega}}|_{\max} / \bar{\omega}_{\bar{\omega}}$, где $\bar{\omega}_{\bar{\omega}}$ – среднее значение угловой скорости двигателя. Следует, однако, иметь в виду, что существенное увеличение момента инерции J не является желательным для переходных режимов, поскольку при этом возрастают динамические нагрузки при разгоне.

На первом этапе анализа следует произвести оценку низшей собственной частоты рабочей машины p_1 (или определение динамической жесткости), считая входные сечения главного вала заземленными. При сложной структуре колебательной системы, например, при кольцевой структуре привода исполнительных органов, характерной для многих трикотажных машин, нередко целесообразно использовать континуальную идеализацию, при которой реализуется прием агрегирования системы [3, 4, 5].

Второй этап базируется на анализе модифицированной модели (см. рис.1), полученной при приведении параметров двигателей к главному валу. Можно показать, что при этом $c_0 = c_m u^2$, $b_0 = b_m u^2$, $J_0 = J_{\bar{\omega}} u^2$, а в уравнении (1) следует произвести замену $\Omega_{\bar{\omega}} = \Omega u^{-1}$, $\Omega_{\bar{\omega}0} = \Omega_0 u^{-1}$, $v_m = v u$, $M_{\bar{\omega}} = M_0 u^{-1}$, где Ω , Ω_0 , M_0 – соответствующие угловые скорости и движущий момент на главном валу. Далее представим момент инерции рабочей машины как $J = \bar{J} + \Delta J(\varphi)$, где $\varphi = \bar{\omega} t$, $\bar{\omega} = \Omega_{\bar{\omega}}^i u^{-1}$ – номинальная угловая скорость главного вала, $\bar{J}$ – среднее значение приведенного момента инерции. Для одностороннего привода приведенный коэффициент жесткости в первом приближении равен $c = \bar{J} p_1^2$, а для двухстороннего – $c = 0,5 \bar{J} p_1^2$. Момент, действующий на приводные двигатели, выразим как $M = M_c + 0,5 \bar{\omega}^2 \Delta J'(\varphi)$, где M_c – момент сопротивления, $(\)' = d/d\varphi$. При этом переменная составляющая этого момента ΔM описывается следующим рядом Фурье:

$$\Delta M = \sum_{j=1}^{\infty} [\mu_{j1} \sin(j\bar{\omega} t + \alpha_{1j}) + \mu_{j2} \sin(j\bar{\omega} t + \alpha_{2j})], \quad (2)$$

где μ_{j1} , μ_{j2} – амплитудные значения гармоники j момента сопротивления и динамической составляющей.

В машинах текстильной и легкой промышленности обычно доминирует динамическая составляющая вынуждающего момента, связанная с переменностью приведенного момента инерции при $j=2$. Тогда основная частота возбуждения равна $\omega = 2\bar{\omega}$ и $\mu_{22} = 0,125\omega^2 \Delta J'_2$, где $\Delta J'_2$ – амплитудное значение для гармоники $j=2$.

Не сужая общности, для иллюстрации методики расчета ниже принято $\mu_{j1} = 0$, $\mu_{j2} = \mu_{22} = 0,04\omega^2 \zeta J_0$, где $\zeta = \bar{J} / \bar{J}_0$. Представим гармонические колебания с частотой ω в комплексной форме $q = \tilde{A} \exp[i(\omega t + \alpha)] = \tilde{A} \exp(i\omega t)$, где $\tilde{A} \exp(i\alpha)$ – комплексная амплитуда, модуль которой $|\tilde{A}| = \tilde{A}$ равен амплитуде, а аргумент α – фазе колебаний. Аналогичным образом, представляя момент в комплексной форме $\Delta \tilde{M}$, запишем для одинарного привода следующее матричное равенство:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \Delta \tilde{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \tilde{M}_0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь γ_{ks} – элементы матрицы перехода Γ , которая равна произведению в обратном порядке матриц перехода подсистем:

$$\Gamma = \Gamma_J \Gamma_{c\psi} \Gamma_{J0} \Gamma_{c0} \Gamma_{b0}, \quad (4)$$

где

$$\Gamma_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 J & 1 \end{pmatrix}; \Gamma_{J0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 J_0 & 1 \end{pmatrix}; \Gamma_{c0} = \begin{pmatrix} 1 & c_0^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \Gamma_{c\psi} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{c}^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_{b0} = \begin{pmatrix} 1 & (b_0 \omega i)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\tilde{c}$ – комплексный коэффициент жесткости реологической модели Кельвина–Фойхта, который согласно гипотезе Е.С. Сорокина [12] определяется зависимостью $\tilde{c} = c(1 + 2\delta i)$ при $\delta = \psi / (2\pi)$ (ψ – приведенный коэффициент рассеяния).

Собственные частоты соответствуют $\min |\gamma_{22}|$. Заметим, что здесь и ниже при применении матричных зависимостей не требуется производить каких-либо аналитических выкладок, поскольку можно воспользоваться любым современным пакетом программ, например, пакетом Mathcad. На рис.3 приведены графики собственных частот $k_1(\zeta)$ (кривая 1), $0,1k_2(\zeta)$ (кривая 2), полученные при следующих исходных данных: $J_0 = 0,1$ кгм², $\tau = 0,043$ с, $v = v_{\bar{A}} / u = 0,001$ (Нм)⁻¹, $p_1 = 500$ с⁻¹. Кривая 3 отвечает низшей собственной частоте без учета упругодиссипативных свойств рабочей машины, а кривая 4 получена согласно зависимости $k_{20} = p_1 \sqrt{1 + \zeta}$ – без учета влияния электромагнитных характеристик двигателя на собственную частоту машинного агрегата.

Как следует из сопоставления графиков, учет колебательной системы рабочей машины оказывает некоторое влияние на низшую частоту лишь при больших значениях ζ . В то же время параметры двигателя ν, τ при достаточно большой разнице парциальных частот подсистем практически не влияют на частотный спектр рабочей машины.

На рис. 4,а приведено полученное на основании (3), (4) семейство амплитудно-частотных характеристик $A(\omega, \zeta) = |\tilde{A}(\omega, \zeta)|$. Коэффициент неравномерности вращения вала электродвигателя $\Delta\Omega_{\max} / \bar{\omega}$ определяется как $\chi = |\tilde{\chi}|$ при $\tilde{\chi} = \nu \Delta \tilde{M}(\omega, \zeta)(1 + i\tau)$ (рис.4,б).

Рис. 4. Графики амплитудно-частотных характеристик и коэффициентов неравномерности

4. Приведенное выше исследование соответствует модели 1 (см. рис.1), в котором не учтены зазоры, влияние которых частично отражено в динамической модели 2. Эта модель при совместном учете динамических характеристик привода и зазора описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\bar{\omega}'' + \frac{\Delta\bar{\omega}'}{\tau_m \bar{\omega}_*} + \frac{\Delta\bar{\omega}}{\nu_m \tau_m \bar{\omega}_*^3 J_0^*} - \frac{k_1^2 q_1}{\tau_m J_0^*} &= 0; \\ q_1'' + \{ \mu \Pi_*' \bar{k}_2^2 [2\delta_2 \bar{k}_2^{-1} (q_1 \Pi_*' - q_2) + q_1 \Pi_*' - q_2 - \\ - 0,5s \operatorname{sgn}(-\Pi_*' q_1 - q_2)] \} H(|\Pi_*' q_1 - q_2| - 0,5s) + k_1^2 (2\delta_1 k_1^{-1} q_1' + q_1) &= 0; \\ q_2'' + \bar{k}_2^2 [2\delta_2 \bar{k}_2^{-1} (-q_1' \Pi_*' + q_2') - q_1 \Pi_*' + q_2 - \\ - 0,5s \operatorname{sgn}(-q_1' \Pi_*' + q_2') H + \Pi_*' (1 + \Delta\bar{\omega})^2 + \Pi_*' \Delta\bar{\omega}' + k_0^2 (\Delta_0 + \Pi_*)] &= M_2 / J_2, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где $\Delta\bar{\omega}$ – усредненная динамическая ошибка угловой скорости на «входе» (см. ниже); q_1, q_2 – координаты в сечениях «дисков» J_1, J_2 ; $()' = d/d\varphi$; ν_m, τ_m – коэффициент крутизны

статической характеристики и электромагнитная постоянная времени электродвигателя, приведенные к сечению J_1 [1, 2, 9]; $\bar{k}_i = k_i / \omega_*$; $k_1 = \sqrt{c_1 / J_1}$, $k_2 = \sqrt{c_2 / J_2}$, $k_0 = \sqrt{c_0 / J_2}$; ; $\mu = u^2 J_M / J_1$; $J_0^* = J_1 u^{-2}$; $\delta_i = \psi_i / (4\pi)$; Δ_0 – предварительный натяг замыкающего устройства (при отсутствии силового замыкания $c_0 = 0$); M_2 – момент внешних сил; u – передаточное отношение; $H(\varphi, s, q_1, q_2)$ – единичная функция ($H = 0$ è $H = 1$ соответственно при отрицательном и положительном аргументе). Здесь и ниже безразмерные параметры, отмеченные черточкой, соответствуют их исходному значению, отнесенному к ω_* . Характеристика асинхронного электродвигателя и двигателя постоянного тока может быть представлена как реологическая модель Максвелла, в которой ротор соединен со статором посредством «упругого элемента» с коэффициентом жесткости $\tilde{n}_* = (v \Omega_{m0} \tau)^{-1}$ и последовательно включенного демпфера с моментом сопротивления $b \Omega_0$. Здесь $b = v^{-1}$; Ω_0 – угловая скорость идеального холостого хода двигателя [1, 2, 4, 12]. В статьях [10, 11] было показано, что условный эквивалентный коэффициент жесткости электродвигателя значительно ниже приведенного коэффициента жесткости механической подсистемы привода. Практически это означает, что нередко достаточную точность в рабочем диапазоне скоростей дает допущение $c_* \approx 0$, при котором влияние двигателя на динамику привода ограничивается учетом момента инерции ротора. Этому допущению отвечает динамическая модель 2. Соответствующая этой модели система дифференциальных уравнений совпадает с (2), если принять $\Delta\omega = 0$, т.е., пренебречь переменностью вращения ротора двигателя. Для инженерных оценок можно также воспользоваться методом последовательных приближений, принимая $\Delta\omega$ как решение первого уравнения системы (5), в котором можно ограничиться статической характеристикой двигателя ($\tau = 0$). Реактивные моменты, связанные с координатами q_1, q_2 , в этом случае можно заменить моментом сопротивления, базируясь на результатах кинетостатического анализа. Следует однако отметить, что при этом возможны некоторые ошибки не только количественного, но и качественного уровня из-за изменения частотных и модальных характеристик. В рамках данной статьи мы ограничились лишь качественным анализом взаимовлияния характеристик электродвигателя и динамических эффектов, вызванных соударениями в зазорах. Связь между этими факторами наглядно отражена в уравнениях системы (5). Подробный анализ возникающих при этом возмущений и способы их подавления нуждаются в отдельном рассмотрении.

Список литературы

1. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
2. Вейц В.Л. Динамика машинных агрегатов./В.Л. Вейц. Л.: Машиностроение, 1969. – 370 с.
3. Вейц В.Л., Коловский М.З., Кочура А.Е. Динамика управляемых машинных агрегатов. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
4. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение, 1990. – 309 с.
5. Вульфсон И. И. Динамика цикловых машин. – СПб.: Политехника, 2013. – 425 с.
6. Коловский М.З. Динамика машин. – Л.: Машиностроение, 1989. – 264 с.
7. Вульфсон И.И., Коловский М.З. Нелинейные задачи динамика машин. – Л.: Машиностроение, 1968. – 284 с.

8. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластичных тел. – М.: Наука, 1976. –328 с.
9. Dresig, H., Vulfson, I.I. Dynamik der Mechanismen /, Wien, New York: Springer, 1989. – 328 P.
10. Вульфсон И. И. К проблеме динамической взаимозависимости электродвигателя и механического привода цикловой машины. // Теория механизмов и машин. – 2016. - Т. 32, №4. – С. 173–182.
11. Вульфсон И. И. О некоторых коррективах при оценке влияния электродвигателя на виброактивность привода технологических машин// Вестник научно-технического развития. – 2017. – №2 (114). - С. 11–23.
12. Сорокин Е. С. Динамический расчет несущих конструкций. – М.: Госстройиздат, 1958. – 325 с.

Дата поступления: 15 января 2019 г.

УДК 534.11

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДЮАМЕЛЯ И МЕТОДА КАНТОРОВИЧА–ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ОПИСАНИЯ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ

© Владислав Львович Литвинов

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

vladlitvinov@rambler.ru

Аннотация. Метод Канторовича – Галеркина в совокупности с методом Дюамеля рассматривается применительно к решению задач, описывающих колебания вязкоупругих объектов с условиями на движущихся границах. Математическая постановка задачи включает неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных относительно искомой функции смещения, неоднородные граничные и начальные условия. При помощи введения в задачу новой функции граничные и начальные условия приводятся к однородным. Решение производится в безразмерных переменных с точностью до величин второго порядка малости относительно малых параметров, характеризующих скорость движения границы и вязкоупругость. Используя метод Канторовича – Галеркина и метод Дюамеля находится приближенное решение задачи о вынужденных продольных колебаниях вязкоупругого стержня переменной длины.

Ключевые слова: колебания систем с движущимися границами, законы движения границ, вязкоупругие свойства, амплитуда колебаний, продольные колебания стержня.

APPLICATION OF THE DUAMEL AND KANTOROVICH – GALERKIN METHOD TO DESCRIBE THE VIBRATIONS OF MECHANICAL SYSTEMS WITH MOVING BOUNDARYS

© Vladislav L. Litvinov

Moscow State University, Moscow, Russia

Samara State Technical University, Samara, Russia

vladlitvinov@rambler.ru

Abstract. The Kantorovich – Galerkin method in conjunction with the Duhamel method is considered as applied to solving problems describing the oscillations of visco-elastic objects with conditions on moving boundaries. The mathematical formulation of the problem includes an inhomogeneous partial differential equation with respect to the desired displacement function, inhomogeneous boundary and initial conditions. By introducing a new function into the problem, the boundary and initial conditions are reduced to homogeneous. The solution is made in dimensionless variables with an accuracy of the second order of smallness with respect to small parameters characterizing the velocity of the boundary and viscoelasticity. Using the Kantorovich – Galera-kin method and the Duhamel method, an approximate solution of the problem of forced longitudinal oscillations of a viscoelastic rod of variable length is found.

Key words: *oscillations of systems with moving boundaries, laws of motion of boundaries, viscoelastic properties, amplitude of oscillations, longitudinal oscillations of a rod.*

Системы, границы которых движутся, широко распространены в технике (канаты грузоподъемных установок [1, 2, 9, 14–19, 21, 22], гибкие звенья передач [3, 7, 9] и т.д.). Наличие движущихся границ вызывает значительные затруднения при описании таких систем. Точные методы решения ограничены волновым уравнением и сравнительно простыми граничными условиями [2, 3, 8, 9, 11, 12, 15]. Из приближенных методов наиболее эффективен метод Канторовича – Галеркина, описанный в работах [2, 10, 14–19, 21, 22]. Однако метод Канторовича – Галеркина в совокупности с методом Дюамеля может быть применён и в более сложных случаях при решении полностью неоднородной начально–краевой задачи, с учетом действия на систему вязкоупругих свойств колеблющегося объекта [14, 16, 22],

Пусть требуется получить решение уравнения гиперболического типа

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[U(\xi, \tau)] + \varepsilon_1 L_1[U(\xi, \tau)] = \varphi(\xi, \tau); \quad (1)$$

при начальных условиях

$$U(\xi, 0) = \Phi_0(\xi); \quad U_\tau(\xi, 0) = \Phi_1(\xi) \quad (2)$$

и граничных условиях

$$Y_{ji} \left[U(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau) \right] = F_{ji}(\tau); \quad (3)$$

$$i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, 2},$$

где L – линейный однородный дифференциальный оператор по ξ порядка $2m$ ($m \leq 2$ – целое положительное число); L_1 – линейный дифференциальный оператор (его порядок по τ равен единице, по ξ не превышает $2m$); Y_{ji} – линейные однородные дифференциальные операторы по ξ ; $\varphi(\xi, \tau)$ – заданная функция класса C^1 ; $\Phi_0(\xi)$, $\Phi_1(\xi)$, $F_{ji}(\tau)$ – заданные функции класса C^2 ; $\varepsilon, \varepsilon_1$ – малые параметры ($\varepsilon = V/a$, V – скорость границы, a – скорость распространения колебаний).

Запись законов движения границ в виде $\ell_j(\varepsilon\tau)$ соответствует режиму медленного движения.

Для редуцирования задачи (1) – (3) к задаче с однородными граничными условиями вводится новая гладкая функция $u(\xi, \tau)$, удовлетворяющая граничным условиям (3).

В силу линейности операторов L, L_1, Y_{ji} для разности $\tilde{U}(\xi, \tau) = U(\xi, \tau) - u(\xi, \tau)$ получим

$$\tilde{U}_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[\tilde{U}(\xi, \tau)] + \varepsilon_1 L_1[\tilde{U}(\xi, \tau)] = \tilde{\varphi}(\xi, \tau); \quad (4)$$

$$\tilde{U}(\xi, 0) = \tilde{\Phi}_0(\xi); \quad \tilde{U}_\tau(\xi, 0) = \tilde{\Phi}_1(\xi); \quad (5)$$

$$Y_{ji}[\tilde{U}(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] = 0; \quad (6)$$

$$i = \overline{1, m}; j = \overline{1, 2},$$

где

$$\tilde{\varphi}(\xi, \tau) = \varphi(\xi, \tau) - u_{\tau\tau}(\xi, \tau) - L[u(\xi, \tau)] - \varepsilon_1 L_1[u(\xi, \tau)];$$

$$\tilde{\Phi}_0(\xi) = \Phi_0(\xi) - u(\xi, 0); \tilde{\Phi}_1(\xi) = \Phi_1(\xi) - u_\tau(\xi, 0).$$

Для получения задач с единственной неоднородностью либо в уравнении, либо в начальном условии, введем в задачу (4) – (6) новую функцию

$$\tilde{U}(\xi, \tau) = V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau). \quad (7)$$

где

$$V(\xi, \tau)_{\tau\tau} + L[V(\xi, \tau)] + \varepsilon_1 L_1[V(\xi, \tau)] = 0; \quad (8)$$

$$V(\xi, 0) = \tilde{\Phi}_0(\xi); V_\tau(\xi, 0) = \tilde{\Phi}_1(\xi); \quad (9)$$

$$Y_{ji}[V(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] = 0; \quad (10)$$

$$i = \overline{1, m}; j = \overline{1, 2},$$

а функция $H(\xi, \tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$H(\xi, \tau)_{\tau\tau} + L[H(\xi, \tau)] + \varepsilon_1 L_1[H(\xi, \tau)] = \tilde{\varphi}(\xi, \tau); \quad (11)$$

$$H(\xi, 0) = 0; H_\tau(\xi, 0) = 0; \quad (12)$$

$$Y_{ji}[H(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] = 0; \quad (13)$$

$$i = \overline{1, m}; j = \overline{1, 2}.$$

Согласно методу Дюамеля [26] решение задачи (11) – (13) имеет вид

$$H(\xi, \tau) = \int_0^\tau z(\xi, \tau - \tau_0, \tau_0) d\tau_0,$$

где $z(\xi, \tau, \tau_0)$ – решение импульсной задачи

$$z(\xi, \tau)_{\tau\tau} + L[z(\xi, \tau)] + \varepsilon_1 L_1[z(\xi, \tau)] = 0; \quad (14)$$

$$z(\xi, 0) = 0; z_\tau(\xi, 0) = \tilde{\varphi}(\xi, \tau_0); \quad (15)$$

$$Y_{ji}[z(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] = 0. \quad (16)$$

В качестве примера рассмотрим вынужденные продольные колебания вязкоупругого стержня, изменение длины которого происходит на свободном конце (например, стержень выдвигается со скоростью v_0). Если затухание поперечных колебаний обусловлено, главным образом, действием внешних демпфирующих сил, то в случае продольных колебаний основное влияние на затухание оказывают упругие несовершенства материала колеблющегося объекта.

Дифференциальное уравнение (вязкоупругость учитывается на основе гипотезы Фойгта), имеет вид [1]

$$Z_{tt}(x,t) - a^2[Z_{xx}(x,t) + \mu Z_{xxt}(x,t)] = f(x,t). \quad (17)$$

Начальные условия

$$Z(x,0) = \psi_0(x); \quad Z_t(x,0) = \psi_1(x). \quad (18)$$

Граничные условия системы

$$Z(0,t) = f_1(t); \quad Z_x(l_0(v_0t),t) = f_2(t). \quad (19)$$

В задаче (17) – (19) обозначено: $Z(x,t)$ – продольное смещение точки с координатой x в момент времени t ; $a = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольных волн в стержне; E – длительный модуль упругости материала стержня; ρ – линейная плотность массы; μ – малый параметр, учитывающий вязкоупругость; $l_0(v_0t) = L_0 - v_0t$ – закон движения границы; $f(x,t)$ – заданная функция класса C^1 ; $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ – заданные функции класса C^2 .

Введем в задачу (17) – (19) безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{\omega_0}{a} x; \quad \tau = \omega_0 t + \varphi_0; \quad \varphi_0 = -\frac{\omega_0 L_0 - a}{v_0}; \quad Z(x,t) = U(\xi, \tau),$$

где ω_0 – постоянная величина.

После преобразований получим:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \varepsilon_1 U_{\xi\xi\tau}(\xi, \tau) = \varphi(\xi, \tau); \quad (20)$$

$$U(\xi, 0) = \Phi_0(\xi); \quad U_\tau(\xi, 0) = \Phi_1(\xi); \quad (21)$$

$$U(0, \tau) = F_1(\tau); \quad U_\xi(l(\varepsilon_0 \tau), \tau) = F_2(\tau), \quad (22)$$

где

$$\varepsilon_1 = \mu\omega_0; \quad l(\varepsilon_0 \tau) = 1 + \varepsilon_0 \tau; \quad \varepsilon_0 = -v_0 / a; \quad \varphi(\xi, \tau) = \frac{1}{\omega_0^2} f\left(\frac{a}{\omega_0} \xi; \frac{\tau - \varphi_0}{\omega_0}\right);$$

$$\Phi_0(\xi) = \psi_0\left(\frac{a}{\omega_0} \xi\right); \quad \Phi_1(\xi) = \psi_1\left(\frac{a}{\omega_0} \xi\right); \quad F_1(\tau) = f_1\left(\frac{\tau - \varphi_0}{\omega_0}\right); \quad F_2(\tau) = f_2\left(\frac{\tau - \varphi_0}{\omega_0}\right).$$

Следуя описанной выше методике, получим

$$\tilde{U}_{\tau\tau}(\xi, \tau) - \tilde{U}_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \varepsilon_1 \tilde{U}_{\xi\xi\tau}(\xi, \tau) = \tilde{\varphi}(\xi, \tau); \quad (23)$$

$$\tilde{U}(\xi, 0) = \tilde{\Phi}_0(\xi); \quad \tilde{U}_\tau(\xi, 0) = \tilde{\Phi}_1(\xi); \quad (24)$$

$$\tilde{U}(0, \tau) = 0; \quad \tilde{U}_\xi(l(\varepsilon_0 \tau), \tau) = 0, \quad (25)$$

где функция $\tilde{U}(\xi, \tau)$ имеет вид (7).

Функция $V(\xi, \tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) - V_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \varepsilon_1 V_{\xi\xi\tau}(\xi, \tau) = 0; \quad (26)$$

$$V(\xi, 0) = \tilde{\Phi}_0(\xi); \quad V_\tau(\xi, 0) = \tilde{\Phi}_1(\xi); \quad (27)$$

$$V(0, \tau) = 0; \quad V_\xi(l(\varepsilon_0\tau), \tau) = 0, \quad (28)$$

Для решения задачи (26) – (28) воспользуемся методом Канторовича–Галеркина [9, 10, 15, 19, 23]. Решение будем искать в виде

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon_0\tau). \quad (29)$$

Здесь $X_n(\xi, \varepsilon_0\tau) = \sin(\omega_{0n}(\varepsilon_0\tau)\xi)$, $\omega_{0n}(\varepsilon_0\tau) = \frac{\pi n - \pi/2}{l(\varepsilon_0\tau)}$ – собственные функции и собственные частоты задачи:

$$X_{n\xi\xi}(\xi, \varepsilon_0\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau) X_n(\xi, \varepsilon_0\tau) = 0; \quad (30)$$

$$X_n(0, \varepsilon_0\tau) = 0; \quad X_{n\xi}(l(\varepsilon_0\tau), \varepsilon_0\tau) = 0. \quad (31)$$

Подставляя n -ый член ряда (29) в уравнение (26) получим:

$$\begin{aligned} [f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon_0\tau)]_{\tau\tau} + \omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau) f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon_0\tau) + \\ + \varepsilon_1 \omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau) f_n'(\tau) X_n(\xi, \varepsilon_0\tau) = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Как и в [23], функцию $f_n(\tau)$ будем определять из условия ортогональности левой части уравнения (32) с функцией $X_n(\xi, \varepsilon_0\tau)$ на интервале $[0, l(\varepsilon_0\tau)]$. В этом случае будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_0^{l(\varepsilon_0\tau)} [f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon_0\tau)]_{\tau\tau} X_n(\xi, \varepsilon_0\tau) d\xi + \\ + A_{1n}(\varepsilon_0\tau) \omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau) f_n(\tau) + \varepsilon_1 A_{1n}(\varepsilon_0\tau) \omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau) f_n'(\tau) = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\text{где } A_{1n}(\varepsilon_0\tau) = \int_0^{l(\varepsilon_0\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon_0\tau) d\xi = \frac{l(\varepsilon_0\tau)}{2}.$$

Уравнение (33) с точностью до величин порядка малости ε_0^2 будет иметь вид

$$f_n''(\tau) + 2A_n(\varepsilon_0\tau) f_n'(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau) f_n(\tau) = 0, \quad (34)$$

где

$$A_n(\varepsilon_0\tau) = \frac{\varepsilon_0 A_{2n}(\varepsilon_0\tau)}{A_{1n}(\varepsilon_0\tau)} + \frac{\varepsilon_1 (\pi n - \pi/2)^2}{2 l^2(\varepsilon_0\tau)}, \quad (35)$$

$$\varepsilon_0 A_{2n}(\varepsilon_0 \tau) = \int_0^{l(\varepsilon_0 \tau)} X_{n_\tau}(\xi, \varepsilon_0 \tau) X_n(\xi, \varepsilon_0 \tau) d\xi = -\frac{\varepsilon_0 l'(\varepsilon_0 \tau)}{4}. \quad (36)$$

Заметим, что в работе [2] уравнение (34) имеет аналогичный вид:

$$l^2(\varepsilon \tau) f_k''(\tau) - \varepsilon l(\varepsilon \tau) f_k'(\tau) + (R - 1/2)^2 \pi^2 f_k(\tau) = 0.$$

Подставляя (36) в (35) получим

$$A_n(\varepsilon_0 \tau) = -\frac{\varepsilon_0 l'(\varepsilon_0 \tau)}{2l(\varepsilon_0 \tau)} + \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{(\pi n - \pi/2)^2}{l^2(\varepsilon_0 \tau)}.$$

Если ввести в уравнение (34) новую функцию

$$f_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon_0 \tau) y_n(\tau),$$

где

$$A_{0n}(\varepsilon_0 \tau) = \exp \left[-\int_0^\tau A_n(\varepsilon_0 \zeta) d\zeta \right] = \sqrt{l(\varepsilon_0 \tau)} \exp \left[-\int_0^\tau \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{(\pi n - \pi/2)^2}{l^2(\varepsilon_0 \zeta)} d\zeta \right],$$

то уравнение можно преобразовать так, что оно не будет содержать члена с $y_n'(\tau)$:

$$y_n''(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon_0 \tau) y_n(\tau) = 0.$$

Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям [23], для амплитуды колебаний, соответствующих n -ной динамической моде, получим следующее выражение:

$$A_n(\tau) = \frac{l(\varepsilon_0 \tau)}{\sqrt{\pi n - \pi/2}} \cdot e^{-\int_0^\tau \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{(\pi n - \pi/2)^2}{l^2(\varepsilon_0 \zeta)} d\zeta} * \left(D_n \cos \left(\frac{\pi n - \pi/2}{\varepsilon_0} \ln(1 + \varepsilon_0 \tau) \right) + E_n \sin \left(\frac{\pi n - \pi/2}{\varepsilon_0} \ln(1 + \varepsilon_0 \tau) \right) \right) \quad (37)$$

Решение задачи (26) – (28) имеет вид

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\omega_{0n}(\varepsilon_0 \tau) \xi) \cdot \frac{l(\varepsilon_0 \tau)}{\sqrt{\pi n - \pi/2}} \cdot e^{-\int_0^\tau \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{(\pi n - \pi/2)^2}{l^2(\varepsilon_0 \zeta)} d\zeta} * \left(D_n \cos \left(\frac{\pi n - \pi/2}{\varepsilon_0} \ln(1 + \varepsilon_0 \tau) \right) + E_n \sin \left(\frac{\pi n - \pi/2}{\varepsilon_0} \ln(1 + \varepsilon_0 \tau) \right) \right),$$

где постоянные D_n, E_n определяются из начальных условий (27).

Точное решение задачи (26) – (28) без учета вязкоупругости, полученное в [11], имеет вид:

$$V_\xi(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left\{ \frac{k_n}{2} [\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi)] \right\} *$$

$$\begin{aligned} & * \left(A_n^* \cos \left\{ \frac{k_n}{2} [\varphi(\tau + \xi) + \psi(\tau - \xi)] \right\} + B_n^* \sin \left\{ \frac{k_n}{2} [\varphi(\tau + \xi) + \psi(\tau - \xi)] \right\} \right); \\ & A_n^* = 4 \int_{-1}^0 r(\zeta) \cos(k_n \zeta) d\zeta; \quad B_n^* = 4 \int_{-1}^0 r(\zeta) \sin(k_n \zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Функция $H(\xi, \tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$H_{\tau\tau}(\xi, \tau) - H_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \varepsilon_1 H_{\xi\xi\tau}(\xi, \tau) = \tilde{\varphi}(\xi, \tau); \quad (38)$$

$$H(\xi, 0) = 0; \quad H_\tau(\xi, 0) = 0; \quad (39)$$

$$H(0, \tau) = 0; \quad H_\xi(l(\varepsilon_0 \tau), \tau) = 0, \quad (40)$$

Согласно методу Дюамеля [26] решение задачи (38) – (40) имеет вид

$$H(\xi, \tau) = \int_0^\tau \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\omega_{0n}(\varepsilon_0(\tau - \tau_0))\xi) \cdot \frac{1 + \varepsilon_0(\tau - \tau_0)}{\sqrt{\pi n - \pi/2}} \cdot e^{-\int_0^{\tau - \tau_0} \frac{\varepsilon_1(\pi n - \pi/2)^2}{2(1 + \varepsilon_0\zeta)^2} d\zeta} \right. \\ \left. * \left(F_n \cos\left(\frac{\pi n - \pi/2}{\varepsilon_0} \ln(1 + \varepsilon_0(\tau - \tau_0))\right) + G_n \sin\left(\frac{\pi n - \pi/2}{\varepsilon_0} \ln(1 + \varepsilon_0(\tau - \tau_0))\right) \right) \right) d\tau_0,$$

где $\omega_{0n}(\varepsilon_0(\tau - \tau_0)) = \frac{\pi n - \pi/2}{1 + \varepsilon_0(\tau - \tau_0)}$, а постоянные F_n, G_n определяются из начальных условий (15).

Общее решение задачи (23) – (25) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\xi, \tau) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\omega_{0n}(\varepsilon_0 \tau) \xi) \cdot \frac{l(\varepsilon_0 \tau)}{\sqrt{\pi n - \pi/2}} \cdot e^{-\int_0^{\tau} \frac{\varepsilon_1(\pi n - \pi/2)^2}{l^2(\varepsilon_0 \zeta)} d\zeta} * \\ & * \left(D_n \cos\left(\frac{\pi n - \pi/2}{\varepsilon_0} \ln(1 + \varepsilon_0 \tau)\right) + E_n \sin\left(\frac{\pi n - \pi/2}{\varepsilon_0} \ln(1 + \varepsilon_0 \tau)\right) \right) + \\ & + \int_0^{\tau} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\omega_{0n}(\varepsilon_0(\tau - \tau_0)) \xi) \cdot \frac{1 + \varepsilon_0(\tau - \tau_0)}{\sqrt{\pi n - \pi/2}} \cdot e^{-\int_0^{\tau - \tau_0} \frac{\varepsilon_1(\pi n - \pi/2)^2}{(1 + \varepsilon_0 \zeta)^2} d\zeta} * \right. \\ & \left. * \left(F_n \cos\left(\frac{\pi n - \pi/2}{\varepsilon_0} \ln(1 + \varepsilon_0(\tau - \tau_0))\right) + G_n \sin\left(\frac{\pi n - \pi/2}{\varepsilon_0} \ln(1 + \varepsilon_0(\tau - \tau_0))\right) \right) \right) d\tau_0. \end{aligned}$$

В заключение отметим, что приведенные здесь результаты позволяют произвести исследования колебаний для систем, которые описывает задача (1) – (3).

Список литературы

1. *Горошко О. А., Савин Г. Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. - Киев: Наукова думка, 1971. - 270 с.
2. *Лежнева А.А.* Продольные колебания балки переменной длины: Ученые записки / А.А. Лежнева. – Пермь: Пермск. ун-т, 1966. – №156. – С. 133–142.
3. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
4. *Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е.* Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго-инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестник научно-технического развития. – 2013. - № 6 (70). – С. 18–29.
5. *Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П.* Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. - М.: Наука. Физматлит, 2002. - 208с.
6. *Асташев В.К., Крупенин В.Л.* Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 1998. - №5. - С.13-30.
7. *Крупенин В.Л.* О колебаниях струны, соударяющейся с ограничителем, состоящим из прямой и точки// Вестник научно-технического развития. - 2017. - №9 (121). - С.34-45.
8. *Самарин Ю.П.* Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 26, В. 3. – С. 77–80.
9. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2009. – 131 с.
10. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича–Галеркина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». – 2009. - №1 (18).- С. 149–158.
11. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». – 2012. - № 3 (28).- С.145–151.
12. *Литвинов В.Л.* Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. - Т. 15, № 3. – С. 112–119.
13. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». – 2009. - № 2 (19). – С. 147–152.
14. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Вычисление собственных частот поперечных колебаний вязкоупругого каната, движущегося в продольном направлении и имеющего изгибную жесткость // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2008. – 358 с.

15. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография. - Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 149 с.
16. Литвинов В.Л. Поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды // Вестник научно-технического развития. – 2015. - № 4 (92). — С. 29–33.
17. Анисимов В. Н., Литвинов В.Л. Вычисление собственных частот каната движущегося в продольном направлении // Журнал Средневолжского математического общества. — 2017. — Т. 19, № 1. — С. 130–139.
18. Литвинов В.Л. Продольные колебания каната переменной длины с грузом на конце // Вестник научно-технического развития. – 2016. - № 1 (101). — С. 19–24.
19. Литвинов В.Л. Применение метода Канторовича-Галеркина при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // Вестник научно-технического развития. – 2017. - № 2 (114). — С. 37–46.
20. Анисимов В. Н., Литвинов В.Л. Аналитический метод решения волнового уравнения с широким классом условий на движущихся границах // Вестник научно-технического развития. – 2016. - № 2 (102). — С. 28–35.
21. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Математические модели продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестн. Сам.гос. техн. ун-та. Сер. Физ-мат. Науки, 2015. Т. 19, №2. С. 382-397.
22. Анисимов В.Н. Продольные резонансные колебания вязкоупругого каната грузоподъемной установки // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. - 2016. - Т. 18, № 4-1. - С. 128-133.
23. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., Корпен И. В. Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. - 2018. - №2. - С. 70-77.
24. Смирнов В.И. Курс высшей математики, 4. – М.: Физматгиз, 1958.
25. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976. - 576 с.
26. Котляр Я.М. Методы математической физики и задачи гидроаэродинамики: [Учеб. пособие для втузов] / Я. М. Котляр. – М. : Высш. шк., 1991. – 207 с.
27. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. Изд. 5-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. – 192 с.

Дата поступления: 22 января 2019 г.

УДК 54-116:547-305.2:547-304.2

СОСТАВ И СВОЙСТВА КИСЛЫХ ГУДРОНОВ, НЕЙТРАЛИЗОВАННЫХ АМИНАМИ

© Елена Николаевна Федосеева

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (ННГУ),

Нижний Новгород, Россия

el.nik.fedosееva@gmail.com

Аннотация. Изучены особенности химического модифицирования аминами отхода второго класса опасности – кислого гудрона. В исследованиях ставилась цель разработать нетрудоемкий энергосберегающий способ утилизации кислого гудрона. Использовали кислый гудрон с невысоким содержанием кислот и амины, содержащие одну или несколько аминогрупп. Установлено, что избытком диэтаноламина или полиэтиленполиамина можно полностью нейтрализовать кислоты кислого гудрона. Показано, что основным отличием нейтрализации аминами в сравнении с использованием неорганических реагентов является сохранение у продукта реакции вязко-текучести. Установлено, что теплофизические и вязкостные свойства нейтрализованного органическими аминами кислого гудрона, охарактеризованные температурой размягчения и пенетрацией, соответствуют некоторым маркам битумов. Полученный продукт может быть использован в качестве связующего.

Ключевые слова: кислый гудрон, амин, нейтрализация, битумоподобное связующее, вязкостные свойства, вторичный материальный ресурс, энергосбережение.

THE COMPOSITION AND PROPERTIES OF ACID TARS NEUTRALIZED WITH AMINES

© E.N. Fedoseeva

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (UNN),

Nizhnij Novgorod, Russia

el.nik.fedosееva@gmail.com

Annotation. The features of chemical modification of waste of the second class of danger – acid tar by amines are studied. The aim of the research was to develop a not laborious energy-saving method of acid tar utilization. Acid tar with a low content of acids and amines containing one or more amino groups was used. It was found that the excess of diethanolamine or polyethylene polyamine completely neutralizes acid from acid tar. It is shown that the main difference neutralization with amines in comparison with the using of inorganic reagents is the preservation of the viscous-flow properties of the product. It was found that the thermophysical and viscous properties of the acid tar neutralized with organic amines, characterized by the softening temperature and penetration, correspond to some brands of bitumen. The resulting product can be used as a binder.

Keywords: *acid tar, amine, neutralization, bituminous binder, viscosity properties, secondary material resource, energy saving.*

Метод очистки нефтепродуктов и отработанных масел серной кислотой создает экологические проблемы [1], которые связаны с тем, что после отделения целевого продукта остается значительное количество отходов – так называемого кислого гудрона. Кислые гудроны, несмотря на многочисленные попытки найти рациональный способ их утилизации, практически не перерабатываются и просто сбрасываются в открытые пруды-накопители. Такие пруды существуют на ряде нефтеперерабатывающих заводов в городах Ярославле, Нижнем Новгороде, Хабаровске, Омске, Уфе, Салавате и других. Например, в 17 прудах-накопителях ОАО «Славнефть-НПЗ им. Д.И. Менделеева» (г. Ярославль) храниться около 500 тыс. тонн кислых гудронов. Пруды расположены в непосредственной близости от Волги и создают опасность загрязнения бассейна реки [2]. Аналогичным образом кислые гудроны складировались в Великобритании, Германии, США, Бельгии, Голландии, Китае и некоторых странах СНГ [3-5].

Кислые гудроны отнесены к отходам второго класса опасности по воздействию на окружающую среду. Они представляют собой многокомпонентные дисперсные системы. Обычно это густая, вязкая жидкость, характеризующаяся большой коррозионной агрессивностью и химической активностью. Хранение их открытым способом сопровождается закислением почв, что неблагоприятно отражается на состоянии флоры и фауны. Окислительно-восстановительные процессы, протекающие при длительном хранении кислых гудронов, влекут за собой выделение диоксида серы, что в свою очередь загрязняет воздушный бассейн, сказывается на состоянии поверхностных и грунтовых вод [6].

Альтернативные способы захоронения кислых гудронов в виде нейтрализованной массы [7, 8] также не идеальны: внесение неорганических нейтрализующих реагентов увеличивает массу отхода, не обеспечивая полной иммобилизации опасных компонентов. Тем не менее, на практике традиционный вариант кислотно-контактной очистки до сих пор достаточно широко применяют во многих странах мира. Данный факт можно объяснить лишь экономической выгодой. И если первичная переработка нефти в основном осуществляется по более современным ресурсосберегающим технологиям, то доля установок очистки отработанных масел серной кислотой достигает 60%. [9]

Кислые гудроны можно разделить на два вида: с большой массовой долей серной кислоты (более 50 %) или с высоким содержанием (более 50 %) органической массы. В так называемых прудовых кислых гудронах массовая доля свободной серной кислоты обычно составляет 5–8 %. Органическая часть включает углеводороды, эфиры, спирты, кетоны, сульфо- и карбоновые кислоты, сульфоны и другие сернистые соединения, смолы, асфальтены, карбены, карбоиды [1-3]. То есть, прудовые кислые гудроны содержат значительное количество органических соединений, которые могут рассматриваться как вторичные материальные ресурсы. Они могут быть применены, например, в составе дорожных и строительных битумов [10-12], при производстве кокса, активированного угля, ПАВ, резинобитумных мастик, топливных брикетов [13] и других продуктов. Однако, сложный, изменяющийся при хранении химический состав КГ, высокая реакционная способность и коррозионная активность представляют проблему и не позволяют разработать единый универсальный способ его переработки. В [1] представлен обзор известных способов утилизации кислых гудронов и выявлены сопутствующие каждому способу проблемы. Так показано, что ряд методик приводит к потере ценного сырьевого ресурса кислых гудронов, а понижение класса опасности ведет к увеличению общего объема не утилизируемых отходов.

Часть методик [1, 14] предполагает большие затраты энергии. Следовательно, разработка эффективных способов утилизации кислых гудронов не теряет актуальности.

Цель данной работы – исследовать особенности взаимодействия кислого гудрона с органическими аминами и изучить применимость данного способа для превращения кислого гудрона в битумоподобный материал в нетрудоемком энергосберегающем процессе.

Известно, что при добавлении в кислый гудрон нейтрализующих реагентов, таких как буроугольная зола, известь, кислоты кислого гудрона связываются, превращаясь в соли. Однако при этом сильно изменяются физико-химические свойства продукта, например, вязко-текучесть и пластичность. Подобные продукты непригодны для использования в качестве битумоподобных вяжущих материалов. Но и захоронение их также не может считаться надежным, поскольку со временем нейтрализованный минеральными компонентами кислый гудрон выделяет органические составляющие.

Мы исходили из предположения, что при нейтрализации аминами кислый гудрон сохранит свои вязко-пластические свойства, что позволит использовать его в качестве битумоподобного вяжущего материала. Для исследований был использован кислый гудрон, взятый из пруда, расположенного на 21 км автотрассы Нижний Новгород – Москва. Групповой состав органической части данного кислого гудрона установлен ранее [1, 15]. Содержание воды в кислом гудроне определяли по методу Дина-Старка (ГОСТ 2477-65) и рассчитывали по формуле: $x = (V_{\text{воды}} \times 100) / m$, где x (%) – содержание воды в образце, $V_{\text{воды}}$ – объем воды (мл), выделившийся в приемнике, m – масса кислого гудрона (г). Суммарное содержание кислот в исследуемых образцах характеризовали кислотным числом (К.ч.), которое устанавливали титрованием их растворов в спирто-бензольной смеси (40/60 об.%), содержащей индикатор щелочной голубой, спиртовым раствором едкого кали. К.ч. определяли по формуле: $\text{К.ч.} = V_{\text{кон}} \times T / m$, где $T = 22 \text{ мг/см}^3$, m – масса образца (г), $V_{\text{кон}}$ – объем титранта (мл).

Состав органической части кислого гудрона и содержание воды в нем представлены в таблице. Кислотность исходного образца кислого гудрона была невелика: кислотное число (К.ч.) равно 23 мг КОН/г кислого гудрона, что соответствует 2.0 % кислот в пересчете на H_2SO_4 .

Таблица. Состав прудового кислого гудрона

Компонент	Содержание в % мас.
Парафино-нафтеновые углеводороды	9.7±0.1
Ароматические углеводороды	12.0±0.1
Смолы	16.9±0.2
Асфальтены	43.1±0.4
Карбены, карбоиды	7.3±0.1
Вода	10.7±0.1

Для модифицирования кислого гудрона было использовано два амина – полиэтиленполиамин (ПЭПА) и диэтаноламин (ДЭА). Выбранные амины отличаются молекулярной массой и характером аминогрупп: ДЭА – вторичный моноамин, в составе ПЭПА имеются и вторичные, и концевые первичные аминогруппы. Таким образом, предполагалось, что механизм взаимодействия аминов с кислотами, входящими в состав кислого гудрона, для обоих реагентов близок. Однако свойства продуктов-реакции должны отличаться. Ожидаемые различия связаны с тем, что одна молекула ПЭПА, в отличие от ДЭА, способна одновременно связывать несколько кислотных остатков, выполняя, таким образом, роль сшивающего агента.

Данные по кислотности позволяют рассчитать стехиометрическое количество ДЭА по отношению к суммарному количеству кислот кислого гудрона. Оно составило 3.9 г ДЭА/100 г кислого гудрона. Стехиометрическое количество ПЭПА рассчитывали по результатам определения аминного числа (А.ч.), которое устанавливали титрованием раствора амина в спирте 0.5 М раствором HCl в присутствии бромкрезолового зеленого. А.ч. в мг HCl/г определяли по формуле: $A.ч. = 36.5 V_{HCl} \times C_{HCl} / m$, где V_{HCl} – объем титранта (мл), C_{HCl} – концентрация HCl (г/моль), 36.5 – молекулярная масса HCl; m – масса ПЭПА (г). А.ч. составило 529.5 мг HCl/г ПЭПА. А стехиометрическое количество ПЭПА, таким образом, составило 2.6 г ПЭПА/100 г кислого гудрона.

При приготовлении смесей кислого гудрона с аминами использовали как избыточное, так и недостаточное по сравнению со стехиометрическим количество нейтрализующих агентов. Реакцию проводили следующим образом: к навеске кислого гудрона добавляли при механическом перемешивании определенное количество амина. Смешивание проводили при комнатной температуре. Следует отметить, что нейтрализация происходит с высокой скоростью и сопровождается заметным разогревом. Выделение тепла вызывает снижение вязкости реакционной массы, это способствует более легкому и равномерному распределению реагентов по всему объему.

Полноту нейтрализации кислот аминами во всех случаях проверяли титрованием продуктов реакции. Результаты определения содержания кислот в результирующих составах, полученных при комнатной температуре, в зависимости от количества введенного амина приведены на рисунке 1 (кривые 1, 2). Из рисунка видно, что при введении в кислый гудрон как ДЭА, так и ПЭПА кислотное число падает. Однако полной нейтрализации не наблюдается даже при избыточном количестве аминов. При эквимольном соотношении кислот кислого гудрона и амина нейтрализуется меньше половины от всего содержания кислот.

Рис. 1. Зависимость кислотного числа (К.ч., мг КОН/г) модифицированного аминами кислого гудрона от количества v_a амина, взятого на 1 моль кислот (моль/моль) кислого гудрона. 1 – для ПЭПА, 2 – для ДЭА, 3 – для составов с ПЭПА, прогретых при $T \sim 100^\circ\text{C}$. Сравнение эффективности нейтрализации выбранными аминами показывает, что ПЭПА (рис. 1, кривая 1) при одних и тех же молярных соотношениях кислот кислого гудрона и

амин более эффективно нейтрализует кислоты, чем ДЭА (рис. 1, кривая 2). Мы связываем это с наличием в ПЭПА более реакционно-способных, более доступных первичных аминогрупп.

Для того чтобы установить, насколько температура, при которой проводится нейтрализация, оказывает влияние на полноту взаимодействия аминов с кислотами кислого гудрона, нейтрализованные при комнатной температуре составы с ПЭПА термостатировали в течение 30 мин. при $T=100^{\circ}\text{C}$ при постоянном перемешивании. Данные по кислотности образцов, подвергавшихся дополнительному нагреву, также приведены на рисунке 2 (кривая 3). Сравнение кривых 1 и 3 показывает, что дополнительная термическая обработка действительно приводит к более полному расходованию амина. Так при четырехкратном избытке ПЭПА кислоты кислого гудрона полностью нейтрализуются.

Известно, что при температурах $\sim 80-120^{\circ}\text{C}$ серная и сульфокислоты, обуславливающие кислотность кислых гудронов, не подвергаются разложению [15]. Следовательно, снижение кислотности при более высокой температуре проведения реакции действительно происходит за счет более полного взаимодействия реагентов, а образующиеся при нейтрализации соединения устойчивы в исследованном температурном интервале.

Вывод о термической устойчивости продуктов взаимодействия аминов с кислотами кислого гудрона важен с точки зрения перспектив дальнейшей их переработки, например, для использования в качестве вяжущих материалов. Так рабочие температуры приготовления асфальто-бетонных смесей на основе битумов обычно составляют $80-150^{\circ}\text{C}$. В этом случае нагрев будет способствовать более полной нейтрализации кислот непосредственно в технологическом процессе, что позволяет исключить необходимость термической обработки на стадии нейтрализации.

Пригодность полученных образцов для использования в качестве вяжущего проверяли температурой размягчения по методу кольца и шара ($T_{\text{КиШ}}$) и пенетрацией. $T_{\text{КиШ}}$ ($^{\circ}\text{C}$) определяли на аппарате для определения температуры размягчения нефтебитумов КиШ-20 по методике, соответствующей ГОСТ 11506-73. Величину пенетрации (0.1мм) образцов устанавливали на аппарате для определения пенетрации нефтебитумов ПН-20Б по методике, соответствующей ГОСТ 11501-78. Выбранные параметры являются обязательными, внесенными в ГОСТ для всех марок битумов.

Показателем изменения тепло-физических свойств изучаемых композиций является $T_{\text{КиШ}}$. На рисунках 2, 3 представлены результаты определения температуры размягчения составов с ДЭА и термически обработанных составов с ПЭПА в зависимости от количества введенного амина (рис. 2), от кислотного числа модифицированного состава (рис. 3). Видно, что при введении амина в кислый гудрон $T_{\text{КиШ}}$ изменяется экстремально, проходя через минимум. Причем следует отметить, что положения минимумов не совпадают при сравнении кислотных чисел составов с ПЭПА и ДЭА, но если сравнивать молярные соотношения амин/кислый гудрон (рисунок 2), то минимумы $T_{\text{КиШ}}$ примерно соответствуют составам со стехиометрическим соотношением реагентов.

Для тех же самых составов определяли показатель пенетрации, по которому оценивали влияние нейтрализации аминами на вязкостные свойства модифицированного кислого гудрона (рис. 4). Из рисунка видно, что пенетрация вначале, при добавлении небольших количеств амина, растет с увеличением их содержания. Причем в случае с ДЭА этот рост гораздо более резкий, чем для ПЭПА. Рост пенетрации достигает 200%.

Рис. 2. Зависимость $T_{киш}$ (°C) модифицированного аминами кислого гудрона от количества v_a амина, взятого на 1 моль кислот (моль/моль) кислого гудрона. 1 – для ПЭПА, 2 – для ДЭА

Рис. 3. Зависимость $T_{киш}$ (°C) модифицированного аминами кислого гудрона от кислотного числа (К.ч., мг КОН/г). 1 – для ПЭПА, 2 – для ДЭА

Дальнейшее увеличение содержания амина мало сказывается на пенетрации, хотя можно отметить некоторую тенденцию к ее уменьшению. Данный вид зависимости согласуется с экстремальным видом зависимости температуры размягчения от количества вводимого амина: чем ниже температура размягчения, тем выше пенетрация. Более резкий вид зависимостей температуры размягчения и пенетрации от количества вводимого амина в случае с ДЭА можно интерпретировать следующим образом. Амины, нейтрализуя кислоты кислого гудрона, изменяют строение дисперсной системы. Однако в случае реакции с ПЭПА оно сопровождается заметным увеличением молекулярной массы продуктов. Последнее обстоятельство компенсирует резкое снижение вязкости продукта.

Рис. 4. Зависимость пенетрации P (0.1 мм) модифицированного аминами кислого гудрона от количества v_a амина, взятого на 1 моль кислот (моль/моль) кислого гудрона. 1 – для ПЭПА, 2 – для ДЭА

Таким образом, экспериментально показано, что вязко-пластические свойства кислых гудронов при их обработке органическими аминами не ухудшаются, в отличие от нейтрализации традиционно используемыми неорганическими реагентами. Нейтрализованные аминами кислые гудроны по показателям $T_{киш}$ и пенетрации пригодны для использования в качестве вяжущих материалов.

Выводы

1. Предложен метод утилизации отхода второго класса опасности для окружающей среды кислого гудрона, заключающийся в нейтрализации входящих в его состав кислот органическими аминами. Преимуществами исследованного процесса являются техническая простота его реализации, энергоэффективность, безотходность.
2. Образующийся продукт по своим вязко-пластическим свойствам пригоден для использования в качестве битумоподобного вяжущего.
3. К недостаткам метода следует отнести более высокую стоимость нейтрализующих реагентов по сравнению с неорганическими. В связи с этим процесс может быть рекомендован только для кислых гудронов с невысоким содержанием кислот.

Список литературы

1. Жебрыков Е.В., Зорин А.Д., Занозина В.Ф., Федосеева Е.Н., Гущина Е.А. Экологические и технологические аспекты переработки кислых гудронов // Проблемы региональной экологии. - 2013. - № 2. - С. 163—171.
2. Яманина Н.С., Фролова Е.А., Филиппова О.П., Тимрот С.Д., Макаров В.М. Утилизация нефтемаслоотходов машиностроительных и нефтеперерабатывающих предприятий // Экология и промышленность России. - 2001. - № 10. - С. 13—15.
3. Nancarrow D.J., Slade N.J., Steeds J.E. Land Contamination: Technical Guidance on Special Sites. Acid Tar Lagoons // R&D Technical Report P5-042/TR/04. Research Contractor: WS Atkins Consultants Limited. Environment Agency. - 2001. - ISBN 1 85705 583 7

4. Danha C., Chihobo C.H., Musademba D., Simbi D.J., Kuipa P.K., Jonathan E. Characterization and utilization of acid tar waste from crude benzol processing for environmental sustainability // IOSR J. of Environ. Sci., Toxic. and Food Technol. - 2014. - V. 8, Is. 1, Ver. III. - P. 16—21. DOI:10.9790/2402-08131621.
5. Никитина А.А., Беляева А.С., Кунакова Р.В. Заиков Г.Е., Тунакова Ю.А. Опыт утилизации кислого гудрона в странах Европы и США // Вестник Казанского технологического университета. - 2013. – Т. 16, № 11. - С. 47—50.
6. Подавалов Ю.А. Экология нефтегазового производства. - М.: Инфра-Инженерия, 2010. - 416 с.
7. Евдокимов А. Ю., Фукс И. Г., Шебалина Т. Н., Багдасаров Л. Н. Смазочные материалы и проблемы экологии. - М.: ГУП Издательство «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина, 2000. - 424 с.
8. Пат. РФ 2186086 (опубл. 2001). Способ переработки кислых гудронов.
9. Зачиняев Я.В., Иванюк С.В., Титова Т.С. Критерии оценки воздействия отработанных масел на окружающую природную среду. Обзор технологий регенерации отработанных масел // NovaInfo.Ru. - 2011. - № 3. - С. 10—25.
10. Пат. РФ 2275408 (опубл. 2006). Способ получения битумного вяжущего из КГ.
11. Пат. РФ 2215772 (опубл. 2003). Способ получения строительного и кровельного битума.
12. Яманина Н.С., Фролова Е.А., Филиппова О.П., Тимрот С.Д., Макаров В.М. Утилизация отходов машиностроительных и нефтеперерабатывающих предприятий // Экология и промышленность России. - 2001. - № 11. - С. 13—15.
13. Мещеряков С.В., Хлебникова О.А. Новые технологии в решении экологических проблем нефтегазового комплекса // Защита окружающей среды в нефтегазовом комплексе. - 2005. - № 3. - С. 11-18.
14. Пат. РФ 2320701 (опубл. 2008). Способ нейтрализации кислого гудрона.
15. Колмаков Г.А., Занозина В.Ф., Каратаев Е.Н., Гришин Д.Ф., Зорин А.Д. Термический крекинг кислых гудронов в битумы как способ утилизации отходов нефтехимических производств // Нефтехимия. - 2006. - Т. 46, № 6. - С. 414—418.

Дата поступления: 28 января 2019 г.

УДК 536.21+537.311.3

ВЛИЯНИЕ АКСИАЛЬНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПРОВОДНИКА В ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

© Владимир Михайлович Шаповалов

Волжский политехнический институт (филиал) федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Волгоградского государственного технического университета», Волжский, Россия
svm24412@gmail.com

Аннотация. Поставлена и решена нестационарная задача о нагреве цилиндра конечной длины электрическим током. Цилиндр находится в адиабатических условиях и имеет место аксиальный тепловой поток к закреплённым концам цилиндра. Удельное электрическое сопротивление материала цилиндра зависит от температуры. Численный анализ математической модели показал существование предельного тока, который приводит к лавинообразному нарастанию температуры и «тепловому взрыву» проводника.

Ключевые слова: теплопроводность; краевая задача; электрический ток; проволока; температура; температурный коэффициент сопротивления; теплофизические свойства; критерий Померанцева; число Фурье.

EFFECT OF AXIAL HEAT CONDUCTION ON THE TEMPERATURE FIELD OF THE CONDUCTOR IN THE DC CIRCUIT

© V.M. Shapovalov

Volzhsky Polytechnical Institute (branch of) State Educational Institution of Higher Professional
Education «Volgograd State Technical University», Volzhsky, Russia
svm24412@gmail.com

Abstract. The non-stationary problem of heating a cylinder of finite length by an electric current has been posed and solved. The cylinder is in adiabatic conditions and there is an axial heat flow to the fixed ends of the cylinder. The electrical resistivity of the material of the cylinder depends on the temperature. Numerical analysis of the mathematical model showed the existence of a limiting current, which leads to an avalanche-like increase in temperature and a “thermal explosion” of the conductor.

Keywords: thermal conductivity; boundary problem; electricity; wire; temperature; temperature coefficient of resistance; thermo physical properties; Pomerantsev criterion; Fourier number.

Введение. Металлическая проволока, нагреваемая протекающим электрическим током, широко применяется как в технике, так и в научных исследованиях. Например, широко используются плавкие предохранители. Теория плавких предохранителей построена на элементарных уравнениях энергетического баланса (закон Джоуля-Ленца) без учёта продольной теплопроводности проводника. Между тем, в предохранителях часто используется проволока из меди, т.е. из металла, имеющего высокую теплопроводность.

Следует отметить, что разрушение проводника предохранителя за счёт перегрева происходит в середине, что указывает на влияние фактора осевой теплопроводности в окрестности заделок концов проводника.

Тонкие, нагреваемые током, проволоки широко применяются в научных исследованиях процессов теплопереноса с фазовым превращением [1], [2]. Для повышения локализации термического воздействия используются микронагреватели, например, размером 10×3 мкм [3]. В качестве материала для микронагревателей используется платина размером 100×10 мкм [4], 100×20 мкм [5], медь диаметром менее 5 мкм [6], никель [7]. Используются не только проволоки круглого сечения, но полоски субмикронного платинового нагревателя [8]. Для стабилизации температуры проволоки, а, следовательно, повышения достоверности экспериментальных результатов, используется ПИД – регулятор [9].

Нагретая проволока используется в анемометрах для исследования переходных режимов газовых потоков [10]. Отмечается, что при калибровке необходимо учитывать потери тепла в горячих опорах проволок.

Из имеющихся математических моделей следует отметить решение задачи для неограниченного цилиндра [11]. Однако авторы ограничились рассмотрением случая радиальной теплопроводности с граничным условием первого рода.

Цель настоящей работы состоит в выяснении влияния осевого оттока тепла к стенке на динамику процесса электрического нагрева проволоки.

Постановка задачи. Рассматривается короткий металлический проводник, по которому течёт электрический ток. Схема теплового нагружения представлена на рис.1,а. Концы проводника закреплены в высокотеплопроводных заделках, имеющих постоянную температуру. Теплообмен на боковой поверхности цилиндра не учитываем, тепловой поток одномерен. Внутри цилиндра имеет место равномерное объёмное тепловыделение от протекающего электрического тока постоянной величины. Выделяющееся тепло за счёт осевой теплопроводности отводится в заделку.

Рис.1. Схема теплового нагружения металлического цилиндра (а) и расчётная схема (б).

Ввиду одномерности теплового потока цилиндрический стержень может иметь произвольную форму поперечного сечения, например, круглую или прямоугольную. Площадь поперечного сечения постоянна по длине.

Согласно рис.1,а задача симметрична относительно среднего сечения цилиндра длиной ℓ . Общая длина цилиндра 2ℓ . Учитывая симметрию задачи, ограничимся рассмотрением левой

половины проводника длиной ℓ (рис.2,b). Площадь сечения цилиндра постоянная. Теплофизические свойства материала цилиндра однородны по объёму и не зависят от температуры. Интенсивность внутренних источников тепла постоянна и распределена равномерно по объёму цилиндра (протекающий электрический ток не изменяет свой величины). Начальная температура цилиндра и его торцов (заделок) $T=T_0$. Поперечный тепловой поток отсутствует, поскольку теплообмен на боковой поверхности пренебрежимо мал. На торцах цилиндра имеет место идеальный тепловой контакт.

Задача описывается уравнениями

$$\rho_+ C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + G, \quad (t > 0, \quad 0 < z < \ell) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} t=0, \quad T &= T_0, \\ z=0, \quad T &= T_0, \\ z=\ell, \quad \partial T / \partial z &= 0, \end{aligned}$$

где C , ρ_+ , λ – теплоёмкость, плотность и коэффициент теплопроводности материала цилиндра, $a = \lambda / (\rho_+ C)$ – коэффициент температуропроводности, t – время, z – продольная координата, T – температура, T_0 – начальная температура цилиндра и температура его торцов ($T_0 > 0$ °C), ℓ – половина длины проводника, G – плотность объёмных источников тепла,

Для внутреннего источника тепла характерны следующие соотношения: $G = w / (\ell S)$, $w = J^2 R$, $S = \pi R_1^2$, $R = \rho l / S$, где w – электрическая мощность, рассеиваемая проводником, S – площадь поперечного сечения, J – величина тока, R – электрическое сопротивление проводника, R_1 – радиус поперечного сечения цилиндрического проводника, ρ – удельное сопротивление. Удельное сопротивление линейно зависит от температуры $\rho = \rho_0(1 + \beta T)$, где ρ_0 – удельное сопротивление при $T = 0$ °C, β – температурный коэффициент сопротивления. Принимаем $J = \text{const}$.

Решение задачи. Введём безразмерные переменные и параметры

$$\zeta = \frac{z}{\ell}, \quad \theta = \frac{T}{T_0}, \quad Po = \frac{\ell^2 J^2 \rho_0}{\pi^2 R_1^4 \lambda T_0}, \quad D = \frac{\ell^2 J^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 R_1^4 \lambda}, \quad Fo = \frac{at}{\ell^2}. \quad (2)$$

где Po – критерий Померанцева для постоянного тока, Fo – число Фурье, θ – безразмерная температура ($T_0 > 0$), ζ – безразмерная продольная координата. Имеет место соотношение $D = Po T_0 \beta$.

В безразмерной форме краевая задача имеет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} + D\theta + Po, \quad (Fo > 0, \quad 0 < \zeta < 1) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} Fo=0, \quad \theta &= 1, \\ \zeta=0, \quad \theta &= 1, \\ \zeta=1, \quad \partial \theta / \partial \zeta &= 0. \end{aligned}$$

Решение задачи (3) можно представить в виде суммы функций [12]

$$\theta = V(\zeta) + W(\zeta, Fo), \quad (4)$$

где функция $V(\zeta)$ определяет установившееся распределение температуры и находится как решение следующей задачи

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{d\zeta^2} + DV + Po &= 0, & (0 < \zeta < 1) & \quad (5) \\ \zeta = 0, & \quad \theta = 1, \\ \zeta = 1, & \quad d\theta/d\zeta = 0. \end{aligned}$$

Решение неоднородного линейного уравнения (5) имеет вид

$$V = \left(1 + \frac{Po}{D}\right) \frac{\cos[\sqrt{D}(1-\zeta)]}{\cos(\sqrt{D})} - \frac{Po}{D}, \quad D \neq 0. \quad (6)$$

Максимальная температура $\theta_{\max}$ в сечении стержня $\zeta=1$ составляет

$$\theta_{\max} = V|_{\zeta=1} = \left(1 + \frac{Po}{D}\right) \frac{1}{\cos(\sqrt{D})} - \frac{Po}{D}, \quad D \neq 0. \quad (7)$$

Решение для случая $D \rightarrow 0$ может быть непосредственно получено из уравнений (5), либо из выражения (6) путём асимптотического представления тригонометрических функций. В случае $D=0$ установившееся распределение температуры описывается параболой $\theta = 1 + Po(\zeta - 0,5\zeta^2)$.

Из выражений (6), (7) видно, что установившаяся температура неограниченно возрастает при $\sqrt{D} \rightarrow \pi/2$. Действительно, согласно уравнениям энергии (3) и (5) имеем систему с положительной обратной связью; с повышением температуры увеличивается интенсивность тепловыделения.

Для определения функции $W(\zeta, Fo)$ с учётом уравнений (3)-(6), приходим к следующим уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial Fo} &= \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} + DW + Po_i, & (Fo > 0, \quad 0 < \zeta < 1) & \quad (8) \\ Fo=0, & \quad W = 1 + \frac{Po}{D} - \left(1 + \frac{Po}{D}\right) \frac{\cos[\sqrt{D}(1-\zeta)]}{\cos(\sqrt{D})}, \\ \zeta = 0, & \quad W=0, \\ \zeta = 1, & \quad \partial W/\partial \zeta = 0. \end{aligned}$$

Частное решение задачи (8) ищется в виде произведения двух функций [12]

$$W = f(Fo)\varphi(\zeta). \quad (9)$$

Если подставить решение (9) в уравнение (8), получим систему уравнений:

$$f' = -\chi^2 f, \quad \varphi'' + (D + \chi^2)\varphi = 0.$$

Решения этих уравнений имеют вид:

$$f = \exp(-\chi^2 Fo), \quad \varphi = A \sin(\sqrt{D + \chi^2} \zeta) + B \cos(\sqrt{D + \chi^2} \zeta).$$

Из граничного условия $\zeta=0$, $W=0$ следует $B=0$. Согласно последнему граничному условию в (8) можем записать $\exp(-\chi^2 Fo) \cos(\sqrt{D + \chi^2}) = 0$. Отсюда следует

$$\sqrt{D + \chi^2} = (2n+1) \frac{\pi}{2}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Общее решение будет суммой всех частных решений (9)

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} \zeta \right] \exp \left\{ - \left[(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} - D \right] Fo \right\}. \quad (10)$$

Постоянные A_n найдём из начального условия в (8)

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} \zeta \right] = 1 + \frac{Po}{D} - \left(1 + \frac{Po}{D} \right) \frac{\cos \left[\sqrt{D} (1 - \zeta) \right]}{\cos(\sqrt{D})}.$$

Учитывая ортогональность собственных функций, можем записать

$$\begin{aligned} A_n \int_0^1 \sin^2 \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} \zeta \right] d\zeta = \\ = \int_0^1 \left\{ 1 + \frac{Po}{D} - \left(1 + \frac{Po}{D} \right) \frac{\cos \left[\sqrt{D} (1 - \zeta) \right]}{\cos(\sqrt{D})} \right\} \sin \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} \zeta \right] d\zeta. \end{aligned}$$

Выполнив интегрирование, после несложных преобразований, находим коэффициенты Фурье

$$A_n = - \frac{16(D + Po)}{\pi(2n+1) \left[\pi^2 (2n+1)^2 - 4D \right]}. \quad (11)$$

С учётом выражений (16), (17), (20), (21) можем окончательно записать для безразмерной температуры

$$\begin{aligned} \theta = \left(1 + \frac{Po}{D} \right) \frac{\cos \left[\sqrt{D} (1 - \zeta) \right]}{\cos(\sqrt{D})} - \frac{Po}{D} - \\ - \frac{16(D + Po)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} \zeta \right]}{(2n+1) \left[\pi^2 (2n+1)^2 - 4D \right]} \exp \left\{ - \left[(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} - D \right] Fo \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

В сечении $\zeta=1$ безразмерная температура имеет максимум $\theta_{\max} = \theta(\zeta=1)$

$$\theta_{\max} = \left(1 + \frac{Po}{D} \right) \frac{1}{\cos(\sqrt{D})} - \frac{Po}{D} - \quad (13)$$

$$-\frac{16(D+Po)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \exp \left\{ - \left[(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} - D \right] Fo \right\}}{(2n+1) \left[\pi^2 (2n+1)^2 - 4D \right]}.$$

Ряды Фурье (12) и (13) имеют достаточно быструю сходимость. При этом решающий вклад в распределение температуры вносит нулевая мода ($n=0$). Как в (12), так и в (13) первое слагаемое правой части описывает установившееся распределение температуры. Из выражений (12), (13) следует, что функция температуры имеет особенность в точке $D=D_k=\pi^2/4$; бесконечный разрыв второго рода. Область определения параметра D , а, следовательно, и применимости полученного решения: $0 < D < D_k$. При приближении D к значению D_k температура возрастает неограниченно $\lim_{D \rightarrow D_k} \theta = \infty$. Кроме того, согласно

выражениям (12), (13) темп нагрева (скорость изменения температуры, показатель экспоненты нулевой моды $n=0$) снижается $\left[(1)^2 \frac{\pi^2}{4} - D \right] \rightarrow 0$, и достижение высокой

температуры требует значительного времени (больших чисел Фурье). Учитывая соотношение $D=PoTo\beta$, на критерий Померанцева также следует наложить ограничение $Po < D_k/(To\beta)$.

В отмеченной точке происходит как бы «тепловой взрыв» проводника. С физической точки зрения отмеченный эффект обусловлен температурной чувствительностью материала проводника: с увеличением температуры электрическое сопротивление растёт. Ток сохраняет постоянное (стабилизированное) значение, в результате нагревания сопротивление увеличивается, так же увеличивается выделяемая тепловая энергия. Имеем систему с положительной обратной связью; процесс напоминает автокаталитическую реакцию.

Численный анализ математической модели. В установившемся тепловом режиме ($Fo \gg 1$) выражения (12), (13) переходят в выражения (6), (7). Предварительно рассмотрим установившийся тепловой режим.

На рис.2 представлены расчётные распределения безразмерной температуры по длине стержня, выполненные с помощью выражения (6). Графики построены в полулогарифмической системе координат. Расчёты выполнены для $Po=1$. Видно, что с увеличением параметра D температура повышается. При этом тепловой поток к заделке проволоки ($\zeta=0$) увеличивается. Согласно рис.2 околокритическому значению $D=2,46$ отвечает максимальная безразмерная температура $\theta_{\max}=600$. Соответствующая размерная температура составляет $T=To\theta_{\max}=20 \times 600=12000$ °C. Такую температуру не выдержит даже вольфрам!

Рис.3 иллюстрирует асимптотическое поведение максимальной температуры от параметра D . Графики построены в полулогарифмической системе координат. Видно, что наиболее интенсивный рост температура имеет в окрестности критического значения параметра $D=2,467$.

Рис. 2. Распределение установившейся температуры при $Po=1$ и различных значениях параметра D : линии 1 отвечает $D=1$; 2 – 2; 3 – 2,46.

Рис. 3. Зависимость максимальной температуры от параметра D .

Рис. 4. Эволюция профиля температуры при $Po=18$ и $D=2,46$.

Рис. 5. Зависимость максимальной температуры от числа Фурье при $Po=18$ и различных значениях D .

На рис. 4 и рис. 5 представлены результаты численного анализа выражений, соответственно (12) и (13). Учитывались первые 20 членов ряда Фурье. Графики рис. 4 построены для значений параметров $Po=18$ и $D=2,46$. Состояние системы близко к критическому. Видно, что для достижения полного прогрева требуется значительное время ($Fo=10^3$). Градиент температуры в месте крепления ($\zeta=0$) со временем нарастает, увеличивается тепловой поток. На рис. 5 представлены кривые изменения максимальной температуры во времени при постоянном значении критерия Померанцева ($Po=18$) и различных значениях параметра D .

При малых D время температурной стабилизации мало, но оно значительно увеличивается при приближении параметра D к критическому значению. Так при $D=0,1$ стабилизация наступает после $Fo=1$, при $D=2$ после $Fo=10$, а при $D=2,46$ после $Fo=1000$.

Параметры Ro и D могут изменяться в достаточно широких пределах. Выполним численную оценку критического состояния никелевой проволоки при условиях: $\beta=0,0065 \text{ K}^{-1}$; $\rho_0=8,7 \times 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м}$; $\lambda=74 \text{ Вт/мК}$; $R_1=10^{-4} \text{ м}$; $\ell=10^{-2} \text{ м}$; $T_0=20 \text{ }^\circ\text{C}$. Согласно принятым обозначениям (2) ток, отвечающий «тепловому взрыву» ($D = \pi^2/4$), составляет

$$J = \frac{\pi^2 R_1^2}{2\ell} \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_0 \beta}} = 1,92 \text{ а.}$$

Для описываемых условий критерий Померанцева равен $Ro=18,96$.

Выводы. Получено аналитическое решение задачи нестационарной теплопроводности цилиндрического проводника, нагреваемого за счёт протекающего электрического тока. Электрическое сопротивление материала проводника зависит от температуры.

Анализ полученного решения показал, что рассматриваемая задача относится к системам с положительной обратной связью. Обнаружен режим «теплового взрыва», когда нагрев проводника способствует увеличению тепловыделения и его температура возрастает неограниченно. Указаны условия его проявления.

Список литературы

1. Lee D. J. Two-mode boiling on a horizontal heating wire: effects of liquid subcoolings//International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1998. - Vol. 41, Issue 19. - P. 2925-2928.
2. Mohammad Nasim Hasan. Model for boiling explosion during rapid liquid heating/Mohammad Nasim Hasan, Masanori Monde, Yuichi Mitsutake//International Journal of Heat and Mass Transfer. - 2011. - Vol. 54, Issues 13–14. - P. 2844-2853.
3. Peigang Deng. The growth and collapse of a micro-bubble under pulse heating/Peigang Deng, Yi-Kuen Lee, Ping Cheng//International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2003. - Vol. 46, Issue 21. - P. 4041-4050.
4. Glod S. An investigation of microscale explosive vaporization of water on an ultrathin Pt wire/ Glod S., Poulikakos D., Zhao Z., Yadigaroglu G//International Journal of Heat and Mass Transfer.- Vol. 45, Issue 2, January 2002. – P. 367-379
5. Jinliang Xu. Effect of pulse heating parameters on the microscale bubble dynamics at a microheater surface/ Jinliang Xu, Wei Zhang//International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2008. - Vol. 51, Issues 1–2. – P. 389-396
6. Ayako Ono. Liquid–vapor structure near heating surface at high heat flux in subcooled pool boiling/ Ayako Ono, Hiroto Sakashita//International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2007. - Vol. 50, Issues 17–18. - P. 3481-3489.
7. Grassmann P. Heat transfer from wire to subcooled and boiling water/ Grassmann P., Hauser I. J. //International Journal of Heat and Mass Transfer. - 1964. – Vol. 7, Issue 2. - P. 211-214.
8. Romera-Guereca G. Explosive vaporization and microbubble oscillations on submicron width thin film strip heaters/ Romera-Guereca G., Choi T. Y., Poulikakos D.// International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2008. - Vol. 51, Issues 17–18. - P. 4427-4438.

9. Zhukov S. A. Concerning the magnitude of the maximum heat flux and the mechanisms of superintensive bubble boiling/Zhukov S. A., Afanas'ev S. Yu., Echmaev S. B.//International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2003. - Vol. 46, Issue 18. - P. 3411-3427.
10. Eklund T. I. Application of the hot wire anemometer to temperature measurement in transient gas flows/ Eklund T. I., Dobbins R. A. //International Journal of Heat and Mass Transfer. 1977. - Vol. 20, Issue 10. - P. 1051-1058.
11. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. - М.: Химия, 1974. - 688с.
12. Лыков А.В. Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1967. - 600 с.

Дата поступления: 8 января 2019 г.