Вестник научно-технического развития Bulletin of Science and Technical Development

Номер 10 (134), октябрь 2018 г.

DOI: 10.18411/vntr2018-134

Издается с 2007 года

Издание зарегистрировано в Министерстве РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации Эл. № ФС77-29768.

ISSN 2070-6847

*Журнал выпускается под научным руководством Федерального государственного
бюджетного учреждения науки Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН*

ОГЛАВЛЕНИЕ № 10 (134), 2018

Артем Михайлович Антонов, Владимир Иванович Ерофеев. Возбуждение волн сосредоточенным источником, движущимся вдоль границы градиентно-упругого пространства.....стр. 3 – 21

Виталий Львович Крупенин. Об использовании моделей распределенных ударных элементов при моделировании вибрационных полей.....стр. 22 – 29

Лидия Ивановна Куксенова, Сергей Андреевич Поляков, Екатерина Михайловна Кулешова, Владимир Владимирович Лычагин, Ирина Анатольевна Хренникова. Влияние качества смазочного материала на показатели работоспособности червячных передач.....стр. 30 – 35

Анна Викторовна Леонтьева. Описание интенсивных изгибных волн в балке Тимошенко, лежащей на упругом основании, с помощью модифицированного эволюционного уравнения нелинейной волновой динамики.....стр. 36 – 41

Александр Анатольевич Шульженко, Михаил Борисович Модестов. Моделирование опытов Ф. Леру.....стр. 42 – 47

Издание зарегистрировано в Министерстве РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации Эл. № ФС77-29768.

ISSN 2070-6847

УДК 539.3

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН СОСРЕДОТОЧЕННЫМ ИСТОЧНИКОМ, ДВИЖУЩИМСЯ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ ГРАДИЕНТНО-УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

© Артем Михайлович Антонов, Владимир Иванович Ерофеев

Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» (ИПМ РАН), Нижний Новгород, Россия
artem.antonov@autorambler.ru, erof.vi@yandex.ru

Аннотация. В рамках математической модели градиентно-упругого континуума, т.е. среды, напряженно-деформированное состояние которой описывается тензором деформаций, вторыми градиентами вектора перемещений, несимметричным тензором напряжений и тензором моментных напряжений, рассматривается задача о генерации возмущений движущимся источником. Предполагается, что источник движется с постоянной скоростью вдоль границы полупространства. Задача рассматривается в двумерной постановке, когда все процессы однородны вдоль горизонтальной поперечной координатной оси. Вектор перемещений содержит две компоненты: продольную и вертикальную поперечную. В результате аналитических исследований показано, что движущийся источник будет генерировать волны, распространяющиеся вдоль границы полупространства и экспоненциально убывающие в его глубину. Такая волна, в отличие от классической поверхностной волны Рэлея, обладает дисперсией, поскольку ее фазовая скорость не является постоянной величиной, а зависит от частоты. Амплитуды перемещений изменяются в зависимости от величины нагрузки движущегося источника и его скорости.

Ключевые слова: градиентно-упругое полупространство, движущийся источник, поверхностная волна.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-19-01637).

EXCITATION OF THE WAVES BY A FOCUSED SOURCE, MOVING ALONG THE BORDER OF GRADIENT-ELASTIC HALF-SPACE

© A.V. Antonov, V.I. Erofeev

Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia
artem.antonov@autorambler.ru, erof.vi@yandex.ru

Abstract. Within the mathematical model of the gradient-elastic continuum, i.e. medium, the stress-strain state of which is described by the strain tensor, the second gradients of the displacement vector, the asymmetric stress tensor and the stress tensor, the problem of generating perturbations by a moving source is considered. It is assumed that the source moves at a constant velocity along the boundary of the half-space. The problem is considered in a two-dimensional formulation, when all the processes are homogeneous along the horizontal transverse coordinate axis. The displacement vector contains two components: longitudinal and vertical transverse. As a result of analytical studies it is shown that a moving source will generate waves propagating along the

boundary of a half-space and exponentially decreasing in its depth. Such a wave, unlike the classical Rayleigh surface wave, has dispersion, since its phase velocity is not a constant, but depends on the frequency. The amplitudes of displacements vary depending on the magnitude of the load of the moving source and its speed.

Keywords: *gradient-elastic half-space, moving source, surface wave.*

Acknowledgements. *The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 14-19-01637).*

Введение. В 1885 г. английский ученый лорд Рэлей теоретически показал, что вдоль плоской границы твердого упругого полупространства с вакуумом или достаточно разреженной средой (например, с воздухом) могут распространяться волны, амплитуда которых быстро спадает с глубиной [1]. Эти волны, названные впоследствии поверхностными волнами Рэля, являются основным типом волн, наблюдающимся при землетрясениях. Поэтому они подробно изучаются в сейсмологии [2].

Основные закономерности распространения рэлеевских волн следующие: отсутствие дисперсии, т.е. скорость волны не зависит от ее частоты и является постоянной для каждого материала; эта скорость достигает 0,87-0,96 от скорости объемной сдвиговой волны; вектор перемещений имеет продольную и поперечную составляющие, при этом поперечная составляющая всегда превосходит продольную.

В последние годы широкое применение нашли рэлеевские волны ультразвукового диапазона. При их помощи можно контролировать состояние поверхностного слоя образца (выявление поверхностных и около поверхностных дефектов в образцах из металла, стекла, пластмассы и других материалов - ультразвуковая поверхностная дефектоскопия). Влияние свойств поверхностного слоя образца на скорость и затухание рэлеевских волн позволяет использовать последнее для определения остаточных напряжений поверхностного слоя металла, термических и механических свойств поверхностного слоя образца [3,4].

Наряду с моделью классического континуума в механике деформируемого твердого тела широко применяются модели обобщенных континуумов [5-11].

К числу обобщенных континуумов принадлежит, в частности, градиентно-упругая среда. Появление этой модели относится к началу 20-го века и связано с именами Лёру (1911, 1913) [12,13] и Джеремилло (1929) [14].

К модели градиентно-упругой среды сводится и знаменитая модель континуума Коссера [15], когда в ней жестко зафиксирована зависимость вектора поворота от ротора перемещения (стесненное вращение) [16, 17].

Поверхностные волны Рэля в рамках градиентно-упругой модели практически не изучались. Исключение составляет работа [18], в которой, на основании проведенных исследований, утверждается, что скорость поверхностной волны в градиентно-упругой среде может превосходить скорость объемной сдвиговой волны.

В работе изучаются основные закономерности распространения волны Рэля вдоль границы градиентно-упругого полупространства, в частности, проверяется утверждение, содержащееся в [18]. Рассматривается задача о генерации поверхностной волны источником, движущимся на сверхскоростях вдоль границы градиентно-упругого полупространства, определяется зависимость амплитуды волны, конуса Маха от величины нагрузки источника и скорости его движения.

1.Основные уравнения градиентной теории упругости. Деформированное состояние градиентно-упругой среды описывается тензором деформаций и вторыми градиентами вектора перемещений

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right),$$

$$\chi_{klm} = - \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_m}, \quad (1)$$

При рассмотрении адиабатических процессов упругого деформирования необходимо постулировать зависимость внутренней энергии U от инвариантов мер деформации (1).

Разложим функцию U в окрестности естественного состояния ($\varepsilon_{kl} = 0, \chi_{klm} = 0$) в ряд Тейлора, пренебрегая величинами третьего порядка. Для изотропного однородного и центрально-симметричного тела получим разложение следующего вида [17]:

$$U = \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk}^2 + \mu \varepsilon_{ik}^2 + 2\mu L^2 (\chi_{klm}^2 + \tilde{v} \chi_{klm} \chi_{lkm}), \quad (2)$$

где λ и μ – упругие постоянные Ламе, L^2 – отношение модуля кривизны к модулю сдвига μ , имеющая размерность квадрата длины, $\tilde{v}$ – безразмерная константа, ρ – плотность среды.

В перемещениях векторное уравнение динамики градиентно-упругой среды имеет вид:

$$\rho \ddot{u}_i - (\lambda + \mu) \text{draddiv} \vec{u} - \mu \Delta \vec{u} + 4\mu L^2 \Delta (\Delta \vec{u} + \tilde{v} \text{graddiv} \vec{u}) = 0. \quad (3)$$

Легко видеть, что это уравнение содержит четвертый порядок производных по координатам, в отличие от классического уравнения Ламе, описывающего динамику деформируемого твердого тела, содержащего вторые производные по координатам.

2. Постановка и решение общей задачи распространения волн в градиентно-упругой среде. Рассмотрим упругое изотропное полупространство $y \geq 0$ (ограничимся двумерным случаем, когда все процессы однородны по оси z). Предположим, что поверхностная волна распространяется в направлении оси x .

Уравнения динамики, эквивалентные векторному уравнению (3), в двумерном случае запишутся в виде [18]:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4)$$

Здесь u – продольная, а v – поперечная компоненты вектора перемещений.

Будем считать, что на границе $y=0$ напряжения и моментные напряжения отсутствуют, т.е. граничные условия для системы уравнений (4) имеют вид [18]:

$$\sigma_{yy}|_{y=0} = 0, \quad \sigma_{yx}|_{y=0} = 0, \quad \sigma_{yz}|_{y=0} = 0, \\ \mu_y = 0, \quad (5)$$

Причем третье условие тождественно удовлетворяется в силу предположения о независимости деформаций от переменной z .

Компоненты тензора напряжений, входящие в (4), (5), связаны со смещениями u, v следующими соотношениями:

$$\sigma_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - L^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ \sigma_{yx} &= \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + L^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right].\end{aligned}\quad (6)$$

Легко видеть, что $\sigma_{xy} \neq \sigma_{yx}$.

Моментные напряжения μ_x и μ_y выражаются через u, v следующим образом:

$$\begin{aligned}\mu_x &= 2 \mu L^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \mu_y &= 2 \mu L^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (7)$$

Введем скалярный φ и векторный ψ потенциалы так, что вектор перемещений u запишется в виде [19]:

$$u = \nabla \varphi + \nabla * \psi \quad (8)$$

Поскольку перемещение не зависит от координаты z , у векторного потенциала будет отличной от нуля только компонента по оси z , эту компоненту обозначим через ψ .

С помощью (8) система (4) приводится к уравнениям

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (9)$$

$$\Delta(1 - L^2 \Delta) \psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (10)$$

где $c_1^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}$ – квадрат скорости продольной волны, $c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$ – квадрат скорости поперечной волны.

Их решение будем искать в виде волн, гармонических во времени и распространяющихся в направлении оси x :

$$\begin{aligned}\varphi &= A e^{\zeta y + i(\omega t - kx)} \\ \psi &= B e^{\eta y + i(\omega t - kx)}\end{aligned}\quad (11)$$

Амплитуды этих волн зависят от координаты y . Подставляя формулы (11) в (9), (10), получим уравнения для определения ζ и η :

$$\zeta^2 + \left(\frac{\omega}{c_1} \right)^2 - k^2 = 0 \quad (12)$$

$$L^2 \eta^4 - (1 + 2L^2 k^2) \eta^2 + \left[k^2 + L^2 k^4 - \left(\frac{\omega}{c_2} \right)^2 \right] = 0$$

Для того чтобы возмущения убывали от границы внутрь среды и соответствовали поверхностной волне, необходимо определить такие корни уравнений (12), чтобы ζ и η были положительными. В результате получим:

$$\zeta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega}{c_1} \right)^2}, \quad k^2 > \left(\frac{\omega}{c_1} \right)^2 \quad (13)$$

$$\eta_{1,2} = \sqrt{\frac{(1 + 2L^2k^2) \pm \sqrt{(1 + 2L^2k^2)^2 - 4L^2 \left[k^2 + L^2k^4 - \left(\frac{\omega}{c_2} \right)^2 \right]}}{2L^2}}$$

Тогда соотношения (11) будет иметь вид:

$$\varphi = Ae^{\zeta y + i(\omega t - kx)} \quad (14)$$

$$\psi = B_1 e^{\eta_1 y + i(\omega t - kx)} + B_2 e^{\eta_2 y + i(\omega t - kx)}$$

Перемещения u и v , напряжения σ_{yx}, σ_{yy} и моментное напряжение μ_y можно представить через потенциалы φ и ψ по формулам:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \sigma_{yy} &= \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \\ \sigma_{yx} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - L^2 \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) \right) \\ \mu_y &= -2 \mu L^2 \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя в (15) выражения (14) и используя граничные условия (5), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= Ae^{\zeta y + i(\omega t - kx)} (\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2) + 2B_1 \mu i k \eta_1 e^{\eta_1 y + i(\omega t - kx)} + 2B_2 \mu i k \eta_2 e^{\eta_2 y + i(\omega t - kx)} = 0, \\ \sigma_{yx} &= -2A \mu \zeta k i e^{\zeta y + i(\omega t - kx)} + B_1 \mu e^{\eta_1 y + i(\omega t - kx)} (k^2 + \eta_1^2 + 2\eta_1^2 k^2 L^2 - \eta_1^4 L^2 - k^4 L^2) + \\ &+ B_2 \mu e^{\eta_2 y + i(\omega t - kx)} (k^2 + \eta_2^2 + 2\eta_2^2 k^2 L^2 - \eta_2^4 L^2 - k^4 L^2) = 0, \\ \mu_y &= 2B_1 L^2 \eta_1 \mu e^{\eta_1 y + i(\omega t - kx)} (k^2 - \eta_1^2) + 2B_2 L^2 \eta_2 \mu e^{\eta_2 y + i(\omega t - kx)} (k^2 - \eta_2^2) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

представляющую собой однородную систему алгебраических уравнений для определения A , B_1 и B_2 . Эта система имеет решения, отличные от нуля, если ее определитель обращается в нуль

$$\eta_2 (\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2) (k^2 + \eta_1^2 + 2\eta_1^2 k^2 L^2 - \eta_1^4 L^2 - k^4 L^2) (k^2 - \eta_2^2) - \eta_1 (\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2) (k^2 + \eta_2^2 + 2\eta_2^2 k^2 L^2 - \eta_2^4 L^2 - k^4 L^2) (k^2 - \eta_1^2) + 2k^2 \zeta \eta_1 \eta_2 (\eta_2^2 - \eta_1^2) = 0 \quad (17)$$

Учитывая $\zeta = C_R^2 = \frac{\omega^2}{k^2 c_2^2}$, $\alpha = L^2 k^2$, $\beta = \frac{1-2\nu}{2-2\nu}$, где ν – коэффициент Пуассона, C_R – скорость поверхностной волны, из (17) получим дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} 16(1 - \beta \zeta)(1 + \alpha - \zeta) [1 + 2\alpha + 2\sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)}] &= (2 - \zeta)^2 [(1 - 3\alpha^2)^2 + \alpha(3 - \alpha)(1 + \alpha - \zeta) + \\ &+ (1 - \alpha^2)(1 + \alpha - \zeta)^2 + \alpha(1 + \alpha - \zeta)^3 + 2(1 - 3\alpha^2)(3 - \alpha)\sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)} + 2(1 - 3\alpha^2)(1 - \alpha)(1 + \alpha - \zeta) - \\ &- 2(1 - 3\alpha^2)(1 + \alpha - \zeta)\sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)} + 2(3 - \alpha)(1 - \alpha)(1 + \alpha - \zeta)\sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)} - \\ &- 2(3 - \alpha)(1 + \alpha - \zeta)^2 \alpha - 2(1 - \alpha)(1 + \alpha - \zeta)^2 \sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)}] \end{aligned} \quad (18)$$

При $L = 0$ или $\alpha = 0$ из (18) получится уравнение для определения скорости поверхностной волны в классическом случае [16]

$$16(1 - \beta \zeta)(1 - \zeta) = (2 - \zeta)^2 (3 + (1 - \zeta)^2 - 2\zeta). \quad (19)$$

Заметим, что в уравнение (18) входит волновое число α , поэтому поверхностная волна обладает дисперсией, в отличие от классического случая, в котором поверхностная волна Рэлея дисперсией не обладает.

На рис.1 представлены зависимости квадрата скорости поверхностной волны C_R от волнового числа α . Кривые представлены в безразмерной форме: квадрат скорости поверхностной волны отнесен к квадрату скорости сдвиговой волны c_2^2 . Кривые рассчитаны для двух значений коэффициента Пуассона: $\nu=0.2$ (сплошная кривая) и $\nu=0.5$ (пунктирная кривая). Из графика видно, что с увеличением волнового числа α , квадрат скорости поверхностной волны возрастает и, что при $\alpha \rightarrow \infty$, $\zeta \rightarrow 2$ или $C_R \rightarrow \sqrt{2}$.

Рис.1. Зависимость квадрата скорости поверхностной волны от волнового числа

Получим выражение для фазовой скорости плоской сдвиговой волны $V_\phi(\alpha)$ и сравним ее со скоростью поверхностной волны $C_R(\alpha)$.

Уравнение для плоской сдвиговой волны, учитывая (10), примет вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - L^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (20)$$

его решение будем искать в виде: $\psi = \text{Be}^{i(\omega t - kx)}$, отсюда

$$\begin{aligned} \omega^2 &= c_2^2 k^2 (1 + L^2 k^2), \\ v_\phi^2 &= \frac{\omega^2}{k^2} = c_2^2 (1 + L^2 k^2), \quad \frac{v_\phi^2}{c_2^2} = (1 + \alpha) \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21) следует, что сдвиговая волна в градиентно-упругой среде обладает дисперсией, ее фазовая скорость не совпадает с c_2 и превосходит ее при любом ненулевом значении волнового числа.

На рис.2 представлены две зависимости: квадрат скорости поверхностной волны C_R^2 и квадрат фазовой скорости сдвиговой волны V_ϕ^2 . Кривые представлены в безразмерной форме: обе величины отнесены к квадрату скорости сдвиговой волны c_2^2 . Скорость поверхностной волны рассчитана для значения коэффициента Пуассона $\nu=0.5$. Из приведенного графика можно сделать вывод, что скорость поверхностной волны не может превышать фазовую скорость сдвиговой волны, но может достигать ее при определенных значениях волнового числа α .

Рис.2. Зависимости квадрата скорости поверхностной волны и квадрата фазовой скорости сдвиговой волны от волнового числа.

Вычисление перемещений и напряжений. Из (14) и (15) следует, что перемещения u и v могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
 u &= -iAke^{\zeta y + i(\omega t - kx)} + B_1\eta_1 e^{\eta_1 y + i(\omega t - kx)} + B_2\eta_2 e^{\eta_2 y + i(\omega t - kx)} = (-iAke^{\zeta y} + B_1\eta_1 e^{\eta_1 y} + B_2\eta_2 e^{\eta_2 y})e^{i(\omega t - kx)} \\
 v &= A\zeta e^{\zeta y + i(\omega t - kx)} + iB_1ke^{\eta_1 y + i(\omega t - kx)} + iB_2ke^{\eta_2 y + i(\omega t - kx)} \\
 &= (A\zeta e^{\zeta y} + iB_1ke^{\eta_1 y} + iB_2ke^{\eta_2 y})e^{i(\omega t - kx)}
 \end{aligned} \quad (22)$$

Система уравнений (16) позволяет выразить постоянные B_1 и A через B_2 :

$$\begin{aligned}
 B_1 &= -B_2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \left(\frac{k^2 - \eta_2^2}{k^2 - \eta_1^2} \right) \\
 A &= \frac{2iB_2\eta_2 k \mu}{(\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2)} \left(\frac{k^2 - \eta_2^2}{k^2 - \eta_1^2} - 1 \right)
 \end{aligned} \quad (23)$$

Соотношения (23), после взятия вещественных частей (22), позволяют записать перемещения в виде:

$$\begin{aligned}
 u &= B_2\eta_2 \left[\frac{2k^2\mu}{(\lambda\zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu\zeta^2)} \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} - 1 \right) e^{-\zeta y} - \frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} e^{-\eta_1 y} + e^{-\eta_2 y} \right] \cos(kx - \omega t) \\
 v &= -B_2 \left[\frac{2k^2\mu\eta_2\zeta}{(\lambda\zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu\zeta^2)} \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} - 1 \right) e^{-\zeta y} - k \frac{\eta_2}{\eta_1} \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} \right) e^{-\eta_1 y} + k e^{-\eta_2 y} \right] \sin(kx - \omega t)
 \end{aligned} \quad (24)$$

На рис.3 представлены зависимости амплитуд перемещений u и v в поверхностной волне от глубины. Кривые представлены в безразмерной форме: амплитуды смещений отнесены к амплитуде нормального смещения на поверхности $v|_{y=0}$. Глубина отложена в долях длины волны. Из графика видно, что смещение, нормальное к поверхности, сначала возрастает, достигая своего максимума приблизительно при $y=0.1\lambda$, а затем монотонно убывает с глубиной, тогда как смещение, параллельное поверхности, меняет знак на глубине примерно $y=0.15\lambda$.

Рис.3. Зависимости амплитуд перемещений в поверхностной волне от глубины.

Напряжения можно представить через потенциалы φ и ψ , и аналогично вычислению перемещений, выразив постоянные B_1 и A через B_2 , после взятия вещественных частей, получим:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy} &= B_2 \left[-2\eta_2 f \mu \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} - 1 \right) e^{-\zeta y} + 2\eta_2 f \mu \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} \right) e^{-\eta_1 y} - 2\eta_2 f \mu e^{-\eta_2 y} \right] \sin(kx - \omega t) \\
 \sigma_{xx} &= B_2 \left[2\eta_2 f \mu \frac{(\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2)}{(\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2)} \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} - 1 \right) e^{-\zeta y} + 2\eta_2 f \mu \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} \right) e^{-\eta_1 y} \right. \\
 &\quad \left. - 2\eta_2 f \mu e^{-\eta_2 y} \right] \cos(kx - \omega t) \\
 \sigma_{yx} &= B_2 \left[\frac{4\eta_2 f^2 \mu^2}{(\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2)} \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} - 1 \right) e^{-\zeta y} - \mu \frac{\eta_2}{\eta_1} \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} \right) (k^2 + \eta_1^2 + 2\eta_1^2 k^2 L^2 - \eta_1^4 L^2 - \right. \\
 &\quad \left. k^4 L^2) e^{-\eta_1 y} + \mu (k^2 + \eta_2^2 + 2\eta_2^2 k^2 L^2 - \eta_2^4 L^2 - k^4 L^2) e^{-\eta_2 y} \right] \cos(kx - \omega t) \\
 \sigma_{xy} &= B_2 \left[\frac{4\eta_2 f^2 \mu^2}{(\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2)} \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} - 1 \right) e^{-\zeta y} \right. \\
 &\quad \left. - \mu \frac{\eta_2}{\eta_1} \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} \right) (k^2 + \eta_1^2 - 2\eta_1^2 k^2 L^2 + \eta_1^4 L^2 + k^4 L^2) e^{-\eta_1 y} \right. \\
 &\quad \left. + \mu (k^2 + \eta_2^2 - 2\eta_2^2 k^2 L^2 + \eta_2^4 L^2 + k^4 L^2) e^{-\eta_2 y} \right] \cos(kx - \omega t) \\
 \mu_y &= 2B_2 L^2 \mu \eta_2 (f^2 - \eta_2^2) (e^{-\eta_2 y} - e^{-\eta_1 y}) \cos(kx - \omega t) \\
 \mu_x &= 2B_2 L^2 \mu f (f^2 - \eta_2^2) \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} e^{-\eta_2 y} + e^{-\eta_1 y} \right) \sin(kx - \omega t)
 \end{aligned} \tag{25}$$

На рис.4 представлены зависимости амплитуд напряжений σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yx} , σ_{yy} и моментных напряжений μ_x , μ_y в поверхностной волне от глубины. Кривые представлены в безразмерной форме: амплитуды напряжений и моментных напряжений отнесены к амплитуде нормального напряжения на поверхности $\sigma_{xx|y=0}$, $\mu_x|y=0$, соответственно. Глубина отложена в долях длины волны. Из графиков видно, что σ_{xx} меняет знак, тогда как σ_{yy} и σ_{yx} достигают максимума приблизительно при $y=0.2\lambda$ и затем экспоненциально убывают с глубиной. Так же из рис.4 видно, что тензор напряжений является несимметричным ($\sigma_{yx} \neq \sigma_{xy}$).

Рис.4. Зависимости амплитуд напряжений в поверхностной волне от глубины.

На рис.5 представлены зависимости амплитуд напряжений σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yx} , σ_{yy} в поверхностной волне от глубины в классическом случае (при $L=0$). Кривые представлены в безразмерной форме. Из графиков видно, что тензор напряжений стал симметричным, так как совпали амплитуды напряжений σ_{xy} , σ_{yx} и достигают максимума приблизительно при $y=0.2\lambda$.

Рис.5. Зависимости амплитуд напряжений в поверхностной волне от глубины в классическом случае (при $L=0$).

Приведенная на рис.3-5 совокупность кривых иллюстрирует, что поверхностная волна локализована в тонком поверхностном слое.

На основании вышеизложенных рассуждений можно сделать вывод, что скорость поверхностной волны, распространяющейся вдоль свободной границы градиентно-упругого полупространства, может превосходить скорость объемной сдвиговой волны, вычисляемую как радикал отношения модуля сдвига к плотности материала. Однако в рассматриваемой среде сдвиговая волна также обладает дисперсией и значение указанной скорости является лишь нижним пределом ее фазовой скорости. Таким образом, в градиентно-упругой среде фазовая скорость поверхностной волны не может превосходить фазовую скорость объемной сдвиговой волны, но, при определенных значениях волнового числа, может достигать ее.

3. Постановка и решение задачи градиентно-упругой среды с движущимся источником, генерирующим поверхностные волны. Наряду с вышеизложенной задачей, возникает интерес к вопросу о генерации поверхностных волн источником, движущимся вдоль границы градиентно-упругого полупространства с постоянной скоростью D превосходящей скорости сдвиговой $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ и продольной $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ волн.

Уравнения динамики, эквивалентные векторному уравнению, в двумерном случае запишутся в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{x'x'}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau_{y'x'}}{\partial y'} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma_{y'y'}}{\partial y'} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (26)$$

Компоненты тензора напряжений и моментные напряжения $\mu_{x'}$ и $\mu_{y'}$, выражаются через перемещения u , v следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\sigma_{x'x'} &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x'}; & \sigma_{y'y'} &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y'}; \\ \sigma_{x'y'} &= \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} - l^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'} \right) \right]; \\ \sigma_{y'x'} &= \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} + l^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'} \right) \right]; \\ \mu_{x'} &= 2\mu l^2 \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'} \right); & \mu_{y'} &= 2\mu l^2 \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'} \right).\end{aligned}\quad (27)$$

Принципиальное отличие в постановке задачи будет наблюдаться в процессе задания граничных условий для решения уравнения динамики. В рассматриваемой задаче граничные условия будут иметь следующий вид:

$$\sigma_{y'y'} = -P\delta(x), \quad \sigma_{y'x'} = 0, \quad \mu_{y'} = 0. \quad (28)$$

Прежде чем переходить к решению задачи с движущимся источником на сверхзвуковых скоростях ($c_1 > c_2 > D$), рассмотрим случай движения источника возмущений со скоростью, меньшей скоростей продольной и сдвиговой волн — дозвуковой случай.

Для этого введем подвижную систему координат (x, y) , в которой покоится источник возмущений и которая связана с неподвижной системой координат известным преобразованием Галилея:

$$x = x' - Dt, \quad y = y'. \quad (29)$$

Соотношения (27), (29) позволяют записать уравнения динамики (4) в перемещениях:

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu - \rho D^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + l^2 \Delta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu \left[\left(1 - \frac{\rho D^2}{\mu} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - l^2 \Delta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] &= 0\end{aligned}\quad (30)$$

Решение уравнений (28) будем искать в виде:

$$u = Ae^{kxy} \sin(kx), \quad v = Be^{kxy} \cos(kx). \quad (31)$$

Подстановка (31) в (30) приводит к системе алгебраических уравнений относительно A и B

$$[-\mu l^2 k^2 q^4 + \mu q^2(1 + l^2 k^2) - (\lambda + 2\mu - \rho D^2)] + [\mu l^2 k^2 q^3 + q(\lambda + \mu - \mu l^2 k^2)]B = 0 \quad (32)$$

$$[-\mu l^2 k^2 q^3 - q(\lambda + \mu - \mu l^2 k^2)]A + [(\lambda + 2\mu - \rho D^2)q^2 - (\mu + \mu l^2 k^2 - \rho D^2)]B = 0,$$

имеющей решения, отличные от нуля, при выполнении равенства:

$$(l^2 k^2 - \gamma + \beta_1^2)l^2 k^2 q^6 + (l^2 k^2(1 + l^2 k^2 - \beta_1^2) + \gamma(1 + l^2 k^2)(1 - \gamma\beta_1^2) + 2l^2 k^2(\gamma - l^2 k^2))q^4 + ((1 + l^2 k^2)(1 + l^2 k^2 - \beta_1^2) - (\gamma - \beta_1^2)^2 + (\gamma - l^2 k^2)^2)q^2 + (\gamma - \beta_1^2)(1 + l^2 k^2 - \beta_1^2) = 0. \quad (33)$$

Здесь $\beta_1^2 = \frac{\rho D^2}{\mu}$ – отношение квадрата скорости движения источника к квадрату скорости сдвиговой волны; $\gamma = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}$ – отношение квадрата скорости продольной волны к квадрату скорости сдвиговой волны.

Корни уравнения (33) q_1, q_2, q_3 следует искать при условии $\text{Re} q_i > 0$. Продольное и поперечное перемещения будут выражаться в виде сумм:

$$u = \sum_{i=1}^3 \int_0^\infty A_i e^{k q_i y} \sin k x dk, \quad v = \sum_{i=1}^3 \int_0^\infty \alpha_i A_i e^{k q_i y} \cos k x dk \quad (34)$$

Здесь

$$\alpha_i = \frac{\mu l^2 k^2 q_i^4 - \mu q_i^2(1 + l^2 k^2) + (\lambda + 2\mu - \rho D^2)}{\mu l^2 k^2 q_i^3 + (\lambda + \mu - \mu l^2 k^2)q_i}, \quad B_i = \alpha_i A_i \quad (35)$$

Подставим (34) в граничные условия (28), получим систему из трех уравнений для определения A_1, A_2, A_3 .

$$\sum_{i=1}^3 [\lambda + \alpha_i q_i (\lambda + 2\mu)] A_i = -\frac{P}{\pi k}$$

$$\sum_{i=1}^3 [-\alpha_i (1 - l^2 k^2) + q_i (1 - l k^2 \alpha_i q_i) + l k^2 q_i (1 - q_i^2)] A_i = 0 \quad (36)$$

$$\sum_{i=1}^3 q_i (\alpha + q_i) A_i = 0$$

Известно, что влияние моментных напряжений особенно сказывается при коротких волнах [17]. Поэтому введем безразмерный малый параметр $\varepsilon = 1/lk$.

С точностью до величин порядка ε^2 из (33) получим:

$$q_1 = a_{01} \varepsilon, \quad q_2 = \frac{(a_{02} + a_{12} \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad q_3 = \frac{(a_{02} - a_{12} \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (37)$$

где

$$a_{01} = -\frac{\gamma \sqrt{1 - \beta_0^2}}{\sqrt{2}}, \quad a_{02} = -\frac{1+i}{\sqrt[4]{128}}, \quad a_{12} = \frac{i(1+i)(3 - \beta_0^2)\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{8}}, \quad \beta_0^2 = \frac{\rho D^2}{\lambda + 2\mu} \quad (38)$$

Из (37), (35) и (36) получим следующие соотношения:

$$\alpha_1 = \alpha_{01} + \alpha_{11} \varepsilon, \quad \alpha_2 = q_2, \quad \alpha_3 = q_3, \quad A_1 = -\frac{P}{\pi \lambda k}, \quad A_2 = A_3 = 0$$

$$\alpha_{01} = \frac{(1 + \beta_0^2) \gamma^2 - 2\beta_1^2}{\gamma \sqrt{1 - \beta_0^2}}, \quad \alpha_{11} = \gamma \sqrt{1 - \beta_0^2} \left[\frac{(1 + \beta_0^2) \gamma^2}{2} - \beta_1^2 \right], \quad (39)$$

позволяющие записать перемещения (34) в виде:

$$u = -\frac{P}{\pi\lambda} e^{-\beta_2 y} \int_{k_0}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} dk \quad (40)$$

$$v = -\frac{P\alpha_{01}}{\pi\lambda} e^{-\beta_2 y} \int_{k_0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} dk - \frac{P\alpha_{11}k_0}{\pi\lambda} e^{-\beta_2 y} \int_{k_0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} dk \quad (41)$$

где $k_0 = 1/l$, $\beta_2 = a_{01}k_0$

Из выражений (40) видно, что амплитуды перемещений будут меняться в зависимости от величины нагрузки движущегося источника P и его скорости D .

На рис.6 представлена зависимость нормированной амплитуды поперечного перемещения

$$V_1 = -\frac{v\pi\lambda e^{\beta_2 y}}{P} = \alpha_{01} \int_{k_0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} dk + \alpha_{11}k_0 \int_{k_0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} dk \quad (42)$$

от квадрата безразмерной скорости движущегося источника возмущений. Из графического изображения видно, что при приближении скорости движущегося источника к скорости сдвиговой волны, V_1 неограниченно возрастает.

Рис.6. Зависимость амплитуды поперечного перемещения от скорости движущегося источника.

На рис.7 представлены зависимости продольного U и поперечного V перемещений от глубины. Кривые даны в безразмерной форме: амплитуды смещений отнесены к амплитуде нормального смещения на поверхности $V_{y=0}$. Глубина отложена в долях длины волны. Из графического изображения видно, что компоненты смещения экспоненциально убывают с глубиной, причем поперечная составляющая вектора перемещений всегда превосходит продольную, а вращение частиц при распространении поверхностной волны в направлении оси x происходит по эллиптической траектории.

На основании проведенных исследований можно сделать вывод о том, что источник, движущийся с постоянной дозвуковой скоростью вдоль границы градиентно-упругого полупространства, будет генерировать поверхностные упругие волны. Такие волны, в отличие от классических поверхностных волн Рэлея, обладают дисперсией. Амплитуды перемещений изменяются в зависимости от величины нагрузки движущегося источника, а также его скорости, и неограниченно возрастают при приближении скорости источника к скорости сдвиговой волны.

Далее перейдем к рассмотрению случая, когда скорость движения источника возмущений D превосходит скорости сдвиговой продольной волн – сверхзвуковой случай.

Рис. 7. Зависимости амплитуд перемещений в поверхностной волне от глубины.

Для этого введем потенциалы (φ, ψ) , удовлетворяющие соотношениям:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x'} - \frac{\partial \psi}{\partial y'}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y'} + \frac{\partial \psi}{\partial x'}, \quad (43)$$

и преобразуя систему уравнений (26) с учетом (27) в систему уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = 0 \quad (44)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - l^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x'^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x'^2 \partial y'^2} + \frac{\partial^4}{\partial y'^4} \right) - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0 \quad (45)$$

Аналогично дозвуковому случаю введем подвижную систему координат (x, y) , в которой покоится источник возмущений и которая связана с неподвижной системой координат преобразованием Галилея:

$$x = x' - Dt, \quad y = y'. \quad (47)$$

В итоге краевая задача (26), (28) запишется в виде:

$$\left(\lambda_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi = 0 \quad (48)$$

$$\left(\lambda_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + l^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \right) \psi = 0 \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \left((\eta_2^2 - 2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)_{y=0} &= -\frac{P}{\mu} \delta(x) \\ \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \eta_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{y=0} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right)_{y=0} &= 0 \end{aligned} \quad (50)$$

где $\eta_\alpha = \frac{D}{c_\alpha}$, $\lambda_1^2 = \sqrt{(\eta_\alpha^2 - 1)}$, $\alpha = 1, 2$.

Заметим, что третьем уравнении системы (50) присутствует только потенциал сдвиговых волн. Проинтегрируем это выражение по dy :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \text{const} = 0 \quad (51)$$

Считая постоянную интегрирования равной нулю, выражение (51) подставим во второе уравнение системы (50). Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left((\eta_2^2 - 2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)_{y=0} &= -\frac{P}{\mu} \delta(x), \\ \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (\eta_2^2 + 2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_{y=0} &= 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Решением дифференциальных уравнений (26), (28) будут интегралы

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-ia(x-\lambda_1 y)} da, \\ \psi(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B e^{-ia(x-\lambda_2 y)} da, \end{aligned} \quad (53)$$

найденные путем применения интегрального преобразования Фурье. Легко проверить, что эти функции удовлетворяют условиям излучения на бесконечности.

Применяя преобразования Фурье к граничным условиям (52) и учитывая, что преобразование Фурье для функции $\delta(x)$ имеет вид:

$$F[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) B e^{-iax} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} -a(\eta_2^2 - 2)A + 2a^2\lambda_2 B &= -\frac{P}{\mu\sqrt{2\pi}} \\ 2a^2\lambda_1 A - a^2(\eta_2^2 + 2)B &= 0 \end{aligned} \quad (54)$$

Определим значения A и B . Для этого из второго уравнения системы (54) выразим B через A :

$$B = \frac{2\lambda_1}{(\eta_2^2 + 2)} A,$$

откуда находим

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\eta_2^2 - 2)P}{\mu a^2 \sqrt{2\pi} [(\eta_2^2 + 2)(\eta_2^2 - 2) + 4\lambda_1 \lambda_2]}, \\ B &= \frac{2\lambda_1 P}{\mu a^2 \sqrt{2\pi} [(\eta_2^2 + 2)(\eta_2^2 - 2) + 4\lambda_1 \lambda_2]}. \end{aligned} \quad (55)$$

Введем следующие переменные: $\gamma_1 = \eta_2^2 + 2$, $\gamma_2 = \eta_2^2 - 2$

$\Delta = \gamma_1 \gamma_2 + 4\lambda_1 \lambda_2$, тогда выражения (55) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\gamma_2 P}{\mu a^2 \sqrt{2\pi} \Delta}, \\ B &= \frac{2\lambda_1 P}{\mu a^2 \sqrt{2\pi} \Delta}. \end{aligned} \quad (56)$$

Вычисление перемещений и напряжений. В соответствии с (53):

$$u = -\frac{iP}{2\pi\mu\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_2 e^{i\lambda_1 ay} + 2\lambda_1 \lambda_2 e^{i\lambda_2 ay}) \frac{e^{-iax}}{a} da \quad (57)$$

$$v = \frac{iP}{2\pi\mu\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_2 \lambda_1 e^{i\lambda_1 ay} - 2\lambda_1 e^{i\lambda_2 ay}) \frac{e^{-iax}}{a} da$$

Так как перемещения являются действительными функциями, то из (57) следует, что

$$u = -\frac{P}{2\pi\mu\Delta} \left[\gamma_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a(x-\lambda_1 y)}{a} da - 2\lambda_1 \lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a(x-\lambda_2 y)}{a} da \right] \quad (58)$$

$$v = \frac{P}{2\pi\mu\Delta} \left[\gamma_2 \lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a(x-\lambda_1 y)}{a} da - 2\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a(x-\lambda_2 y)}{a} da \right]$$

Определим ступенчатую функцию равной нулю для отрицательных значениях z и единице для положительных. Чтобы область определения функции содержала все точки действительной оси, в нуле функцию определим числом $\frac{1}{2}$. Рассматриваемая функция, как известно, носит название функции Хевисайда:

$$H(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{при } z = 0 \\ 1 & \text{при } z > 0 \end{cases} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin az}{a} da \quad (59)$$

Из (58) и (59) получаем выражение для перемещений:

$$u = -\frac{P}{\mu\Delta} [\gamma H(x - \lambda_1 y) - 2\lambda_1 \lambda_2 H(x - \lambda_2 y)] + \text{const} \quad (60)$$

$$v = -\frac{P}{\mu\Delta} [\gamma \lambda_1 H(x - \lambda_1 y) + 2\lambda_1 H(x - \lambda_2 y)] + \text{const}'$$

Здесь const – постоянная величина, не влияющая на распределение напряжений.

На рис.8 представлены зависимости амплитуд смещения U (а) и V (б) в рэлееской волне от глубины. Кривые даны в безразмерной форме: амплитуды смещений отнесены к амплитуде нормального смещения на поверхности $V_{y=0}$. Глубина отложена в долях длины волны. Видно, что при убывании продольной компоненты, поперечная начинает возрастать. В процессе отдаления от поверхностного слоя, наблюдается увеличение амплитуды смещения частиц в волне и только на глубине $2L-3L$ происходит затухание возмущений.

Аналогичным путем определим напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{P}{\Delta} \left[\gamma \left(2 + \frac{\lambda}{\mu} \eta_1^2 \right) \delta(x - \lambda_1 y) - 4\lambda_1 \lambda_2 \delta(x - \lambda_2 y) \right] \\ \sigma_{yy} &= -\frac{P}{\Delta} \left[\gamma \left(2\lambda_1^2 + \frac{\lambda}{\mu} \eta_1^2 \right) \delta(x - \lambda_1 y) + 4\lambda_1 \lambda_2 \delta(x - \lambda_2 y) \right] \\ \sigma_{yx} &= -\frac{2P}{\Delta} \lambda_1 \gamma [\delta(x - \lambda_1 y) - \delta(x - \lambda_2 y)] \\ \sigma_{xy} &= -\frac{2P}{\Delta} \lambda_1 \gamma [\delta(x - \lambda_1 y) + 2\delta(x - \lambda_2 y)] \\ \mu_x &= -\frac{2aL^2 P}{\Delta} (\lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2^2) \delta(x - \lambda_2 y) \\ \mu_y &= -\frac{2aL^2 P}{\Delta} (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^3) \delta(x - \lambda_2 y) \end{aligned} \quad (61)$$

(a)

(б)

Рис. 8. Зависимости амплитуд перемещений в поверхностной волне от глубины.

Здесь $\frac{dH(z)}{dz} = \delta(z)$, где $\delta(z)$ - функция Дирака. Из (60) и (61) видно, что возмущение, вызванное нормальной нагрузкой, характеризуется двумя волнами Маха:

$$x - \lambda_1 y = 0, x - \lambda_2 y = 0$$

где $\lambda_\alpha^2 = \sqrt{(\eta_\alpha^2 - 1)}$, $\eta_\alpha = \frac{D}{c_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$

При движении нормальной нагрузки со сверхзвуковыми скоростями, вслед за источником возмущений образуется коническая поверхность (конус Маха – рис.9), ограничивающая область, в которой сосредоточены возмущения от невозмущенной области упругого

полупространства. Поверхность конуса Маха является огибающей системы волн, порожденных нормальной нагрузкой.

Рис. 9. Конус Маха

Угол φ (угол Маха) - между образующими конуса и его осью определяется как

$$\sin \varphi = \frac{c_\alpha}{D} = \frac{1}{\eta_\alpha}, \alpha = 1, 2 \quad \text{где } \eta_\alpha - \text{числа Маха}$$

При увеличении скорости движения нормальной нагрузки угол Маха уменьшается, а область сосредоточения возмущений сдвигается к линии приложения нагрузки (рис.10).

Рис. 10. Поведение конуса Маха при увеличении скорости движения нагрузки

На рис.11 представлена зависимость угла Маха от скорости движения нормальной нагрузки. Из графического изображения видно, что при увеличении скорости источника возмущений, угол между образующими конуса и его осью уменьшается.

В результате проведенного исследования можно сделать вывод о том, что движущийся вдоль границы градиентно-упругого полупространства источник с постоянной скоростью, большей по своей величине скорости сдвиговой упругой волны, будет генерировать поверхностные упругие волны. Причем поперечная составляющая вектора перемещения превосходит продольную только в околоповерхностном слое полупространства, что является отличительной особенностью распространения волн от движущегося источника на больших скоростях.

Рис. 11. Зависимость угла Маха от скорости движения нормальной нагрузки

Так же необходимо отметить, что при увеличении глубины (2λ - 3λ) распространения волн, происходит затухание возмущений и волновой процесс стабилизируется.

При движении источника возмущений на сверхзвуковых скоростях образуется конус Маха, содержащий в себе область распространения упругих волн. Причем область сосредоточения возмущений напрямую зависит от скорости движения источника возмущений.

В заключение заметим, что при возбуждении свободного края двумерных и трехмерных упругих тел, а также при кромочном контакте различных материалов, наряду с волнами Рэлея, возможно существование изгибных волн рэлеевского типа (волны Коненкова) [19-25]. Для элементов конструкций, материалы которых подчиняются законам градиентной теории упругости, такие волны ждут своих исследователей.

Список литературы

1. Lord Rayleigh. On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid // Proceedings of the London Mathematical Society. - 1885. - s1-17(1). – P. 4-11.
2. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Теория и методы. В двух томах. - М.: Мир, 1983. - Т.1.- 518с.,Т.2.- 880с.
3. Неразрушающий контроль: Справочник в 7т. / Под ред. академика РАН В.В.Клюева. Т.3: Ультразвуковой контроль / И.Н.Ермолов, Ю.В. Ланге. - М.: Машиностроение, 2004. - 864с.
4. Углов.А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации / Отв.ред.академик РАН Ф.М.Митенков. - М.: Наука, 2009. - 280 с.
5. Maugin G.A., Metrikine A.V. (Editors). Mechanics of Generalized Continua: On Hundred Years After the Cosserats. Advances in Mathematics and Mechanics.Vol. 21. - Springer , Berlin, 2010. - 338 p.
6. Altenbach H., Maugin G.A., Erofeev V. (Editors). Mechanics of Generalized Continua. Advanced Structured Matherials. Vol. 7. - Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011. - 350 p.
7. Altenbach H., Forest S., Krivtsov A. (Editors). Generalized Continua as Models with Multi-scale Effects or Under Multi-field Actions. Advanced Structured Matherials.Vol. 22. - Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2013. - 332 p.
8. Altenbach H., Eremeyev V.A. (Editors). Generalized Continua – from the Theory to Engineering Applications. - Springer, Wien, 2013. - 388 p.

9. Bagdoev A.G., Erofeyev V.I., Shekoyan A.V. Wave Dynamics of Generalized Continua. Advanced Structured Materials. Vol. 24. - Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2016. - 274 p.
10. Altenbach H., Forest S. (Editors). Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials. Advanced Structured Materials. Vol. 42. - Springer-Verlag, Switzerland, 2016. - 458 p.
11. Maugin G.A. Non-Classical Continuum Mechanics. Advanced Structured Materials. Vol. 51. - Springer, Singapore, 2017. - 260 p.
12. Le Roux J. Etude geometrique de la flexion, dans les deformations infinitesimales d'un milieu continu // Ann. Ecole Norm. Sup. - 1911. - 28.523. - 579.
13. Le Roux J. Recherches sur la geometrie des deformations finies // Ann. Ecole Norm. Sup. - 1913. - 30.193. - 245.
14. Jaramillo T.J. A Generalization of the Energy Function of Elasticity Theory. Dissertation. Department of Mathematics. University of Chicago, 1929.
15. Cosserat E. et F. Theorie des Corps Deformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. - 226 p.
16. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Солдатов И.Н. Волновые процессы в сплошных средах. - Саратов: Изд-во РФЯЦ – ВНИИЭФ, 2012. - 260 с.
17. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. - М.: Изд-во МГУ, 1999. - 328 с.
18. Сабодаш П.Ф., Филиппов И.Г. О воздействии подвижной нагрузки на упругое полупространство с учетом моментных напряжений // Прочность и пластичность. - М.: Наука, 1971. - С.317-321.
19. Коненков Ю.К. Об изгибной волне рэлеевского типа // Акустический журнал. - 1960. - Т.6, № 1. - С.124-126.
20. Зильбергейт А.С., Суслова И.Б. Контактные волны изгиба в анизотропных пластинах // Акустический журнал. - 1983. - Т.29, № 2. - С.186-191.
21. Белубекян М.В., Енгибарян И.А. Волны, локализованные вдоль свободной кромки пластины с кубической симметрией // Изв. РАН. Механика твердого тела. - 1996. - № 6. - С.139-143.
22. Захаров Д.Д. Волны Коненкова в анизотропных слоистых пластинах // Акустический журнал. - 2002. - Т.48, № 2. - С.205-208.
23. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. - М.: Физматлит, 2010. - 280 с.
24. Каплунов Ю.Д., Приказчиков Д.А. Общие представления для изгибной краевой волны в случае упругой пластины // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. - 2011. - № СПЕС. Математическое моделирование. - С.164-170.
25. Приказчиков Д.А., Томашпольский В.Я. Вынужденные краевые колебания предварительно деформированных упругих тел со смешанными граничными условиями на лицевых поверхностях // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. - 2011. - № 2. - С.66-77.

Дата поступления: 16 октября 2018 г.

УДК 534.1

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МОДЕЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ УДАРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ВИБРАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

© Виталий Львович Крупенин^{1,2}¹ИМАШ РАН, Москва, Россия²Московский Политехнический Университет, Москва, Россияkrupeninster@gmail.com

Аннотация. Обсуждаются способы моделирования виброполей, существующих в машинных конструкциях, при помощи распределенных ударных элементов – систем, учитывающих собственные волновые явления, имеющие место в соударяющихся объектах (ударных парах). Ударные пары различных родов весьма часто оказываются главными факторами, определяющими указанные вибрационные поля. Рассмотрены два типа соответствующих моделей: системы с простой и сложной структурами. Приведены примеры динамических моделей и результаты анализа.

Ключевые слова: вибрирующая струна, точечный ограничитель, прямой протяженный ограничитель, вибрирующая стенка, вибропроводящая система, виброударный процесс, ударная пара, периодическая функция Грина, резонанс, фаза удара, импульс удара, спектр.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (проект 18-08-00168).

TO THE ANALYSIS OF VIBRATIONAL CONDUCTING SYSTEMS WITH INCLUSIVE SHOCK VARIATIONS

© Vitaly Krupenin^{1,2}¹ IMASH RAN, Moscow, Russia² Moscow Polytechnic University, Moscow, Russiakrupeninster@gmail.com

Abstract. The ways of simulation of vibration fields existing in machine structures, using distributed shock elements - systems that consider their own wave phenomena occurring in colliding objects (shock pairs) are discussed. Shock pairs of various genera very often turn out to be the main factors determining these vibrational fields. Two types of corresponding models are considered: systems with simple and complex structures. Examples of dynamic models and results of analysis are given.

Keywords: vibrating string, point limiter, straight extended limiter, vibrating wall, vibro-conducting system, vibro-impact process, impact pair, periodic Green's function, resonance, impact phase, impact pulse, spectrum.

Acknowledgements. The work was supported by RFBR (project 18-08-00168).

Введение. Моделирование вибрационных полей в машинных конструкциях является важной и актуальной проблемой, поскольку их особенности и структура с одной стороны определяют виброактивность машин или систем машин, а с другой стороны могут также определить и многие аспекты полезного использования вибрационных процессов. Один из

важнейших факторов формирования вибрационного поля - систематические соударения элементов конструкций, генерирующие широкополосные виброударные процессы. Во многих случаях именно виброударные процессы оказываются определяющими факторами, влияющими на структуру вибрационных полей [1, 2].

Описание глобальных виброполей, устанавливающихся в пространственных областях может быть разделено на два раздела.

Во-первых, для многих задач важен учет волновых свойств самих соударяющихся тел. Например, в случаях, когда виброполя определяются, в частности, соударениями каких-либо струн, нитей, балок, цепей, проводов, кабелей, мембран, пластин, панелей, решеток и тому подобных протяженных, плоских или более сложных объектов.

Во-вторых, большое число систем представимо в виде каких-либо несущих упругих, вязкоупругих, упруго-пластичных и тому подобных конструкций с упруго амортизированным оборудованием, содержащим какие-либо ударные пары.

В-первом случае моделирование должно осуществляться посредством описания процесса удара в самих конструкциях. Здесь могут быть использованы модели распределенных сильно нелинейных систем простой структуры [3, 4]. Во-втором случае, может оказаться целесообразным провести некоторую идеализацию («размазывание» оборудования по пространству) и воспользоваться моделями сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры [1, 5 - 7].

Отметим, что выделение двух случаев сделано для удобства. Они имеют близкую природу, описываются во многом аналогичными моделями и им присуще проявление сходных динамических эффектов, возможно, главный из которых - возникновение «хлопков» (появление синхронизации ударов в отдаленных точках). Именно системы двух указанных типов и будут рассматриваться в статье.

1. Струна с двойным ограничителем хода: постановка задачи. Рассмотрим систему, показанную на рис. 1. Абсолютно гибкая нить (струна), закреплённая на концах совершает плоские колебания, ограниченные точечным и плоским препятствиями.

Предполагаем при этом, что плоская стенка вибрирует по закону $\Delta_0(t) = -\Delta - 2\varepsilon - \varepsilon d(t) < 0$; ε - малый параметр ($\Delta_0 > \varepsilon > 0$).

Обозначим искомый прогиб (виброполе) как $u(x, t)$. Выбрав единицы измерения так, что плотность материала струны и натяжение – единичны, в отсутствии касания ограничителей, будем иметь: $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

Рис.1. Плоские колебания струны в присутствии двойного ограничителя

Пусть $x \in [-1/2, 1/2]$; $t \in \mathbb{R}$. Граничные условия и соотношения, описывающие препятствия, запишем в виде

$$u(-1/2, t) = u(1/2, t) = 0; \quad u(x, t) \geq \Delta(t), \quad \Delta < 0; \quad u(0, t) \leq \Delta_1, \quad \Delta_1 > 0. \quad (1)$$

Здесь Δ_1 – координата точечного ограничителя, расположенного посередине струны. Рассматриваемую задачу можно записать в виде нелинейного уравнения Клейна-Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} - \Phi(u) = 0, \quad (2)$$

где обобщенная функция $\Phi(u)$ – плотность силы взаимодействия струны с препятствиями: $\Phi(u) = \Phi_{\Delta}(u) + \Phi_{\Delta_1}(u)$ – представима как сумма плотностей сил взаимодействия с прямым и точечным ограничителями (Fig. 1, a).

Введение обобщенных функций необходимо ввиду разрывов, возникающих вследствие ударов [3, 7, 8].

Случай консервативной системы ($\varepsilon = 0$) рассмотрен в статье [4]. Вид плотности силы взаимодействия с точечным ограничителем $\Phi_{\Delta_1}(u)$ определялся из следующих соображений. При взаимодействии, когда $x=0$, в течение некоторого времени существуют выстои струны. При этом во время выстоев на струну при $u(0, t) = \Delta_1$ ($t \in [t_j, \theta_j]$) действует сила реакции точечного препятствия $r_j(t)$. Здесь t_j и θ_j – вычисляемые моменты начала и конца выстоя; индекс j – отвечает некоторому j -му взаимодействию. Таким образом

$$\Phi_{\Delta_1}(u) = R_j(t) \delta(x) [\eta(t-t_j) - \eta(t-\theta_j)], \quad R_j(t) = u_x(-0, t) - u_x(+0, t) \leq 0; \quad t \in [t_j, \theta_j], \quad (2)$$

где $\eta(t)$ – единичная функция.

При взаимодействии с плоской частью ограничителя в консервативном случае ($\varepsilon = 0$) принимается континуальный аналог гипотезы Ньютона:

$$u_t(x, t-0) = -u_t(x, t+0), \quad u(x, t) = \Delta. \quad (3)$$

Соотношения (3) определяют обобщенную функцию $\Phi_{\Delta}(u)$. При некоем n -м подходе струны к ограничителю [4]

$$\Phi_{\Delta}(u) = J(x) \delta[t-t_n(x)] \gamma(x; \Delta). \quad (4)$$

Здесь $J(x)$ – плотность ударного импульса, $t_n(x)$ – распределение n -й «фазы» удара, определяемой из уравнения $u[x, t_n(\xi)] = \Delta < 0$; $\delta(t)$ – δ -функция Дирака. Индикаторная функция $\gamma(x; \Delta) = 0$ при тех x , когда струна не взаимодействует с плоским ограничителем и $\gamma(x; \Delta) = 1$, когда взаимодействует.

Таким образом задачей оказывается изучение решения уравнения (2) с дополнительными условиями (1).

Было показано (см. [4]), в частности, что если ограничиться начальными условиями в определенном смысле подобным тем, что порождают первую стандартную форму собственных колебаний струны в случае движений без ограничителей, когда начальные условия задачи

$$u(x, 0) = 0; \quad u_t(x, 0) = -2V_0 \pi \sin[\pi(x+1/2)],$$

то единственный периодический виброударный процесс, сохраняющий структурную устойчивость т. е. качественно не зависящий от малых изменений параметров будет относиться к классу синхронных хлопков [3, 4] и иметь структуру:

$$u(x, t) = W(J_0; x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_{1k}(J_0; x, t) D_{2k}(J_0; x, t), \quad J(\omega) = \omega(2|\Delta| + \Delta_1)(2\pi - \omega)^{-1}. \quad (5)$$

Здесь функция $W(J_0; x, t)$ отвечает профилю стоячей волны типа «хлопок с двумя зубцами» (рис. 1, b); $D_{1k}(J_0; x, t)$ и $D_{2k}(J_0; x, t)$ периодические, с периодом $2\pi\omega^{-1}$, весьма громоздкие функции, зависящие от всех параметров системы, фигурирующих в формулах (1), (3) и (4), а так же собственных свойств струны.

Опишем движение при помощи рис. 1, b. Пусть из положения равновесия струна, принимая трапецевидный профиль равномерно, со скоростью $-\frac{1}{2}J(\omega)$ движется к плоскому

препятствию. В момент времени t_1 верхняя основа трапеции соударяется с препятствием и отражается в соответствии с условием (3).

Затем верхний участок струны начинает двигаться к точечному ограничителю, которого он достигает в некоторый момент t_2 . После чего срединная точка совершает выстой, а профиль приобретает «двухтрапецевидную» форму. После достижения финальной «двухзубцовой» конфигурации процесс идет в обратном порядке.

Отметим также, что вторая формула (5) определяет частоты существования структурно устойчивых периодических стоячих волн данного типа. Эти частоты заполняет отрезок $[0, 2\pi]$, причем частота $\omega \rightarrow 2\pi$ отвечает бесконечно большим энергиям.

2. Вынужденные колебания под действием вибрация плоской части ограничителя.

Пусть параметр $\varepsilon > 0$. Для достаточно малых его значений будем искать вынужденные колебания в виде хлопка (5), так как данный режим – единственный структурно устойчивый. При рассмотрении хлопков, в принципе, правомерно использование аналога гипотезы Ньютона о коэффициенте восстановления.

Пусть $0 < R \leq 1$. Не изменяя условий (1) и (3), положим вместо (2)

$$u_t(x_0, t_0 + 0) = -Ru_t(x_0, t_0 - 0) + (1 + R)\Delta'_0(t_0) \quad (6)$$

Хлопки можно характеризовать парой переменных (v_k, t_k) , где v_k — модуль скорости каждой точки отрезка удара перед k -м соударением, приходящимся на момент t_k . Между ударами струна линейна (период колебаний равен 2). Поэтому

$$t_{k+1} = t_k + 1 + 2|\Delta'_0(t_k)|v_{k+1}^{-1}, \quad v_{k+1} = Rv_k + (1 + R)\Delta'(t_k) \quad (7)$$

Функция $\Delta_0(t)$ — синусоидальная; пользуясь условиями периодичности: $v_k = v_k \equiv v$; $t_k = kt + \varphi$ (φ — неизвестная фаза), получим из (7):

$$v(1 - R) = (1 + R)\varepsilon\omega \sin \varphi; \quad \frac{1}{2}v(2\pi n - \omega) - \omega(\Delta + \varepsilon) = \varepsilon\omega \cos \varphi \quad (8)$$

Исключив из уравнений (8) фазу и введя обозначения $\beta \equiv 2\pi - \omega$; $\gamma \equiv \omega(\Delta + \varepsilon)$; $R_0 \equiv (1 + R)(1 - R)^{-1}$, найдём два значения скорости:

$$v_{1,2} = \{2\beta\gamma \pm \sqrt{[\beta^2\gamma^2 - (4R_0^2 + \beta^2)(\gamma^2 - \varepsilon^2\omega^2)]}\}(4R_0^2 + \beta^2)^{-1} \quad (9)$$

Так что, как и для традиционных виброударных систем имеется два режима движения с ударами. Значения фаз $\varphi_{1,2} \in [0, \pi]$. Плотности импульсов $J_{1,2}(\omega) = 2v_{1,2}$. Величины взаимодействующих оснований трапеций находится из вида профилей стоячих волн (рис. 1, с):

$$l_{01,2} = 1 - 2(\Delta + \varepsilon + \varepsilon \cos \varphi_{1,2}).$$

Поэтому импульсы ударов

$$I_{1,2}(\omega, \varphi_{1,2}) = 2[1 - 2(\Delta + \varepsilon + \varepsilon \cos \varphi_{1,2})]v_{1,2}.$$

Характер зависимости $I(\omega)$ показан на рис.2; кривые a и b соответствуют отсутствию диссипации ($R = 1$: $\varphi = 0, \pi$); кривая c — значению $\varphi = \pi/2$.

В случае $R < 1$ при возрастании скорости ($\omega \rightarrow 2\pi$): $\varphi_{1,2} \rightarrow \frac{1}{2}\pi$ (достигается граница условий существования и оба режима сливаются в один.

Подробный анализ найденных точных решений показывает, что данным режимам свойственны нелинейные резонансные эффекты ("затягивания" по частоте и амплитуде, "эффект срыва резонансного режима" и др.), проявляющиеся в традиционных системах с классическими ударными парами [2, 3, 8].

Данное обстоятельство отмечалось и при экспериментировании [2, 8]. Таким образом, динамика трапецевидных стоячих волн сходна с динамикой частиц, соударяющихся с жесткими стенками.

Заметим, что приведенные решения являются точными в рамках принятых предпосылок. Аналогично можно рассмотреть субгармонические режимы $1:n$, а также получить другие обобщения.

Для изучения вопроса устойчивости найденных решений система анализировать методом конечных разностей. Неустойчивый режим, отвечающий, как и в традиционном случае меньшему значению импульса отмечен пунктиром на рис. 2.

Рис.2. Зависимость импульса от частоты волны

3. Системы со сложной структурой. Модель общего вида. Для объектов со сложной структурой делается предположение, что в каждой точке каких-либо пространственных областей помещена ударная пара. Так что вибрационное поле описывается некоторым набором функций перемещений $\{u_\alpha(x,t)\}$, причём индекс α может изменяться на конечном, счётном или даже континуальном множестве [5 - 7], а переменная x скаляр или вектор.

Приведем построение примера модели сильно нелинейного объекта сложной структуры.

Вначале постулируем существование некоторой упруго, упруго-вязкой или какой-либо другой среды, которую будем называть несущей. Несущая среда описывается, например, динамическим уравнением Ламе (Навье-Коши) с дополнительными членами вида:

$$\rho u_{tt} = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u + B[u] + G\{t, u, [u_\alpha]\} - \Phi[u_\alpha]. \quad (10)$$

Здесь состояние несущей части описывается полем перемещений $u(x,t)$; $u \in \mathbf{R}^3$; $x \in \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}^3$; $t \in \mathbf{R}$. Обозначено: ∇ и Δ - операторы Гамильтона (набла) и Лапласа; ρ - плотность несущей части среды; λ и μ - её упругие параметры; $B[\dots]$ - оператор диссипативных потерь в несущей части среде; $[u_\alpha]$ - набор функций перемещений присоединенных частей среды; $G\{\dots\}$ - соответствующая силовая характеристика; $\Phi[u_\alpha]$ - воздействие присоединенных объектов, содержащих ударные элементы.

Граничные условия запишем символически в виде $\Gamma u = X$, где Γ - оператор граничных условий, X - заданный вектор.

При рассмотрении сред сложной структуры такого типа, граничные условия ставятся только для несущей части. Отметим, что здесь для простоты были и будут опущены некоторые атрибуты, связанные с чисто математическими аспектами постановки.

Пусть амортизированное оборудование упруго связано с несущей средой:

$$\Phi[u_\alpha] = c_1(x)[u(x,t) - u_1^I(x,t)] + c_2(x)[u(x,t) - u_1^{II}(x,t)]. \quad (12)$$

Данные способ моделирования предполагает, что с каждой точкой области Z через упругий элемент соединена ударная пара, определяемая контактирующими линейными подсистемами $A^{(I)}(x)$ и $A^{(II)}(x)$, каждая из которых отвечает полям перемещений $u_q^{I,II}(x,t)$; $q=1, 2, \dots, N$. В формуле (12) $u_1^{I,II}(x,t)$ – точки присоединения подсистем; точки контакта обозначим $u_n^{I,II}(x,t)$, $n \leq N$.

Подсистемы $A^{(I,II)}(x)$ описываются семействами распределенных динамических податливостей: $L_{qk}^{I,II}(x, i\omega)$; индексы q, k пробегает значения от 1 до N ; $i\omega = \partial/\partial t$.

Будем полагать, что соударения – прямые, центральные и одномерные. Пусть $u_0 = u_n^{II} - u_n^I$ – сближение точек контакта.

Сила взаимодействия при ударе $\Phi(u_0, u_{0t}) = \lambda \Phi(u_0) + \Phi_1(u_0, u_{0t})$; $\lambda \gg 1$ – большой параметр. Здесь в правой части первый член определяет её упругую составляющую, а второй – диссипативную.

Функция Φ гипотезу, вообще говоря, немгновенного удара. При $\lambda \rightarrow \infty$ модель удара переходит в ньютоновскую, сила Φ записывается через дельта-функции [7].

Для точек подвеса и взаимодействия имеем операторные уравнения:

$$u_1^{I,II} = L_{11}^{I,II}(i\omega)c_{1,2}(x)u \pm L_{n1}^{I,II}(i\omega)\Phi(u_0, u_{0t}) + h_1^{(I,II)}, \quad (13)$$

$$u_n^{I,II} = L_{nn}^{I,II}(i\omega)c_{1,2}(x)u \pm L_{nn}^{I,II}(p)\Phi(u_0, u_{0t}) + h_n^{(I,II)}. \quad (14)$$

Для системы $A^{(I)}$ в уравнениях (3) и (4) выбирается "плюс"; а для $A^{(II)}$ – "минус". В (13) и (14) внесены дополнительные внешние силы $h_{n,1}^{(I,II)}$.

Особенности взаимодействия несущей и присоединенной частей формируют структуру глобального виброполя. В то же время использование моделей такого типа приводит к потере информации об особенностях поведения отдельных элементов системы, а также об эффектах, которые проявляются только при обращении к дискретным моделям.

4. Примеры. На рис. 3 показаны схемы моделей типа, рассмотренных выше. На рис.3. *a*. в качестве несущей части выбран продольно колеблющейся стержень, с каждой точкой которого связаны две линейные стационарные подсистемы, образующие ударный элемент [6, 7].

На рис. 3, *b* показана дискретная модель с несущей двумерной средой (струнной решеткой [7]), которая при континуализации переходит в мембрану, а при принятии дополнительных гипотез – в пластину. На этом рисунке обозначена упомянутая выше возможность рассмотрения неньютоновских ударов.

Рис. 3, *c* представляет дискретную цепочку механизмов. Расположенных на вибрирующих основаниях и, наконец на рис. 3, *d* показана весьма специфическая модель вибровода с «внутренними разрывами».

Все приведенные модели описывают механизмы генерирования широкополосных вибрационных процессов, существующих в представительных пространственных областях. Анализ таких систем выполняется при помощи специальных модификаций методов частотно-временного анализа виброударных процессов и модификаций современных численных методов. Вибрационные поля, устанавливающиеся в данных системах, зависят от проявления двух главных физических механизмов.

Амортизированные системы воздействует на несущую часть конструкций во многом аналогично динамическим ударным (или при редких сочетаниях параметров линейным) гасителям вибрационных процессов [1, 3, 5-7].

Рис.3. Динамические модели объектов со сложной структурой.

Несущая часть осуществляет фильтрацию и спектральные преобразования проходящей вибрации, а также определяет глобальные резонансные свойства. Указанные механизмы, проявляются в различных точках несущих конструкций по-разному. Это обстоятельство даёт возможность проявиться многочисленным весьма специфическим динамическим эффектам. Назовём основные.

1. Возникновение чередующихся зон прозрачности и непрозрачности для прохождения через конструкцию основного тона вибрации.
2. Проявление эффекта синхронизации интенсивных резонансных режимов с соударениями в определенных пространственных областях. При синхронизации реализуются режимы движения типа различных форм «хлопков». Резонансные режимы сохраняют основные свойства нелинейных резонансов [3, 8] (явления «затягивания» по частоте и амплитуды, эффект «жесткого запуска», явления «срыва», возникновение многозначности амплитудно-частотных характеристик и другие).
3. Возникновение сложных режимов движения: субгармонических, комбинационных, режимов с «дребезгом», хаотических, редкоударных и других.

Автор считает необходимым отметить, что концепция «синхронных хлопков» появилась в результате длительных обсуждений систем с распределенными ударными элементами с Владимиром Константиновичем Асташевым, которому автор глубоко благодарен.

Список литературы

1. Веприк А.М., Вознюк А. Д., Крупенин В.Л., Чирков И. М. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний. - Л.: Машиностроение, 1987. - 80 с.
2. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Нелинейная динамика ультразвуковых технологических процессов. - М.: МГУП им. Ивана Федорова, 2016. - 372 с.
3. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 1998. - №5. - С.13-30.
4. Крупенин В.Л. Вибрация струны, расположенной между протяженным и точечным ограничителями// Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2017. - №2. - С.13-22.
5. Крупенин В.Л. Модель сильно нелинейной вибропроводящей среды с распределенным ударным элементом// ДАН. - 1995. - Т. 343, №6. - С. 759-763.
6. Крупенин В.Л. К описанию процессов прохождения нелинейных волн через машинные конструкции, моделируемые посредством сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры (часть 1 и 2)// Вестник научно-технического развития. – 2011. - № №6, 7. - С.26-33; С.3-16.
7. Крупенин В.Л. Об описании сильно нелинейных вибропроводящих и виброгенерирующих сред // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2016. - №4. - С.9-19.
8. Babitsky V. I., Krupenin V. L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. - Berlin: Springer-Verlag, 2001. - 414 p.

Дата поступления: 5 октября 2018 г.

УДК 621.875.796

ВЛИЯНИЕ КАЧЕСТВА СМАЗОЧНОГО МАТЕРИАЛА НА ПОКАЗАТЕЛИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ ЧЕРВЯЧНЫХ ПЕРЕДАЧ

Лидия Ивановна Куксенова¹, Сергей Андреевич Поляков^{1,2},
Екатерина Михайловна Кулешова², Владимир Владимирович Лычагин²,
Ирина Анатольевна Хренникова¹

¹Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

²Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

lkukc@mail.ru

Аннотация: Проведена оценка влияния вида смазочного материала на ресурс и несущую способность червячных передач на основе метода сравнительных испытаний. Рассмотрен процесс формирования колебаний в червячных передачах. Выявлена зависимость максимальной амплитуды колебаний вращающего момента на быстроходном валу червячной передачи от вида смазочного материала.

Ключевые слова: червячная передача, смазочные материалы, износостойкость.

THE INFLUENCE OF LUBRICANT FOR INDEX OF CAPACITY FOR WORK OF WORM

L.I.Kuksenova¹, S.A.Poljakov^{1,2}, E.M.Kuleschova²,
V.V.Lychagin², I.A.Chrennikova¹

¹IMASH RAN, Moscow, Russia

²Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

lkukc@mail.ru

Abstract. The appreciation of lubricant influence for resource and performability of worm on base of comparative tests is made. The process of vibrations formation is considered. The dependencies connecting maximum amplitude of worm vibrations with kind of lubricant are revealed.

Keywords: worm, lubricant, wear resistance.

Введение. Известно, что основной причиной выхода из строя червячных передач (ЧП) является изнашивание зубьев червячного колеса и в меньшей степени червяка, а также подшипников. Несмотря на это, основной расчет для оценки ресурса, описание которого предлагается в [1] – это расчет на контактную усталость. Тем не менее, как показывают и практика, и расчеты [2,3] ограничение ресурса по критерию изнашивания является существенно более сильным, чем по критерию контактной усталости. Поэтому рассмотрение червячной передачи на предмет износостойкости материалов является актуальной задачей.

Результаты исследования и обсуждение. Для оценки влияния смазочного материала на процесс изнашивания червячных передач наиболее приемлемым представляется метод сравнительных износных испытаний, когда интенсивность изнашивания определяется при одинаковых условиях, но с изменением одного параметра — состава смазочного материала. Базой для сравнения могут служить данные работы [3]. То, что смазочный материал

оказывает существенное влияние на физические процессы при контактном взаимодействии, отмечалось ранее, [4]. Причем подобные исследования, в силу своей актуальности, постоянно пополняются новыми сведениями, например, отраженными в [5].

Как следует из ряда работ, перечисленных выше, действие пленкообразующих смазочных материалов на процесс изнашивания может привести к существенному изменению степенной зависимости интенсивности изнашивания от нагрузки, включая тенденцию к снижению интенсивности изнашивания с ростом нагрузки до определенных ее значений, лимитируемых процессом пленкообразования.

В результате проведенных экспериментов на износостойкость редукторов типа 5ЧР-80 по подобию испытаний, описанных в [3], была выявлена закономерность, отраженная на рис.1.

Рис. 1. Зависимость интенсивности изнашивания от давления в контакте червячной пары.

- 1 – диапазон значений, получаемый при использовании штатного масла ТМ-18-5;
- 2 – диапазон значений, получаемый при использовании того же масла с добавкой «Стрибойл»

Полученная зависимость является достаточно характерной для случаев использования пленкообразующих смазочных материалов. Подобная зависимость, показанная, например, в работе [6], представляет собой параболу со смещенным относительно начала координат минимумом, причем величина смещения по оси давления (p) указывает на область давления P_0 , в окрестностях которого пленкообразование проходит критическое значение давления, выше которого по мере роста давления процесс пленкообразования оказывается все более затрудненным.

Предложенная зависимость имеет вид

$$I = k(P - P_0)^m,$$

где величина P_0 имеет смысл критического давления пленкообразования, а увеличение значения этого параметра расширяет зону изнашивания с высокой износостойкостью. Следует подчеркнуть, что интерпретация величины P_0 может быть предложена на основе представления о «втором минимуме» коэффициента трения, данном в [4]. Имеется в виду, что «первый минимум» образуется на зависимости коэффициента трения от нагрузки для смазываемого сопряжения в области критического значения параметра Зоммерфельда — при переходе от гидродинамического типа смазки к смешанному. При дальнейшем увеличении нагрузки на контакт, в случае, если смазочный материал является пленкообразующим, вновь образующаяся из хемосорбирующихся активных составляющих смазочного материала пленка ведет себя аналогично вязкой гидродинамической смазке, но с большей вязкостью. В результате минимум возникает повторно, но при большей нагрузке [4].

Как показывают испытания ЧП с различными видами смазочных материалов, появление «второго минимума» коэффициента трения можно наблюдать и при анализе поведения червячного зацепления. Для этого рассмотрим силовые соотношения в этом зацеплении. Траектория колебаний быстроходного вала червячного редуктора должна определяться суммарным действием детерминированных и случайных факторов, что можно описать следующим соотношением [7]

$$\frac{J_2 d^2 \varphi_2}{dt^2} + \frac{K d \varphi_2}{dt} + C_f \varphi_2 = F(\omega_0 - \frac{d \varphi_2}{dt}) d_1 + \delta(\omega) \quad (1),$$

где φ_2 – угол поворота зуба червячного колеса в направлении приложения окружной силы на червяке; J_2 – приведенный момент инерции тихоходного вала; K – характеристический коэффициент, определяемый трением в контакте, или коэффициент демпфирования; C_f – жесткость зуба червячного колеса в направлении приложения окружной силы на червяке; d_1 – делительный диаметр червяка; F – функция изменения силы трения в связи с соотношением угловой скорости вала электродвигателя ω_0 и скорости поворота зуба червячного колеса $d\varphi_2/dt$; $\delta(\omega)$ — случайные составляющие, определяемые погрешностями изготовления. Функция F описывает динамику окружной силы на червяке, определяемой силой трения. С учетом того, что сила трения является проекцией окружной силы на червяке на контактную поверхность, выражение для коэффициента трения в зацеплении имеет вид [8]

$$f = \left(\frac{T_{\text{эд}} d_2}{T_{\text{тор}} d_1} \right) (\cos \gamma)^2 \cos \alpha \quad (2),$$

где d_1 – делительный диаметр червяка, d_2 – делительный диаметр колеса, γ – угол наклона винтовой линии червяка, α – половина угла при вершине витка червяка. При этом $T_{\text{эд}} = \frac{F_{\text{ок1}} d_1}{2}$, где $F_{\text{ок1}}$ – окружная сила на червяке, а $T_{\text{тор}} = \frac{F_{\text{ок2}} d_2}{2}$, где $F_{\text{ок2}}$ – окружная сила на колесе. Очевидно, что формула (2) является прямым аналогом закона Амонтона-Кулона применительно к наклонной плоскости, где роль силы трения играет величина $F_{\text{ок1}}$, а роль нормальной силы – $F_{\text{ок2}}$. Поскольку углы γ и α в процессе работы не меняются, а величина $F_{\text{ок2}}$ определяется тормозным моментом (в рассматриваемом случае он постоянен), то колебания окружной силы на червяке можно объяснить только колебаниями коэффициента трения в контакте червяка и колеса f , [8].

Отметим, что амплитуды вынужденных колебаний на зубцовых и кратных им частотах (ω_k) должны быть выше амплитуд на других частотах [8], поскольку именно на этих частотах происходят динамические взаимодействия зубьев. Поэтому при рассмотрении вынужденных колебаний мы будем оценивать, в первую очередь, именно это соотношение. Коэффициент весомости должен определяться из соотношения согласно [9]:

$$\beta = \frac{F_k}{F_{k=1}},$$

где

$$F_k = \left(\frac{2}{T} \right) \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} F_{\text{max}} \cos \frac{\pi}{T} t \cos \omega_k t dt ,$$

что дает интегральную характеристику силового импульса на частоте ω_k по всему рассматриваемому периоду T , который представляет собой длительность импульса и, как правило, имеет длительность существенно меньшую (в 10 и более раз), чем период зубцовой частоты. Из этого следует, что силовая форма возбуждения никак не может иметь синусоидальную форму колебаний с зубцовой или кратной ей частотой в силу отсутствия синусоидальной формы у самого импульса. В то же время, порождаемые этим импульсом колебания должны быть кратны зубцовой частоте и могут иметь форму гармонических колебаний, но с более высокой частотой, чем зубцовая. Кроме того, сама величина $F_{\max}$ в нашем рассмотрении, когда причиной импульса является не просто встреча нормальных зубьев, а встреча зубьев с дефектами, должна быть функцией этих дефектов

$$F_{\max} = \Phi(\delta\varphi).$$

В связи с изложенным, модель (1) можно представить в виде

$$\frac{J_1 d^2 \varphi_1}{dt^2} + C_f \varphi_1 = [F(\omega_0 - \frac{d\varphi_2}{dt})d_1 + (F_0 \sum F_k [\Phi(\delta\varphi_k) \cos(\frac{\pi}{T_u} t)] \cos \omega_k t) d_1], \quad (3)$$

где J_1 – приведенный момент инерции быстроходного вала; T_u – период взаимодействия погрешностей червяка и колеса, $T_u = \frac{L_\phi}{V}$, где V – скорость проскальзывания, L_ϕ – размер погрешности в направлении проскальзывания; ω_k – зубцовая частота.

Для описания колебаний решение уравнения (3) можно представить в виде (4), предположительно полагая, что последний член является составляющей, слабо зависящей от скорости проскальзывания

$$T(\varphi_1(t)) = A \cos \omega t + z_1(A, t) d_1 + (F_0 \sum F_k [\Phi(\delta\varphi_k) \cos(\frac{\pi}{T_u} t)] \cos \omega_k t) d_1 \quad (4).$$

Видно, что все составляющие уравнения (4) зависят от силы трения, возникающей в контакте червяка и зуба червячного колеса, что подтвердили экспериментальные данные, полученные при стендовых испытаниях редуктора 5ЧР-80. В ходе эксперимента было получено распределение частот колебаний вращающего момента быстроходного вала по доле в общем спектре колебаний при использовании синтетического, минерального и минерального с присадкой масел. Был проведен анализ зависимости максимальной амплитуды момента на быстроходном валу от тормозного момента для доминирующей частоты (частоты автоколебаний) для разных смазочных материалов, рис. 2. Графики для следующих смазочных материалов – минерального масла ТМ-5-18, синтетического ТМ-5-18 и минерального масла с добавкой «Стрибойл» проведены усредненно с применением обработки по методу наименьших квадратов. При этом очевидно, что наилучшими антифрикционными свойствами обладает минеральное масло с добавкой «Стрибойл», что соответствует уравнению (2).

Данное явление можно связать с уменьшением потерь мощности и соответственно с увеличением КПД передачи. По определению КПД передачи

$$\eta = \frac{P_{\text{полн}} - P_{\text{пот}}}{P_{\text{полн}}},$$

где $P_{\text{полн}}$ – полная мощность, $P_{\text{пот}}$ – потерянная мощность.

Рис. 2. Зависимости амплитуды момента на быстроходном валу от тормозного момента:

$$T'_{эд} = \frac{T_{\max}}{T_{эд}} * 100\%, \text{ где } T_{\max} \text{ соответствует максимальному значению размаха колебания}$$

момента на доминирующей частоте; W – область «второго» минимума

В свою очередь потерянная мощность $P_{пот}$ зависит от нескольких составляющих, таких как: потери мощности в подшипниках, барботажные потери мощности, потери в манжетах и потери мощности от трения в зацеплении, т.е.

$$P_{пот} = P_{под} + P_{бар} + P_{ман} + P_{тр.зац}.$$

В работе [10] был проведен эксперимент по измерению КПД червячной передачи, в ходе которого было выявлено, что барботажные потери мощности и потери в манжетах (они не учитываются теоретически) снижают КПД по сравнению с теоретическим на 5-7%. Потерь мощности в подшипниках можно избежать, путем применения подшипников закрытого исполнения, как это было проделано в работе [10]. Учитывая вышесказанное, можно сделать вывод, что общие потери мощности передачи в основном зависят от потерь мощности в результате трения в зацеплении. Исходя из графиков распределения частот колебаний вращающего момента быстроходного вала по доле в общем спектре колебаний, доля мощности, приходящаяся на колебания на доминирующей частоте, составляет порядка 80% от общих потерь мощности на колебания. Таким образом

$$P_{тр.зац.} = \Delta T n,$$

где величину ΔT можно найти из уравнения (4):

$$\Delta T = A \cos \omega t + z_1(A, t) d_1.$$

Данное соотношение показывает, что КПД передачи определяется амплитудой колебаний момента на быстроходном валу и растет пропорционально росту антифрикционных свойств сопряжения «червяк – червячное колесо» в связи с использованием различных смазочных материалов.

Кроме того, необходимо отметить следующую особенность. Если кривую, описывающую зависимость для масла с добавкой «Стрибойл», рис.2, проводить по экспериментальным точкам, то в области значений тормозного момента от 250 до 300 Нм можно выявить локальный минимум, который и будет «вторым минимумом» для сопряжения «червяк – червячное колесо», обозначенном индексом W . Если же отметить, что номинальный момент для редуктора 5Ч-80 составляет 260 Нм, причем ему соответствует давление в контакте

примерно 250 Мпа, то можно констатировать, что область «второго минимума» на рис.2 и область минимума интенсивности изнашивания на рис. 1 практически совпадают.

Заключение. Наличие процесса пленкообразования и формирование «второго минимума» позволяют существенно расширить область допускаемых давлений при эксплуатации червячных передач. Поэтому полученный результат, отраженный на рис.1, является ожидаемым и теоретически обоснованным. На основании полученных экспериментальных данных можно сделать вывод о существенном положительном влиянии пленкообразующей добавки к маслу на износостойкость червячной пары, снижение потерь на трение и соответственно повышение работоспособности и КПД зацепления.

Список литературы

1. Детали машин /Под ред. Ряховского О.А. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. – 520 с.
2. Павлов В.Г. Ресурс работы червячной передачи по критерию износа // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. – №5. – С. 44–48.
3. Андриенко Л.А., Вязников В.А. Ресурс работы червячной передачи по критерию изнашивания // Известия вузов. Машиностроение. – 2011. – №4. – С.3–6.
4. Поляков С.А., Бурумкулов Ф.Х., Куксенова Л.И. Оценка работоспособности трибосистем на основе экстремальных показателей их динамической адаптации // Трение и смазка в машинах и механизмах. – 2009. – №10. – С. С.12–17.
5. Поляков С.А., Захаров М.Н., Лычагин В.В., Гончаров С.Ю. Влияние пленкообразующих смазочных материалов на адаптивность червячных передач // Вестник машиностроения. – 2015. – №11. – С. 37–39.
6. Поляков А.А., Рузанов Ф.И. Трение на основе самоорганизации. – М.: Наука, 1992. – 135 с.
7. Polyakov S.A., Zakharov M.N., Goncharov S.U. and Lychagin V.V. Loading capacity of the Worn Reduction Gearboxes and possibilities to increase it by selecting and applying different lubricating materials. // Journal of machinery manufacture and reliability. – 2014. - No 5. - P. 445-447. Allerton Press, inc., 2014.
8. Поляков С.А., Гончаров С.Ю., Куксенова Л.И. Разработка метода оценки работоспособности червячных передач на основе анализа их триботехнических показателей // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2016. - №5. - С. 81-87.
9. Берестнев О.В., Гоман А.М., Ишин Н.Н. Аналитические методы механики в динамике приводов. – Минск: Наука и техника, 1992. – 238 с.
10. Вязников В.А. Разработка методики прогнозирования технического состояния червячных передач по неравномерности вращения тихоходного вала: Автореферат дис. ... канд. техн. наук. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. – 16 с.

Дата поступления: 22 октября 2018 г.

УДК 534.1

ОПИСАНИЕ ИНТЕНСИВНЫХ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В БАЛКЕ ТИМОШЕНКО, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ

© Анна Викторовна Леонтьева

Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» (ИПМ РАН), Нижний Новгород, Россия
aleonav@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются изгибные волны, распространяющиеся в однородной балке, закрепленной на нелинейно-упругом основании. Динамическое поведение балки определяется теорией Тимошенко. Система уравнений, описывающая изгибные колебания балки, сводится к одному нелинейному уравнению четвертого порядка относительно поперечных смещений частиц балки. Показано, что эволюционное уравнение представляет собой модифицированное уравнение Островского с дополнительным кубично-нелинейным слагаемым. Для эволюционного уравнения найдены точные солитонные решения из класса стационарных волн в виде кинка и антикинка.

Ключевые слова: изгибная волна, балка Тимошенко, нелинейно-упругое основание, эволюционное уравнение, обобщение модифицированного уравнения Островского.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-19-01637).

THE DESCRIPTION OF INTENSIVE FLEXURAL WAVES IN A BEAM OF TYMOSHENKO LYING ON THE ELASTIC FOUNDATION BY MEANS OF THE MODIFIED EVOLUTIONARY EQUATION OF NONLINEAR WAVE DYNAMICS

© A.V. Leonteva

Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia
aleonav@mail.ru

Abstract. In this paper we consider a flexural waves propagating in the uniform beam fixed on the nonlinear-elastic foundation. The dynamic behavior of a beam is defined by Tymoshenko's theory. The system of the equations describing flexural fluctuations of a beam comes down to one nonlinear equation of the fourth order of relatively transverse displacements of particles of a beam. It is shown that the evolutionary equation represents the modified Ostrovsky's equation with additional cubic-nonlinear term. For the evolutionary equation exact solitonic solutions from a class of stationary waves in a look a kink and an antikink are found.

Keywords: flexural wave, Tymoshenko's beam, nonlinear-elastic foundation, evolutionary equation, generalization of the modified Ostrovsky's equation.

Acknowledgements. The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 14-19-01637).

При моделировании процессов взаимодействия транспортных средств и упругих направляющих часто рассматриваются задачи об изгибных колебаниях балки, при учете сдвиговых деформаций и инерции вращения поперечного сечения (модель Тимошенко), лежащей на упругом основании [1–4].

Движение современных высокоскоростных поездов сопровождается интенсивной вибрацией, как самого железнодорожного полотна, так и в окружающем его грунте, что приводит к быстрому изнашиванию железнодорожного полотна и может вызвать сход поезда с рельсов. Поэтому при строительстве железнодорожных магистралей, особенно на мягких почвах, увеличивают жесткость грунта, а это обязывает, в свою очередь, учитывать при расчетах нелинейность упругого основания.

Рассмотрим балку Тимошенко на нелинейно-упругом основании [5, 6]:

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \kappa \mu F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \kappa \mu F \frac{\partial \varphi}{\partial x} + h_1 w + h_2 w^3 = 0 \quad (1)$$

$$\rho I_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - E I_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \kappa \mu F \left(\varphi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (2)$$

$w(x, t)$ – поперечное смещение частиц срединной линии стержня, $\varphi(x, t)$ – угол отклонения сечения стержня от вертикального положения, ρ – плотность материала стержня, F – площадь поперечного сечения стержня, κ – поправочный коэффициент, учитывающий отклонение от теории плоских сечений, его величина зависит от способа определения среднего значения для угла сдвига и характера распределения сдвигов по сечению (для стержня прямоугольного сечения $\kappa = 5/6$), μ – модуль сдвига, h_1 , h_2 – коэффициенты, характеризующие нелинейно-упругое основание, I_y – осевой момент инерции (для прямоугольного поперечного сечения $I_y = a^3 b / 12$), E – модуль Юнга.

Система уравнений (1), (2) сводится к одному уравнению относительно поперечного смещения частиц w :

$$\begin{aligned} & \left(\rho F + \frac{h_1 \rho I_y}{\kappa \mu F} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{E h_1 I_y}{\kappa \mu F} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E I_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho I_y \left(1 + \frac{E}{\kappa \mu} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \\ & + \frac{\rho^2 I_y}{\kappa \mu} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{h_2 \rho I_y}{\kappa \mu F} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w^3 + h_1 w + h_2 w^3 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

В безразмерных переменных уравнение (3) принимает вид:

$$\begin{aligned} & (1 + a_1) \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - a_1 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial z^4} - (1 + a_2) \frac{\partial^4 W}{\partial z^2 \partial \tau^2} + \\ & + a_2 \frac{\partial^4 W}{\partial \tau^4} + a_3 \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W^3 + \frac{a_1}{a_2} W + \frac{a_3}{a_2} W^3 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

где $W = w/w_0$, $z = x/X$, $\tau = t/T$ – безразмерные величины перемещения, координаты и времени, соответственно. Характерные величины приняты равными

$$X^2 = \frac{I_y}{F}, \quad T^2 = \frac{\rho}{E} \frac{I_y}{F} = \frac{I_y}{c_0^2 F},$$

($c_0 = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольных волн в стержне), безразмерные комплексы параметров имеют вид

$$a_1 = \frac{h_1}{\kappa\mu} \frac{I_y}{F^2}, \quad a_2 = \frac{E}{\kappa\mu}, \quad a_3 = \frac{h_2}{\kappa\mu} \frac{I_y}{F^2} w_0^2.$$

Перейдем в уравнении (4) в движущуюся систему координат $\xi = z - c\tau$, $\theta = \varepsilon\tau$, где c – скорость волны, заранее неизвестна, ε – малый параметр ($\varepsilon \ll 1$). Выбор переменных объясняется тем, что возмущение, распространяясь со скоростью c вдоль оси z , медленно эволюционирует во времени из-за нелинейности, дисперсии и диссипации.

Учитывая малость нелинейных и дисперсионных слагаемых, в нулевом приближении находим скорость нелинейной волны

$$c^2 = \frac{a_1}{1 + a_1}.$$

В первом приближении по малому параметру имеем:

$$-2\varepsilon c(1 + a_1) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \theta} + (1 - c^2)(1 - a_2 c^2) \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - a_3(1 - c^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (W^3) + \frac{a_1}{a_2} W + \frac{a_3}{a_2} W^3 = 0. \quad (5)$$

Перепишем уравнение (5) в более компактном виде:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} + d_1 W^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} + d_2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} \right) - d_3 W - d_4 W^3 = 0, \quad (6)$$

где коэффициенты уравнения равны

$$d_1 = \frac{3a_3}{2\varepsilon c(1 + a_1)^2}, \quad d_2 = \frac{a_1 a_2 - (1 + a_1)}{2\varepsilon c(1 + a_1)^3}, \quad d_3 = \frac{a_1}{2\varepsilon c(1 + a_1)a_2}, \quad d_4 = \frac{a_3}{2\varepsilon c(1 + a_1)a_2}.$$

Уравнение (6) можно классифицировать как модифицированное уравнение Островского [7–10], с дополнительным нелинейным слагаемым. Естественно назвать уравнение (6), без последнего слагаемого, модифицированным уравнением Островского, по аналогии, с известными модифицированным уравнением Кортевега – де Вриза (мКдВ) и модифицированным уравнением Бюргерса. Однако понятие "модифицированное" в случае уравнения КдВ имеет несколько иное значение и связано с наличием преобразования Миуры [11], которое переводит решения модифицированного уравнения в решения классического уравнения. Похожих преобразований относительно классических и модифицированных уравнений Бюргерса и Островского пока не найдено.

Модифицированное уравнение Островского не имеет точных решений, но допускает качественное исследование при равенстве нулю старшей производной, как и уравнение Островского. Наличие дополнительного кубично-нелинейного слагаемого позволяет найти точные решения уравнения в виде солитонов.

Для стационарных волн $W(\xi, \theta) = W(\chi)$, $\chi = \xi - \nu\theta$ уравнение (6) запишется так:

$$(-\nu W' + d_1 W^2 W' + d_2 W''')' - d_3 W - d_4 W^3 = 0, \quad (7)$$

где ν имеет смысл скорости нелинейной волны. Считаем, что волна распространяется в положительном направлении оси ξ .

Будем искать решение уравнения (7) методом простейших уравнений [12], используя в качестве простейшего уравнения – уравнение Риккати с постоянными коэффициентами в виде

$$Y'(\chi) = -Y^2(\chi) + B_0, \quad (8)$$

которое имеет решение

$$Y(\chi) = \sqrt{B_0} \operatorname{th}(\sqrt{B_0} \chi). \quad (9)$$

Решение уравнения (7) имеет полюс первого порядка, и поэтому решение типа уединенных волн будем искать в виде

$$W(\chi) = b_0 Y(\chi) + b_1 \quad (10)$$

где $Y(\chi)$ – решение (9) уравнения (8).

Подставляя решение (10) в уравнение (7) и учитывая уравнение Риккати, получаем полином относительно $Y(\chi)$. Приравнявая нулю выражения при одинаковых степенях $Y(\chi)$, получаем систему алгебраических уравнений, из которой находим значения коэффициентов

$$b_0^2 = -\frac{6d_2}{d_1}, \quad b_1 = 0, \quad B_0 = \frac{d_1 d_3}{6d_2 d_4}.$$

Кроме того, находим выражение для скорости нелинейной волны

$$v = -\frac{d_1 d_3}{3d_4} + \frac{3d_2 d_4}{d_1}.$$

Учитывая значения найденных коэффициентов, решение (10) принимает вид

$$W(\chi) = \pm \sqrt{-\frac{d_3}{d_4}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{d_1 d_3}{6d_2 d_4}} \chi \right) \quad (11)$$

Будем считать, что $W_1 = W_+$, $W_2 = W_-$ при подстановке b_{0+} и b_{0-} , соответственно. Решения W_1 , W_2 отличаются лишь знаками перед гиперболическим тангенсом.

Очевидно, что для существования действительных решений, коэффициенты d_1 и d_2 должны быть разных знаков. Для существования ограниченных действительных решений, разных знаков должны быть коэффициенты в парах d_1, d_2 и d_3, d_4 (рис. 1). При положительных подкоренных выражениях в (11) решение $W_1(\chi)$, как и решение $W_2(\chi)$, является уединенной волной и имеет профиль кинка – плавного перепада между двумя значениями функции (рис. 1a). При отрицательных подкоренных выражениях решения $W_1(\chi)$, $W_2(\chi)$ являются периодическими неограниченными (рис. 1b). Наибольший интерес представляют ограниченные решения.

Рис. 1. Профили ограниченных и неограниченных решений $W_1(\chi)$ (сплошная) и $W_2(\chi)$ (длинный пунктир) при различных значениях $d_1 - d_4$

Решения в виде кинков существуют на плоскости одновременно, причем каждый из кинков является симметричным относительно точки перегиба, совпадающей с началом координат. Один из кинков монотонно возрастающий, другой – монотонно убывающий. Кинки имеют одинаковые амплитуды и ширины: $A = 2\sqrt{-\frac{d_3}{d_4}}$, $\Delta = \sqrt{\frac{6d_2d_4}{d_1d_3}}$.

Вернемся к безразмерным параметрам задачи. Выражения для скорости, амплитуды и ширины волны примут вид:

$$v = -\frac{1}{2\varepsilon a_1 a_2} \sqrt{\frac{a_1}{1+a_1}}, \quad A = 2\sqrt{-\frac{a_1}{a_3}}, \quad \Delta = 2\sqrt{\frac{a_1 a_2 - (1+a_1)}{2a_1(1+a_1)}}. \quad (12)$$

Получаем ограничения на параметры $a_1 > 0$, $a_2 > 1$, $a_3 < 0$. Графическое представление зависимостей (12) от параметра a_1 и соответствующие профили решений W_1 , W_2 при фиксированных параметрах изображены на рис. 2, 3.

Рис. 2. Зависимости $A(a_1)$ (длинный пунктир), $\Delta(a_1)$ (сплошная), $v(a_1)$ (пунктир) при фиксированных параметрах a_2 , a_3

Рис. 3. Профили решений W_1 (сплошная), W_2 (длинный пунктир) при фиксированном параметре a_1 ($a_1 > \frac{1}{a_2 - 1}$)

При увеличении значения a_1 амплитуда растет, нелинейная скорость падает, причем волна распространяется в отрицательном направлении оси χ . Ширина фронта волны сначала увеличивается, затем уменьшается. Максимальная ширина фронта волны достигается в точке $a_1 = \frac{1 + \sqrt{a_2}}{a_2 - 1}$ и равна $\Delta = \sqrt{2}(\sqrt{a_2} - 1)$, минимальная – при $a_1 \rightarrow +\infty$ или $a_1 \rightarrow \frac{1}{a_2 - 1}$. При увеличении a_2 точка максимума на рис. 2 сдвигается влево, максимальное значение ширины фронта волны при этом увеличивается.

Таким образом, в работе показано, что учет нелинейности в упругом основании соответствует более точному описанию изгибных волн и позволяет обнаружить стационарные нелинейные волны солитонного типа в виде кинков.

Список литературы

1. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. - М.: Наука, Физматлит, 2001. - 320 с.
2. Metrikine A.V., Verichev S.N. Instability of a moving two-mass oscillator on a flexibly supported Timoshenko beam // Archive of Applied Mechanics. - 2001. - V.71. - P.613-624.
3. Veritchev S.N. Instability of a vehicle moving on an elastic structure. Delft University Press. The Netherlands. - 2002. - 190 p.
4. Lamb J.L. Critical velocities for rocket sled excitation of rail resonance // Johns Hopkins APL Technical Digest. - 2000. - Vol.21, No 3. - P.448-458.
5. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П. Дисперсионные зависимости и самомодуляция изгибных волн в балке Тимошенко, лежащей на упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2006. - № 4. - С.27-31.
6. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П. Несинусоидальные изгибные волны в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании// Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2008. - № 3. - С.30-36.
7. Островский Л.А. Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане // Океанология. - 1978. - Т. 18, №2. - С. 181-191.
8. Островский Л.А., Степанянц Ю.А. Нелинейные волны во вращающейся жидкости // Нелинейные волны: физика и астрофизика. - М.: Наука, 1993. - С.132-153.
9. Гандариас М.Л., Брузон М.С. Симметричный анализ и точные решения для некоторых уравнений Островского // Теоретическая и математическая физика. - 2011. - Т. 168, № 1. - С. 49-64.
10. Stepanyants Y.A. On stationary solutions of the reduced Ostrovsky equation: Periodic waves, compactons and compound solitons // Chaos, Solitons and Fractals. - 2006. - Vol. 28. - P. 193-204.
11. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. - М.: Ленанд, 2017. - 312 с.
12. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики: Учебное пособие. - Долгопрудный: Интеллект, 2010. - 368 с.

Дата поступления: 12 октября 2018 г.

УДК 621.036:681.20

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПЫТОВ Ф.ЛЕРУ

© Александр Анатольевич Шultzhenko, Михаил Борисович Модестов

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения
им. А.А.Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия

aa_shulzhenko.01@mail.ru

Аннотация. В данной работе проведено математическое моделирование тепловых процессов, происходивших в системе, описанной при проведении опытов французского ученого Ф.Леру в 1867г. Результаты, полученные с помощью моделирования на основе оригинальной программы, полностью совпадают с результатами хорошо известных натурных экспериментов. Данный материал представляет интерес для специалистов-разработчиков различных нагревательных устройств, а также студентов, обучающихся по профильным специальностям.

Ключевые слова: эффект Томсона, тепловые поля, внешние тепловые поля, внутренние тепловые поля.

EXPERIMENTS OF F.LERU

© A.A.Shul'zhenko, M.B.Modestov

IMASH RAN, Moscow, Russia

aa_shulzhenko.01@mail.ru

Annotation. In this paper, the mathematical modeling of thermal processes occurring in the system described in the French scientist's experiments in 1867 was carried out. The results obtained with the help of simulation based on the original program fully coincided with the results obtained in the course of experiments. This material is of interest to specialists-developers of various heating devices, as well as students enrolled in related specialties.

Keywords: Thomson effect, thermal field, an external thermal field, thermal field internal.

Все большее применение в различных технических системах находят тканые электронагреватели. Во многих случаях в этих нагревателях используются в качестве тепловыделяющих элементов углеродные (графитовые) нити. Углеродные нити обладают свойствами, которые отличают их от металлов. Одним из них является то, что коэффициент Томсона на четыре порядка больше, чем у металлов, как следствие – можно предположить, что эффект Томсона вносит более существенный вклад в происходящие тепловые процессы. Поэтому очень важно знать, как влияет эффект Томсона на тепловой процесс в углеродных нитях.

Открытие У.Томсоном, эффекта, являющегося одним из проявлений термоэлектричества, сразу привлекло внимание физиков-экспериментаторов. Связано это с тем, что большинство выражений, определяющих термоэлектрические соотношения, и эффект Томсона в том числе, получены феноменологическим путем, и требовали экспериментального доказательства. Одним из таких исследователей был французский ученый Ф.Леру.

Согласно [1], для доказательства эффекта Томсона в 1867г. он провел эксперимент, в котором использовал схему, показанную на (рис.1).

Рис. 1. Общая схема опытов Ф.Леру по доказательству эффекта У.Томсона.

В этом опыте он нагревал середину стержня AC в точке E до температуры 100°C , а концы стержней B и D - до температуры 0°C .

Для упрощения, будем считать, что стержни, используемые в эксперименте, сделаны из одного материала.

В качестве измерителей температуры Ф.Леру, одним из первых, использовал термопары, что позволило ему повысить точность измерений.

Будем считать, что стержни AB , CD имели одинаковую длину, и все три стержня обладали одинаковой площадью сечения.

Так как толщина стержней много меньше их длин, то можно считать, что в поперечном сечении температура не изменялась.

Для большей наглядности, можно представить систему стержней, показанную на рис.1, вытянутой в длину (рис. 2).

Рис. 2. Преобразованная схема опытов Ф.Леру, проведенных для доказательства эффекта У.Томсона.

Когда электрическое поле не воздействовало на проводники в рамках системы, показанной на рис.2, температуры в точках *a* и *b*, измеряемые с помощью термопар, были одинаковыми. Температурное поле в стержнях, неподключенных к источнику электропитания, можно описать выражением при общей относительной длине стержней $AB+AC+CD=1$

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \exp(k'k''x) \quad \text{при} \quad A \leq x \leq B \\ T = \exp(\text{abs}(k'(k''(x - (AB + AC)) - 1))) \quad \text{при} \quad C \leq x \leq D \\ T(x) = T(AC) = 100^\circ\text{C} \quad \text{при} \quad A \leq x \leq C \\ T(x) = T(0) = T(1) = 0^\circ\text{C} \\ T_{cp} = T_l \end{array} \right. \quad (1)$$

$T(x)$ – текущее значение температуры, k' , k'' – поправочные коэффициенты; x – текущее значение координаты.

Распределение температур в системе стержней, когда они не подключены к источнику электропитания, показано на рис.3, кривая 1. В силу симметрии схемы нагрева и охлаждения стержней в точках *a* и *b* температуры будут одинаковы.

Теперь рассмотрим, как формируется тепловой сигнал при воздействии не только теплового, а и электрического полей. То есть, в общем случае, присутствует одновременно и источник внутреннего тепловыделения, и источник внешнего теплового воздействия, и перемещение электронов под воздействием электрического поля.

Внешняя температура в стержнях в точке *E* также поддерживалась на уровне 100°C , а на концах стержней, в точках *B* и *D* – 0°C (рис.2).

Рис.3. Тепловые поля, получаемые: 1 – при отключенном электропитании за счет нагрева и охлаждения частей стержня; 2 – тепловыделяющим элементом только при прохождении электрического тока.

Подключая электропитание к системе стержней, получаем тепловое поле, которое образуется внутренним источником тепла, за счет прохождения электрического тока без учета эффекта

Томсона. Этот тепловой процесс можно описать с помощью одномерного уравнения Фурье для стационарных процессов [2]

$$\lambda \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x'^2} + q_v = 0 \quad (2)$$

λ – коэффициент теплопроводности стержня; $\Delta T = T - T_{cp}$, T – текущее значение температуры, T_{cp} – температура окружающей среды, $x' = \frac{x}{l}$ – текущее относительное значение

координаты; $q_v = \frac{P}{V} = \frac{P}{S_{сеч} \cdot l}$ – объемное тепловыделение; $S_{сеч}$ – площадь сечения стержней; l – суммарная длина стержней; P – мощность источника электропитания; V – суммарный объем стержней.

Аналитическим решением этого уравнения, согласно [3], является выражение

$$T_{нх} = T_{cp} + \frac{P}{2 \cdot \alpha_{ст} \cdot S_{сеч}} + \frac{P \cdot l}{2 \cdot \lambda_{ст} \cdot S_{сеч}} (x' - x'^2) \quad (3)$$

α – коэффициент теплоотдачи во внешнюю среду.

На рис.3 кривая 2 показывает температурное поле, согласно (3), образованное за счет пропускания электрического тока. То есть, данное тепловое поле тоже обладает симметричным распределением температур.

Таким образом, при проведении опыта Ф.Леру одновременно в системе стержней действуют четыре тепловых поля:

- тепловое поле, созданное с помощью внешнего нагрева стержней в точке E , $T(x) = T_{внеш}(l/2) = 100^\circ C$;
- тепловое поле, образованное за счет пропускания электрического тока, то есть внутренних источников тепла;
- тепловое поле, поддерживающее температуру $0^\circ C$ на концах стержней в точках C и D ;
- температура внешней среды.

Будем считать, что температура внешней среды постоянна и равна T_{cp} .

При прохождении электрического тока в условиях присутствия всех тепловых полей проявляется эффект Томсона, который описывается выражением

$$\frac{dP}{dx'} = \tau \cdot I \cdot \frac{dT}{dx'} \quad (4)$$

τ – коэффициент Томсона; I – значение электрического тока, протекающего по стержням.

Согласно [1, 3], при совпадении направленности теплового и электрического полей происходит поглощение энергии, а при противоположной направленности теплового и электрического полей выделение энергии. В результате, суммарное тепловое поле перестает быть симметричным и происходит его смещение.

В отличие от (1), при постановке задачи Каши добавляется выражение, описывающее тепловое поле, образованное за счет нагрева проходящим электрическим током: одномерное уравнение Фурье для стационарных процессов (2), и уравнением Томсона (4). В общем, задачу Каши можно записать

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x'^2} + q_v = 0 \\ \frac{dP}{dx'} = \tau \cdot I \cdot \frac{dT}{dx'} \\ T = \exp(k' k'' x') \quad \text{при } 0 \leq x' \leq 0.5 \\ T = \exp(\text{abs}(k'(k''(x-0.5)-1))) \quad \text{при } 0.5 \leq x' \leq 1 \\ T(x) = T(0) = T(1) = 0^\circ \text{C} \\ T(x) = T(1/2) = 100^\circ \text{C} \end{array} \right. \quad (5)$$

Используя метод непосредственной аппроксимации, формируем программу решения системы уравнений (5) в среде MATLAB.

Результат решения показан на рис.4 сплошной линией.

Как хорошо видно из этого решения, температуры T_a и T_b в точках стержней a и b , к которым были подключены термопары и показанные на рис.4, будут различны.

При смене направления электрического поля (на рис.4 показано пунктирной линией) направленность теплового поля в точках измерения будет меняться на противоположную.

Рис.4. Тепловые поля, распределенные вдоль проводников при проведении опытов Ф.Леру (при одновременном воздействии внутренних и внешних источников тепла) при разных направлениях электрического поля (сплошная и пунктирная линии).

Таким образом, полученный результат, позволяет наглядно продемонстрировать тепловые процессы, происходящие не только в двух точках, как это было сделано при проведении опытов, а и во всей системе стержней, и совпадает с результатом эксперимента, проведенного Ф.Леру, и показавшего, что при прохождении по стержням электрического тока, при одновременном воздействии симметричного теплового поля, образуется суммарное несимметричное тепловое поле (рис.4).

Проведенное моделирование позволяет глубже разобраться в природе возникновения эффекта Томсона, и представляет интерес для специалистов, занимающихся

проектированием нагревателей, особенно для биологических объектов, и студентов, профильных специальностей.

Список литературы

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Учебное пособие: Для вузов. Электричество.Т.3. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 656 с.
2. Шульженко А.А., Модестов М.Б. Влияние эффекта Томсона на распределение температуры в тепловыделяющих элементах – углеродных нитях//Вестник научно-технического развития. – 2012. - № 6. - С. 33-40.
3. Шульженко А.А., Модестов М.Б. Метод расчета тепловыделяющих элементов на основе углеродных (графитовых) нитей// Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2015. - № 4. - С. 103-110.

Дата поступления: 19 октября 2018 г.