Вестник научно-технического развития Bulletin of Science and Technical Development

Номер 5 (129), май 2018 г.

DOI: 10.18411/vntr2018-129

Издается с 2007 года

Издание зарегистрировано в Министерстве РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации Эл. № ФС77-29768.

ISSN 2070-6847

*Журнал выпускается под научным руководством Федерального государственного
бюджетного учреждения науки Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН*

ОГЛАВЛЕНИЕ № 5 (129), 2018

Владимир Константинович Асташев, Виталий Львович Крупенин. Динамические принципы разработки виброударных машин.....стр. 3 – 10

Владимир Иванович Ерофеев, Даниил Александрович Колесов, Анна Викторовна Леонтьева. Нелинейные периодические волны в гибкой направляющей, взаимодействующей с упруго-инерционным основанием.....стр. 11 – 18

Олег Иванович Косарев, Алла Константиновна Пузакина. Задача создания гидроакустической прозрачности конечной цилиндрической оболочки в дальнем поле.....стр. 19 – 26

Геронтий Жорович Сахвадзе, Омар Георгиевич Киквидзе. Моделирование остаточных напряжений в тазобедренном суставе из титанового сплава BT-6, возникающих при лазерно-ударно-волновой обработке.....стр. 27 – 40

Издание зарегистрировано в Министерстве РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации Эл. № ФС77-29768.

ISSN 2070-6847

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ РАЗРАБОТКИ ВИБРОУДАРНЫХ МАШИН

©Владимир Константинович Асташев¹, Виталий Львович Крупенин^{1,2}

¹ИМАШ РАН, Москва, Россия

²Московский Политехнический Университет, Москва, Россия

v_astashev@mail.ru, krupeninster@gmail.com

Аннотация. Дается обзор важнейших динамических эффектов и явлений, сопровождающих функционирование разнообразных машин и устройств виброударного действия, важнейшего подкласса вибрационных машин. Показано, что достижение высокой эффективности таких систем основано на использовании принципов, основанных на содержательном использовании этих эффектов и явлений.

Ключевые слова: виброударная система, нелинейный резонанс, вибрационная машина, линейная система, сильная нелинейность.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-08-00168).

DYNAMIC PRINCIPLES OF DEVELOPMENT OF VIBRO-IMPACT MACHINES

©Vladimir. K. Astashev¹, Vitaly L. Krupenin^{1,2}

¹IMASH RAN, Moscow, Russia

²Moscow Politech, Russia

v_astashev@mail.ru, krupeninster@gmail.com

Abstract. An overview of the most important dynamic effects and phenomena accompanying the operation of various machines and devices of vibro-impact action, the most important subclass of vibrating machines. It is shown that the achievement of high efficiency of such systems is based on the use of principles based on the meaningful use of these effects and phenomena.

Keywords: vibro-impact system, nonlinear resonance, vibration machine, linear system, strong nonlinearity.

Acknowledgements. The work was supported by the RFBR (project No. 18-08-00168).

Введение. Вибрационные машины и, среди них, машины виброударного типа широко используются в сельскохозяйственном и промышленном производстве, являясь одним из важнейших подклассов современных технологических машин. К ним относятся традиционные машины (вибромолоты, дробилки, вибрационные насосы и многие другие), а также современные, например, ультразвуковые технологические устройства и другие важные инженерные объекты.

В большинстве случаев эти устройства разработаны без учета анализа корректных и физически обоснованных динамических моделей, а общая теория организации вибрационных машин далека от завершения. Это делает невозможным разработку схем проектирования подобных объектов, достижение предельной полезности технологических процессов и обеспечение надежной и безопасной работы машин и устройств.

Конструкция вибрационных машин должна основываться на нескольких универсальных научных принципах, которые имеют четкую инженерную интерпретацию. Во-первых, следует упомянуть принцип резонансности. После правильной настройки машины, как правило, рабочее тело должно выполнять колебания с максимальной амплитудой, так как в обрабатываемую среду должна быть с предельной полезностью вложена максимально возможная энергия. Кроме того, машина реализует вибрационные технологические процессы, которые в основном - нелинейные. Поэтому проблема резонансной настройки становится нетривиальной.

Во-вторых, - принцип использования возникающих нелинейных динамических эффектов. Поскольку современные вибрационные машины — это почти всегда нелинейные объекты весьма сложной структуры, для которых характерна разнообразная специфика, разработчики должны использовать неизбежно возникающие эффекты для улучшения качества машин.

Третий принцип - ресурсосбережение. Вибрационные машины должны быть спроектированы таким образом, чтобы затраты на любые ресурсы для их создания и функционирования сокращались до необходимого минимума.

Далее формулируются вышеизложенные и некоторые другие принципы, позволяющие создавать машины, удовлетворяющие условию предельной полезности. Сформулированные принципы тесно взаимосвязаны. Если они смогут быть реализованы, вибрационная машина будет использоваться с максимальной пользой.

1. О виброударных машинах. Машины виброударного действия – возможно, важнейший подкласс вибрационных машин [1, 2]. Многочисленные образцы таких машин используют при погружении в грунт свай, труб, шпунта. Их применяют при разного рода трамбовании, уплотнении, рыхлении, а также прокладке подземных коммуникаций. Дробление, помол, смешивание порошков при их одновременном измельчении (гомогенизация) и другие подобные технологии широко востребованы и в химической, и в пищевой промышленности, строительстве, горном деле и в других важных отраслях производства. Вибрационные дробилки и грохоты – составляют основу горнорудной промышленности. Виброударное формование железобетонных изделий с успехом используют в городском и сельском строительстве. В строительстве широко используют и ручные виброударные машины: они способствуют разрушению прочных грунтов, асфальта, бетона, пробивке проходов и ниш. С их помощью сверлят отверстия, забивают костыли и т. д. Отбойные молотки и перфораторы необходимы для бурения скважин и шпуров. При обслуживании железных дорог для выправки путей применяют ручные виброударные шпалоподбойки. Каждая такая машина определяется триадой «двигатель-колебательная система-технологический процесс». В качестве двигателей используют практически все известные их типы. Специфика колебательных систем определяются, в основном, конструктивными особенностями и рабочими параметрами. В основе каждого технологического процесса лежат динамические явления, сопровождающие систематические соударения твердых тел. Раздел теории нелинейных колебаний, занимающийся изучением этих явлений, называют теорией виброударных систем. В этой работе рассмотрены вопросы данной теории применительно к научному обоснованию общих принципов проектирования машин виброударного действия.

2. Виброударные системы. На рис.1, а показана стандартная схема вибромолота [3] для погружения в грунт свай, труб, металлического шпунта. Система представляет собой двухвальный бестрансмиссионный вибровозбудитель 1 направленных вертикальных колебаний с ударником 3. В корпусе вибровозбудителя смонтированы два электродвигателя, на параллельных валах которых, синхронно вращающихся в различных направлениях, закреплены дебалансы 2. Ударная часть и нижняя плита 4 с наковальней 5 соединены между собой рабочими пружинами 6. Наголовник 7 соединяется с погружаемым элементом. При

вращении дебалансов ударник 3 колеблющегося вибровозбудителя наносит частые (до десятков Гц) удары по наковальне 5, установленной свободно на нижней плите молота и передающей удары непосредственно погружаемому элементу.

Распространенная модель – так называемый ударный осциллятор [4, 5] – дана на Fig.1, *b*. Здесь параметры осциллятора определяются конструктивными параметрами колебательной системы вибромолота, параметры внешней силы – вибровозбудителя.

Рис.1 Виброударные системы: *a* - вибромолот, *b* - ударный осциллятор, *c* – система общего вида.

На рис. *c* показана схема виброударной системы общего вида: две, взаимодействующие через соударения тел с массами m_I и m_{II} , произвольные линейные стационарные подсистемы $A^{(I)}$ и $A^{(II)}$. Действующие силы приложены в некоторых заданных точках $x_k^{(I,II)}$ обеих подсистем. Динамика объединённой системы описывается операторным уравнением

$$u(t) = u_0(t) - L(i\omega)\Phi[u(t), i\omega u(t)], \quad (1)$$

где $u(t)$ - неизвестное относительное перемещение соударяющихся тел, $u_0(t)$ - это же перемещение, но при пренебрежении ударами (решение линейной задачи), $L(i\omega)$ - динамическая податливость, приведенная к точке соударения [5, 6], символ $(i\omega)$ - может пониматься как оператор дифференцирования по времени; $i^2 = -1$; $\Phi[u(t), i\omega u(t)]$ - силовая характеристика ударного взаимодействия.

Если некоторое соударение происходит в момент времени $t = t_k$, а удар моделируется по Ньютону [5], то $\Phi = -J\delta(t - t_k)$, причём $J = (1 + R)m|\dot{u}(t_k - 0)|$ - импульс удара, $0 < R \leq 1$ - коэффициент восстановления, $m = m^{(I)}m^{(II)}(m^{(I)} + m^{(II)})^{-1}$ - приведённая масса соударяющихся тел, а $\delta(t)$ - функция Дирака.

Уравнение (1) может быть исследовано частотными [5], временными [7] или частотно-временными методами [6]. Методы теории виброударных систем даны также в [8-11].

Если использовать частотно-временные методы, то для режима движения с периодом $T = 2\pi\omega^{-1}$ после подстановки представления силы Φ в формулу (1) можно получить:

$$u(t) = u_0[t - \varphi(\omega)] - J(\omega) \sum L(ik\omega) \exp(ik\omega t); \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2)$$

где $\varphi(\omega)$ - фаза виброударного режима. Для задачи о расчёте вибромолота (рис. 1, *a*) $u_0[t - \varphi(\omega)] = D(\omega) \cos(\omega t - \varphi)$; $D(\omega) = B|L(i\omega)|$; $L(i\omega) = [(\Omega_1^2 - \omega^2) + i2b_1\omega]^{-1}$; $\Omega_1^2 = cm^{-1}$; $b_1 = bm^{-1}$.

Анализируя решение (2) можно получить амплитудно-частотные характеристики (зависимости $A(\omega)$) виброударной системы. Для общей системы (Рис.1, *c*) качественную картину даёт Рис. 2.

В отличие от стандартной АЧХ линейной системы, здесь могут проявиться специфические изгибы и характерные ветви кривой. На рис. 2 обозначены собственные частоты объединенной линейной системы $A - \{\Omega_k\}$; n – число её степеней свободы, оно равно сумме степеней свободы подсистем $A^{(I)}$ и $A^{(II)}$.

Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) виброударной системы

После превышения амплитудой значения равного величине зазора при частоте возбуждения меньшей частоты линейного резонанса происходят колебания с соударениями малой амплитуды и интенсивности.

Точка 1 отвечает достижению максимально больших амплитуд; точка 2 – срыву колебаний с соударениями и скачкообразному переходу в точку 3 – на линейный безударный режим до достижения ограничителя. Точка 4 соответствует обратному переходу к колебаниям с соударениями, которые также возникают «скачком» при уменьшении частоты; 5 – точка антирезонанса.

Видно, что имеется двузначность и даже трёхзначность режимов. Пунктиром обозначены физически нереализуемые неустойчивые режимы.

На практике удаётся возбудить колебания лишь в окрестности нескольких первых собственных частот. Для модели вибромолота в виде «ударного осциллятора» – системы с одной степенью свободы (рис. 1, б), АЧХ качественно сохраняет свой вид, но «высшие максимумы» будут отсутствовать. Точка 1 в этом случае отвечает частоте $2\Omega_1$. Рассматриваемая АЧХ отвечает явлению нелинейного резонанса [4-6].

3. Принцип резонансности. Основное требование, предъявляемое ко всякой современной машине – высокая эффективность [12]. Машина виброударного действия, следовательно, должна тратить, собственно, на технологический процесс максимально возможную энергию E , которая через исполнительный орган будет вкладываться в обрабатываемые среды или материалы.

Мерой этой энергии может служить амплитуда колебаний рабочего органа (A) или импульс удара (J): $A^2(\omega) \sim J^2(\omega) \sim E(\omega)$. Здесь подчеркнута зависимость всех величин от частоты режима. Если возбуждение осуществляется синусоидальной силой $B\cos\omega t$, то при помощи рис. 2 можно увидеть, что наибольшая энергия вкладывается в обрабатываемую среду на частотах резонанса, отвечающих точке 1 и подобным точкам в области высших частот. Эти частоты существенно отличаются от частот линейного резонанса; настройка машин виброударного действия на них – неэффективна.

Сказанное и определяет важный принцип, который должен быть положен в основу конструирования машин виброударного действия: *конструкция машины должна определяться параметрами, допускающими настройку машины в нелинейный резонанс.*

Значения указанных частот могут быть найдены при помощи соотношения (2) и определяться как решения ($\omega = \omega_1, \dots, \omega_n$) частотного уравнения вида:

$$\sum L(ik\omega) = 0; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3)$$

Подробности, связанные с решением частотного уравнения (3) см. в книге [6].

Необходимо отметить, что в нелинейном (виброударном) случае само понятие резонанса существенно усложняется, и, в определённом смысле, резонансными оказываются частоты, занимающие некоторый интервал или систему интервалов. Для виброударной системы с одной степенью свободы, например, это интервал $(\Omega_1, 2\Omega_1)$.

Значение амплитуды $A = A^* \approx A(2\Omega_1)$ отвечает предельно возможной амплитуде при заданных характеристиках привода и сопротивления обрабатываемой среды: все реализуемые амплитуды $A \leq A^*$. Если ввести параметр

$$\mathcal{G} = \frac{A}{A^*} \times 100\%, \quad (2)$$

называемый коэффициентом эффективности, то можно установить, что, например, для резонансных ультразвуковых технологических машин, также относящихся к классу машин виброударного действия, реализовать предельные возможности можно тогда, когда значение эффективности классическом смысле равно 50% ([13, 14]).

4. Стабилизация резонансных режимов. Отличительная особенность реализации нелинейных резонансных режимов – их неустойчивость. Из графика рис.2 видно, что при отклонении частоты вправо от значения, отвечающего предельно возможной амплитуде, эффективный виброударный режим срывается. Следовательно, мы приходим к ещё одному важному принципу.

При конструировании резонансной виброударной машины необходимо предусмотреть систему стабилизации резонансного режима.

Такая система должна обеспечить удержание колебаний вблизи точки 1 АЧХ рис.2. Это может быть выполнено, например, при помощи разного рода систем автоматической подстройки частоты или при реализации каких-либо тому подобных схем. Однако, представляется, что наиболее эффективна – организация авторезонансной схемы возбуждения виброударной машины: Рис.3 [13, 14].

Рис.3. Схема авторезонансной машины.

Колебательная система, представляет из себя, например, вязкоупругий стержень длины l , и совершающий продольные колебания под действием силы f_s , приложенной в некотором

сечении $x=s$. В результате вибрация передаётся в зону обработки, где возбуждается виброударный технологический процесс. Возбуждающая сила создается при помощи, охватывающей стержень, цепи обратной связи. Она содержит датчик 1, регистрирующий перемещение сечения $x=l$, усилитель 2, фазовращатель 3 и преобразователь 4, создающий силовое воздействие.

При определенной фазе сигнала обратной связи, устанавливаемой фазовращателем Ф, возбуждаются резонансные колебания, частота которых зависит, в частности, и от технологической нагрузки. Если фазовый сдвиг выбран так, что разность фаз между колебаниями инструмента и создаваемой вибровозбудителем силой соответствует резонансному значению, то устройство обеспечит реализацию резонансных режимов при изменении нагрузки и параметров колебательной системы в широких пределах.

Описываемая система позволяет «пройти» все устойчивые ветви АЧХ (рис. 2) в режиме автоколебаний и обеспечить устойчивые виброударные режимы, соответствующие точке 1. В этой точке (её также называют точкой границы условий существования резонансных режимов) АЧХ сливается со штрихпунктирной линией, соответствующей движению, которое могло бы существовать без учета сил трения и возбуждения.

Таким образом, организация схем авторезонансного возбуждения виброударных процессов позволяет добиться максимума практической эффективности технологического процесса при минимуме возможных энергетических затрат. Поэтому такая схема отвечает функционированию машины в режиме максимальной энергоэффективности.

Это находится в согласии с ещё одним важным принципом конструирования современных технологических машин – «максимум эффективности при минимуме энергозатрат».

5. Нелинейные динамические эффекты. С точки зрения современной нелинейной механики, машины виброударного действия оказываются сильно нелинейными динамическими объектами, поскольку нелинейные факторы, вносимые соударениями, оказывают на характеристики движения определяющие влияния. *Знание и учёт динамических эффектов, сопровождающих работу этих машин и проявляющиеся вследствие наличия сильной («ударной») нелинейности составляют сущность весьма важного принципа конструирования машин этого типа.* Дадим краткое описание таких эффектов, которые, вообще говоря, могут проявиться в каждой нелинейной системе, но особенно явно проявляются именно для виброударных систем.

1. *Генерирование высших гармонических составляющих.* Виброударные процессы обладают весьма представительными спектрами. Пользуясь формулой (2) можно показать, что высшие гармоники могут оказывать на поведение систем определяющее влияние.

2. *Затягивание по частоте и амплитуде.* Получить интенсивные виброударные режимы (точка 1 на АЧХ рис.2) можно плавным увеличением частоты возбуждения после прохождения линейных резонансов (*явление затягивания по частоте*). Импульс удара пропорционален величине зазора. Плавно увеличивая зазор, можно добиться увеличения амплитуды колебаний и интенсивности виброударного режима (*явление затягивания по амплитуде*).

3. *Срыв и жёсткий запуск.* Как отмечалось, после прохождения границы условия существования резонансных режимов, происходит скачкообразное уменьшение амплитуды колебаний (от точки 2 до точки 3 АЧХ) – *срыв*. Возврат к резонансным виброударным режимам возможен только после придания системе дополнительного запускающего воздействия на частоте меньшей частоты срыва (*возможность жёсткого запуска*). Возврат без жесткого запуска возможен только после существенного уменьшения частоты (точка 4).

4. *Субгармонические и комбинационные резонансные режимы.* Режимы движения частоты ωl^{-1} могут существовать за счет действия сил более высокой частоты ω , l -натуральное число (*субгармонические резонансные режимы типа 1:l*). На этих режимах первая гармоника внешней силы вкладывает энергию на l -й гармонике решения (2), вторая –

на $2l$ -й и т.д. При наличии периодической внешней силы, содержащей большое число высших гармоник возможно установление комбинационных резонансных режимов частоты $\omega p l^{-1}$. Здесь энергия p -й гармоники внешней силы вкладывается на l -й гармонике решения (2) и так далее.

5. *Почти периодические и хаотические режимы, дребезг.* В некоторых случаях периодические виброударные режимы движения теряют свою стабильность или возбуждающие силы носят сложный характер. Тогда в системах могут возникнуть сложные виброударные режимы: *почти-периодические* (их спектр состоит из гармоник с несоизмеримыми частотами); *хаотические со сплошным спектром*. Вблизи частот линейного резонанса возможны также режимы со многими ударами за период движения (*режимы с дребезгом*).

Рис.4. Резонансная виброударная испытательная система.

На Рис.4 показана схема испытательного виброударного устройства, воспроизводящего виброударные воздействия натурным способом. Три модуля, содержащие упруго подвешенные ударники настроены в субгармонические резонансные режимы смонтированы на вибрирующей платформе.

Удары наносятся по рабочей платформе, на которой зафиксирован объект испытаний. Настройка устройства производится при помощи расчетных формул, следующих из представления (2), адаптированного к данной задаче [15]. Рассчитываются также места установки модулей и параметры системы.

Система снабжена вспомогательным устройством, позволяющим обеспечить жёсткий запуск, в данном случае встряхивание, в случае, возникновения в силу каких-либо случайных причин срыва резонансных субгармонических режимов. Возможна организация работы системы по авторезонансной схеме.

Заключение. Машины виброударного действия являются сильно нелинейными техническими объектами, в которых проявляются многочисленные специфические динамические эффекты. Изучение и учёт этих эффектов необходим, как и при конструировании высокоэффективных и ресурсосберегающих систем, так и для осуществления их текущей настройки на режимы максимальной практической эффективности. Главный объект внимания при этом – резонансные виброударные режимы движения и, сопровождающие их возникновение, нелинейные динамические явления.

Список литературы

1. Вибрации в технике: Справочник. Т.4. Вибрационные машины и процессы. - Москва: Машиностроение, 1981. - 510 с.
2. Бабицкий В. И., Крупенин В.Л. Машины ударного действия. - Москва: Знание, 1987. - 62 с.
3. Кожевников С.Н., Есипенко Я.И., Раскин Я.М. Механизмы. Механизмы. Справочник. - Москва: Машиностроение, 1976. - 784 с.

4. Асташев В.К. К динамике осциллятора, ударяющегося об ограничитель// Машиноведение. - 1971. - № 2. - С. 5 – 9.
5. V. I. Babitsky, Theory of Vibro-Impact Systems and Applications. - Berlin: Springer-Verlag, 1998. - 318 p.
6. Babitsky V.I., Krupenin V.L Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. - Berlin: Springer-Verlag, 2001. - 404 p.
7. Кобринский А.Е. Механизмы с упругими связями. (Mechanisms with elastic bonds). - Moscow: Nauka, 1964. - 392 p. (In Russian).
8. Вибрации в технике: Справочник. Т.2. Колебания нелинейных механических систем. - Москва: Машиностроение, 1981. - 352 p.
9. Viba, J., Lavendelis, E. Algorithm of synthesis of strongly non-linear mechanical systems. In Industrial Engineering - Innovation as Competitive Edge for SME, 22 April 2006. - Tallinn, Estonia. - P. 95–98.
10. Ibrahim R.A. Vibro-Impact Dynamics: Modeling, Mapping and Applications. - Berlin: Springer-Verlag, 2009. - 312 p.
11. Luo A.C.J., Guo Y. Vibro-impact Dynamics. - Berlin: Springer-Verlag, 2013. - 213 p.
12. Vladimir Astashev, Vitaly Krupenin Efficiency of vibration machines //Engineering for Rural Development. - Jelgava, Latvia. – 2017. - P.108-113.
13. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Нелинейная динамика ультразвуковых технологических процессов. Москва: МГУП им. Ивана Фёдорова, 2016. - 372 с.
14. Astashev V.K., Babitsky V.I. Ultrasonic Processes and Machines. Dynamics, Control and Applications. - Berlin: Springer-Verlag, 2007. - 330 p.
15. Веприк А.М., Вознюк А.Д., Крупенин В.Л., Чирков И. М. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний. - Ленинград: Машиностроение, 1987. - 87 с.

Дата поступления: 30 апреля 2018 г.

УДК 534.1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ГИБКОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С УПРУГО-ИНЕРЦИОННЫМ ОСНОВАНИЕМ

© Владимир Иванович Ерофеев, Даниил Александрович Колесов,
Анна Викторовна Леонтьева

Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» (ИПМ РАН), Нижний Новгород, Россия
erof.vi@yandex.ru

Аннотация. В настоящей работе рассматривается динамическая задача для системы, состоящей из одномерной гибкой направляющей (струна), лежащей на упруго-инерционном основании. Система уравнений динамики сводится к одному кубично-нелинейному уравнению четвертого порядка относительно поперечных смещений струны. В зависимости от соотношения масс струны и упруго-инерционного основания, эволюционное уравнение имеет три предельных случая: модифицированное уравнение Островского, уравнение Римана с кубической нелинейностью, уравнение ангармонического осциллятора с кубической нелинейностью. В каждом случае изучаются особенности распространения нелинейных периодических волн.

Ключевые слова: гибкая направляющая, упруго-инерционное основание, поперечная волна, эволюционное уравнение.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-19-01637).

NONLINEAR PERIODIC WAVES IN A FLEXIBLE GUIDE INTERACTING WITH AN ELASTIC-INERTIAL FOUNDATION

© V.I. Erofeev, D.A. Kolesov, A.V. Leonteva

Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia
erof.vi@yandex.ru

Abstract. In this paper we consider a dynamic problem for a system consisting of a one-dimensional flexible guide (a string) resting on an elastic-inertial foundation. System of the equations of dynamics is reduced to one fourth-order cubic-nonlinear equation relative to transverse displacements of the string. Depending on the string and the elastic-inertial foundation mass ratio, the evolutionary equation has the following three extreme events: the modified Ostrovsky equation, the Riemann equation with a cubic nonlinearity, the equation for an anharmonic oscillator with a cubic nonlinearity. In each case, the features of the propagation of nonlinear periodic waves are studied.

Keywords: flexible guide, elastic-inertial foundation, transverse wave, evolutionary equation.

Acknowledgements. The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 14-19-01637).

Многие элементы машиностроительных конструкций, в частности, несущих движущиеся нагрузки (путевая структура, контактный провод) рассматриваются в виде одномерной системы (струна, балка), взаимодействующей с деформируемым основанием. Для расчета конструкций, лежащих на грунте, в основном, используются три модели основания: 1) винклерова модель; 2) модель упругого полупространства; 3) комбинированная модель упругого основания.

Наиболее приемлемой для практических целей моделью является винклерово основание, поскольку результаты расчета конструкций с использованием этой модели близко соответствуют опытным данным [1].

При исследовании движения нагрузок вдоль одномерных упругих систем основание задается линейно-упругим (основание Винклера) или вязкоупругим, что позволяет учитывать возможность его сопротивления силовому воздействию. При этом основание как динамическая система, как правило, не рассматривается.

А.И. Весницкий [2] предложил математическую модель, обобщающую модель Винклера путем учета инерционности упругого основания, с которым взаимодействует струна, совершающая малые поперечные колебания.

Дисперсионные свойства рассматриваемой системы и особенности генерации в ней волн движущимся источником изучались в работах [3-6].

Распространение поперечных волн конечной амплитуды в струне, лежащей на упруго-инерционном основании, описывается нелинейной системой двух дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c_v^2 \left(1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{\rho_0 S} (u_1 - u_2) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{2\gamma}{\rho_g} u_2 = \frac{\gamma}{\rho_g} u_1, \quad (2)$$

где $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ – поперечные отклонения струны и средней линии основания от равновесного положения, ρ_0 , S – объемная плотность и площадь поперечного сечения одномерной гибкой нерастяжимой струны, γ , ρ_g – жесткость и погонная масса упруго-инерционного основания, $c_v = \sqrt{N/(\rho_0 S)}$ – скорость распространения поперечных волн в струне в отсутствии упруго-инерционного основания. В начальный момент времени сила натяжения струны равна N и положение струны совпадает с осью x .

Первое уравнение системы описывает волны, распространяющиеся вдоль струны, второе – динамику упруго-инерционного основания, взаимодействующего со струной.

Система уравнений (1), (2) сводится к одному уравнению относительно поперечных смещений струны:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_3 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} - a_4 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^2 \partial z^2} + a_5 U - a_6 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (3)$$

где $U = u_1/u_0$ – безразмерное перемещение, $z = x/X$, $\tau = t/T$ – безразмерные величины координаты и времени, характерные величины приняты равными

$$T^2 = \frac{\varepsilon \rho_g}{\gamma} \left(1 + \frac{2 \rho_0 S}{\rho_g} \right), \quad X^2 = \frac{2 \varepsilon}{\gamma} \rho_0 S c_v^2,$$

a_i ($i = 2..7$) – безразмерные комплексы

$$a_2 = 1, a_3 = \frac{\rho_0 S}{\varepsilon \rho_g \left(1 + \frac{2\rho_0 S}{\rho_g}\right)^2}, a_4 = \frac{1}{2\varepsilon \left(1 + \frac{2\rho_0 S}{\rho_g}\right)},$$

$$a_5 = \varepsilon, a_6 = \frac{3u_0^2 \gamma}{4\varepsilon \rho_0 S c_v^2}, a_7 = \frac{3u_0^2 \gamma}{8\varepsilon^2 \rho_0 S c_v^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{2\rho_0 S}{\rho_g}\right)},$$

причем $a_7 = \frac{a_4 a_6}{a_2}$.

Полагая далее нелинейность малой, рассмотрим различные случаи соотношений массы струны $\rho_0 S$ и погонной массы упруго-инерционного основания ρ_g .

Если погонная масса струны существенно превосходит погонную массу упруго-инерционного основания ($\rho_0 S \gg \rho_g$), то можно считать, что $\frac{1}{\left(1 + 2\rho_0 S / \rho_g\right)} \sim \varepsilon^2$, нелинейность

при этом считаем малой величиной второго порядка $\frac{3u_0^2 \gamma}{4\rho_0 S c_v^2} \sim \varepsilon^2$. Ограничиваясь слагаемыми первого порядка малости, уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - a_4 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^2 \partial z^2} + a_5 U - a_6 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (4)$$

Если погонные массы струны и основания имеют один порядок $\frac{\rho_0 S}{\rho_g} \sim 1$, а нелинейность

имеет первый порядок малости $\frac{3u_0^2 \gamma}{4\rho_0 S c_v^2} \sim \varepsilon$, то уравнение (3) в нулевом приближении по малому параметру будет иметь вид:

$$a_3 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} - a_4 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^2 \partial z^2} - a_7 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (5)$$

После двукратного интегрирования по безразмерному времени (константы интегрирования полагаем нулевыми) уравнение (5) преобразуется к волновому уравнению, содержащему кубическую нелинейность

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - b_1 \left(1 + b_2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (6)$$

где $b_1 = \frac{a_4}{a_3}$, $b_2 = \frac{a_7}{a_4}$.

Если масса струны существенно уступает массе упруго-инерционного основания ($\rho_0 S \ll \rho_g$), то будем считать, что $\frac{\rho_0 S}{\rho_g} \sim \varepsilon^2$, $\frac{3u_0^2 \gamma}{4\rho_0 S c_v^2} \sim \varepsilon^2$. В этом случае уравнение (3), с учетом

слагаемых до первого порядка малости включительно, примет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - a_4 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^2 \partial z^2} - a_7 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (7)$$

Перейдем в уравнении (4) в движущуюся систему координат $\xi = z - \sqrt{a_2} \tau$, $\eta = \varepsilon \tau$. Получим в первом приближении по ε эволюционное уравнение относительно $W = \frac{\partial U}{\partial \xi}$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} + b_1 W^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} \right) - b_3 W = 0. \quad (8)$$

где коэффициенты уравнения равны $b_1 = \frac{a_6}{2\varepsilon\sqrt{a_2}}$, $b_2 = \frac{\sqrt{a_2}a_4}{2\varepsilon}$, $b_3 = \frac{a_5}{2\varepsilon\sqrt{a_2}}$.

Заметим, что это уравнение очень похоже на нелинейное эволюционное уравнение для внутренних волн во вращающемся океане

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{3c_0}{2h} U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{c_0\beta}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right) = \frac{\Omega^2}{2c_0} U, \quad (9)$$

где U – возмущение свободной поверхности жидкости, h – глубина, c_0 – скорость распространения возмущения, β – параметр высокочастотной дисперсии, Ω – параметр Кориолиса, характеризующий вращение жидкости.

Впервые уравнение (9) было выведено в 1978 г. Л.А. Островским [7] и называется уравнением Островского. При $\Omega = 0$ уравнение (9) сводится к уравнению Кортевега – де Вриза (КдВ), но, в отличие от последнего, оно не интегрируется методом обратной задачи рассеяния и не имеет точных солитонных решений.

Как отмечалось в [8], уравнение Островского имеет отношение к широкому кругу нелинейных систем, характеризующихся наличием бездисперсионной полосы в спектре частот, разделяющей области с низко- и высокочастотной дисперсиями. Примерами таких систем могут служить необыкновенные электромагнитные и косые магнитозвуковые волны в замагниченной плазме; возмущения в цепочке атомов, описываемые моделью Френкеля – Конторовой; волны в линиях передачи типа полосового фильтра.

Уравнение (8), в отличие от уравнения Островского (9) содержит не квадратичную, а кубическую нелинейность. Видно, что при $b_3 = 0$ уравнение (8) сводится к модифицированному уравнению Кортевега – де Вриза (мКдВ), которое, как известно, отличается от уравнения КдВ более высокой степенью нелинейности. Поскольку, классическое уравнение Островского под знаком производной содержит уравнение КдВ, можно, по аналогии с уравнениями КдВ, назвать уравнение (8) модифицированным уравнением Островского. В работе [9] уравнение Бюргерса с кубической нелинейностью называется модифицированным уравнением Бюргерса. Однако понятие "модифицированное" в случае уравнения КдВ имеет несколько иное значение и связано с наличием преобразования Миуры [10], которое переводит решения модифицированного уравнения в решения классического уравнения. Похожих преобразований относительно классических и модифицированных уравнений Бюргерса и Островского пока не найдено.

Известно, что уравнение Островского не имеет точных решений [11], но допускает качественное исследование при равенстве нулю старшей производной [12]. Уравнение (8) также не имеет точных решений. Рассмотрим модифицированное уравнение Островского при $b_2 = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} + b_1 W^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) - b_3 W = 0. \quad (10)$$

Далее проанализируем стационарные решения уравнения (10), полагая $\chi = \xi - v\eta$ ($v > 0$). Уравнение фазовых траекторий имеет вид:

$$\left(\frac{dW}{d\chi}\right)^2 = \frac{b_3}{2b_1} + \frac{C_0}{(b_1 W^2 - \nu)^2}, \quad (11)$$

где C_0 – константа интегрирования. Уравнение (11) имеет асимптоты: $W = \pm \sqrt{\frac{\nu}{b_1}}$,

$\frac{dW}{d\chi} = \pm \sqrt{\frac{b_3}{2b_1}}$. Фазовые портреты будут качественно отличаться в зависимости от значений

коэффициентов уравнения. Для изучаемой механической системы коэффициенты имеют следующий вид

$$b_1 = \frac{3u_0^2 \gamma}{8\varepsilon^2 \rho_0 S c_v^2} > 0, \quad b_3 = \frac{1}{2} > 0,$$

соответствующий фазовый портрет изображен на рис. 1. Пунктиром на рисунке отмечены асимптоты. Из рисунка видно, что в системе есть ограниченные движения. Уравнение (8) имеет решение в виде периодической стационарной волны.

Рис. 1. Фазовый портрет $\left(W, \frac{dW}{d\chi}\right)$ ($b_1 > 0, b_3 > 0$)

Перейдем в уравнении (6) в движущуюся систему координат $\xi = z - \sqrt{b_1} \tau$, $\eta = \varepsilon \tau$. Получим в первом приближении по ε эволюционное уравнение относительно $W = \frac{\partial U}{\partial \xi}$:

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} + dW^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0, \quad (12)$$

где $d = \frac{\sqrt{b_1} b_2}{2\varepsilon} = \frac{3u_0^2 \gamma}{8\varepsilon^2 \rho_0 S c_v^2} \sqrt{1 + \frac{\rho_g}{2\rho_0 S}}$. Уравнение (12) можно классифицировать как уравнение Римана с кубической нелинейностью.

Уравнение (12) относится к квазилинейным дифференциальным уравнениям с частными производными и может быть решено методом характеристик [13, 14]. Заменой переменной уравнение (12) преобразуется к виду

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} + W^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0. \quad (13)$$

Если в качестве начального условия задать гауссов импульс

$$W(\xi, 0) = k_1 \exp(-k_2 \xi^2), \quad (14)$$

то решение уравнения (13) и уравнение характеристик принимают вид:

$$W(\xi, \eta) = k_1 \exp(-k_2 (\xi - W^2 \eta)^2), \quad (15)$$

$$\xi = \chi + k_1^2 \exp^2(-k_2 \xi^2) \eta, \quad (16)$$

где χ – параметр уравнения, при изменении которого получаем множество характеристических прямых в плоскости (ξ, η) .

Поверхность волны (15) и ее профили в разные моменты времени изображены на рис. 2, 3. Поверхность волны классического уравнения Римана $V_\eta + VV_\xi = 0$ (уравнение простой волны) с таким же начальным условием (14) и ее профили представлены на рис. 4, 5. Из рисунков видно, что у волны описываемой уравнением (13), как и волны Римана, происходит опрокидывание.

Рис. 2. Поверхность волны $W(\xi, \eta)$

Рис. 3. Профили волны $W(\xi, \eta_1)$ (1), $W(\xi, \eta_2)$ (2), $W(\xi, \eta_3)$ (3) ($\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$)

Рис. 4. Поверхность волны Римана

Рис. 5. Профили волны Римана в моменты времени η_1 (1), η_2 (2), η_3 (3)

Момент времени, в который первый раз пересекаются характеристические прямые (16), равен $t^* = \frac{1}{2k_1^2} \sqrt{\frac{\exp(1)}{k_2}}$. Отношение времён опрокидывания равно $t_R^*/t^* = \sqrt{2}k_1$, где t_R^* – время опрокидывания волны Римана. Из этого отношения следует, что время опрокидывания волны Римана больше времени опрокидывания волны $W(\xi, \eta)$ ($t_R^* > t^*$) при $k_1 > \sqrt{2}/2$, время опрокидывания волны Римана меньше ($t_R^* < t^*$) – при $k_1 < \sqrt{2}/2$ и времена опрокидывания волн равны ($t_R^* = t^*$) при $k_1 = \sqrt{2}/2$.

Таким образом, показано, что величина амплитуды начального возмущения влияет на момент времени опрокидывания и скорость распространения волны. Если амплитуда волны в начальный момент времени больше (меньше) некоторого критического значения, то опрокидывание волны Римана происходит позднее (раньше) по сравнению с волной, описываемой уравнением Римана с кубической нелинейностью.

Отыскивая решение уравнения (7) в виде бегущей стационарной волны $U = U(\chi)$, где $\chi = z - V\tau$, перейдем к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$2\varepsilon(1-V^2)\frac{d^2U}{d\chi^2} + V^2\frac{d^2}{d\chi^2}\left[1 + \frac{3u_0^2\gamma}{4\varepsilon\rho_0Sc_v^2}\left(\frac{dU}{d\chi}\right)^2\right]\frac{d^2U}{d\chi^2} = 0.$$

Это уравнение можно дважды проинтегрировать по χ , если константы интегрирования считать равными нулю, то оно преобразуется к виду:

$$\frac{d^2U}{d\chi^2} + d_1U - d_2U\left(\frac{dU}{d\chi}\right)^2 = 0, \quad (17)$$

где $d_1 = \frac{2\varepsilon(1-V^2)}{V^2}$, $d_2 = d_1b$, $b = \frac{3u_0^2\gamma}{4\varepsilon\rho_0Sc_v^2} > 0$, здесь V – скорость нелинейной волны.

Уравнение (17) описывает колебания ангармонического осциллятора с кубической нелинейностью. Фазовые портреты для случаев $V > 1$ и $V < 1$ изображены на рис. 6, 7. На фазовых плоскостях присутствуют прямые разделяющие движения (асимптоты):

$$\frac{dU}{d\chi} = \pm \sqrt{\frac{d_1}{d_2}} \quad (\text{на рисунке отмечены пунктиром}).$$

Рис. 6. Фазовый портрет $\left(U, \frac{dU}{d\chi}\right)$ при $V > 1$

Рис. 7. Фазовый портрет $\left(U, \frac{dU}{d\chi}\right)$ при $V < 1$

Из анализа фазовых портретов следует, что в сверхзвуковом случае нелинейные волны не распространяются. В дозвуковом случае существуют только нелинейные периодические (квазигармонические, кноидальные) волны, уединенных волн нет.

Список литературы

1. Клепиков С.Н. Расчет конструкций на упругом основании. – Киев: Будивэльник, 1967. – 185 с.
2. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
3. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Расчет дисперсионных характеристик струны, лежащей на упруго-инерционном основании // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2013. - № 4 (1). – С.199-203.
4. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго-инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестник научно-технического развития. – 2013. - № 6 (70). – С.18-29.
5. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Генерация волн источником, движущимся по деформируемой направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании // Машиностроение и инженерное образование. – 2013. - № 4(1). – С.199-203.
6. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Особенности генерации волн источником, движущимся по одномерной гибкой направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании // Акустический журнал. - 2016. – Т. 62, № 6. – С. 639-647.
7. Островский Л.А. Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане // Океанология. - 1978. – Т. 18, №2. – С. 181-191.
8. Островский Л.А., Степанянц Ю.А. Нелинейные волны во вращающейся жидкости // Нелинейные волны: физика и астрофизика. – М.: Наука, 1993. – С.132-153.
9. Селезов И.Т., Корсунский С.В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. – Киев: Наукова думка, 1991. – 200 с.
10. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики: Учебное пособие. – Долгопрудный: Интеллект, 2010. – 368 с.
11. Гандариас М.Л., Брузон М.С. Симметричный анализ и точные решения для некоторых уравнений Островского // Теоретическая и математическая физика. - 2011. – Т. 168, № 1. – С. 49-64.
12. Stepanyants Y.A. On stationary solutions of the reduced Ostrovsky equation: Periodic waves, compactons and compound solitons // Chaos, Solitons and Fractals. - 2006. – Vol. 28. – P. 193-204.
13. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
14. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. – М.: Ленанд, 2017. – 312 с.

Дата поступления: 30 апреля 2018 г.

УДК 534.26

ЗАДАЧА СОЗДАНИЯ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ КОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ДАЛЬНЕМ ПОЛЕ

© Олег Иванович Косарев, Алла Константиновна Пузакина

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

oikosarev@yandex.ru

Аннотация. Предложено решение задачи создания гидроакустически прозрачной конечной цилиндрической оболочки в дальней зоне путем активного гашения дифракционного поля с использованием средств гашения, расположенных на поверхности оболочки.

Ключевые слова: конечная цилиндрическая оболочка, смещения, звуковое давление, дальнее поле, гидроакустическая прозрачность.

THE TASK OF CREATING A SONAR TRANSPARENCY OF A FINITE CYLINDRICAL SHELL IN THE FAR FIELD

© O.I. Kosarev, A.K. Puzakina

Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Moscow, Russia

oikosarev@yandex.ru

Abstract The solution of the problem of creation of hydroacoustic transparent finite cylindrical shell in the far zone by active damping of the diffraction field with the use of damping means located on the surface of the shell is proposed.

Key word: finite cylindrical shell, displacement, sound pressure, far field, sonar transparency.

Статья посвящена постановке и решению новой задачи создания акустически прозрачного тела, погруженного в жидкость, с использованием системы активного гашения, размещенной на поверхности тела. Решение задачи создания акустически прозрачного тела представляет теоретический и практический интерес, особенно в области гидроакустики и продолжает оставаться актуальной. Этой задаче посвящено большое количество работ [1-7]. Однако до настоящего времени решение задачи в теоретическом плане до конца не завершено, а практическая реализация ее, можно сказать, и не начиналась. До сих пор у специалистов имеются разногласия по некоторым спорным вопросам.

В статье рассмотрены известные методы активного гашения звукового поля, отмечены ошибки, предложен способ активного гашения.

Цель – предложить теоретически обоснованный и практически реализуемый способ создания акустически прозрачного тела путем гашения его дифракционного поля в дальней зоне.

Задача Малюжинца. Впервые задача активного гашения рассеянного звукового поля была поставлена и решена Малюжинцем [1]. Последующие долгие годы эта задача трактовалась как задача о создании акустически прозрачного тела и считалась полностью решенной. Напомним суть ее для возможности сравнения с предлагаемой задачей. Имеется

произвольное тело S , облучаемое внешним источником звука, расположенным в точке M , рис.1.

Рис.1. К задаче Малюжинца: S – тело, $S1$ - приемная и $S2$ - излучающая поверхности

Имеется охватывающая тело приемная поверхность $S1$, на которой размещены измерители давления и скорости полного поля, называемые сенсорами (диполи и монополи). Имеется охватывающая $S1$ поверхность $S2$, на которой размещены излучатели давления и скорости (диполи и монополи), называемые актуаторами.

Суть задачи Малюжинца заключается в следующем. Есть исходное падающее звуковое поле p_0 в отсутствии тела $p=p_0$. При введении тела в это поле появляется рассеянное поле p_s и тогда суммарное (полное) поле

$$p_{\Sigma} = p_0 + p_s. \quad (1)$$

В задаче требуется создать компенсирующее поле $p_k = -p_s$, в результате действия которого суммарное поле становится равным исходному полю

$$p_{\Sigma} = p_0 + p_s + p_k = p_0. \quad (2)$$

Для решения задачи на приемной поверхности $S1$ измеряются полное давление p и скорость $\partial p / \partial n$. Задача решается в два этапа. На первом этапе полное поле (1) в результате вычислений разделяется на составляющие p_0 и p_s (факторизация). На втором этапе на излучающей поверхности $S2$ формируется и излучается компенсирующее (противофазное) поле $p_k = -p_s$, в результате чего в (1) гасится рассеянное поле p_s . Поля вычисляются в виде решения задачи Коши для волнового уравнения.

Методы решения задачи Малюжинца были развиты и дополнены многими последователями [2-7] и др. Например, компенсирующее поле p_k в [1] определялось по формулам теории запаздывающих потенциалов, а в работах [2] оно определялось функцией Грина, интегрируемой по поверхности $S2$. В работе [3], помимо упрощения вычисления амплитуд монополей и диполей с использованием рядов Фурье, было предложено приемную поверхность $S1$ совместить с поверхностью тела. В работе [4] решение основано на выделении нормальных пространственных гармоник. В работе [5] в развитие [3] предложено сенсоры и актуаторы вибрационного типа располагать на поверхности тела и гасить рассеянное поле вибрациями, создаваемыми силами f_a , приложенными к телу. Решение основано на использовании импедансов. В работе [7] со ссылкой на [5], предложено измерять падающее звуковое поле, а рассеянное поле гасить с использованием вибраций поверхности, создаваемых поршнями, размещенными на поверхности тела.

В работе [5] получено ошибочное решение, заключающееся в том, что в качестве параметра, управляющего гасящими силами, выбрана скорость полного звукового поля v . Это решение основывалось на соотношении колебательных скоростей

$$v = v_0 + \frac{Z_0 - Z}{Z_r + Z} v_0 + \frac{f_a}{Z_r + Z} \quad (3)$$

где v - скорость полного поля, v_0 - скорость падающего поля, f_a –гасящие силы, Z , Z_0 , Z_r - импедансы, $v_s = (Z_0 - Z)v_0 / (Z_r + Z)$ - скорость рассеянного поля. Уравнение (3) представляет собой одно уравнение с двумя неизвестными (v и f_a) и поэтому не имеет однозначного

решения. Из него при погашенном рассеянном поле $p_s=0$ в (1), и, следовательно, $v=v_0$ можно получить два решения: 1) $f_a=f_1=(Z-Z_0)v_0$ и 2) $f_a=f_2=(Z-Z_0)v$. Из этих двух решений надо выбрать одно правильное решение.

В работе [5] без объяснений принято решение $f_a=f_2=(Z-Z_0)v$, и на основании этого сделан вывод о ненужности факторизации. Однако решение $f_a=f_2=(Z-Z_0)v$ ошибочное, на что уже указывалось в [6] и что подтверждается следующими дополнительными аргументами. Представим уравнение (3) в таком же виде, как в [5]

$$v = v_0 + \frac{Z_0 - Z}{Z_r + Z} v_0 + \frac{Z - Z_0}{Z_r + Z} x$$

где x – искомая скорость, создаваемая силами, подлежащая определению. Если даже принять как в [5], что полная скорость $v=x$, то из этого уравнения

$$x \left(1 + \frac{Z_0 - Z}{Z_r + Z} \right) = v_0 \left(1 + \frac{Z_0 - Z}{Z_r + Z} \right)$$

следует $x=v_0$, т.е. получаем решение $f_a=f_1=(Z-Z_0)v_0$, показывающее зависимость силы от скорости падающего поля v_0 . Подчеркнем, что скорости будут равны $v=v_0$ только после того, как рассеянное поле будет погашено $p_s=0$ в (1). Но для того, чтобы эта ситуация наступила надо на рассеянное поле сначала воздействовать, в данном случае силами. Выбор воздействия силами $f_a=f_2=(Z-Z_0)v$ неверный, потому что противоречит физике (практике) процесса гашения. В этом можно убедиться, отслеживая процесс гашения. Пусть до начала гашения, когда силы еще не приложены $f_a=0$, полную скорость можно измерить

$$v = v_0 + \frac{Z_0 - Z}{Z_r + Z} v_0. \quad (4)$$

Если в (3) принять силы по формуле $f_a=f_2=(Z-Z_0)v$, где v – измеренная скорость (4), то результирующая скорость после приложения сил будет

$$v_* = v_0 - \left(\frac{Z - Z_0}{Z_r + Z} \right)^2 v_0.$$

Как видим, такой выбор приводит к раскачке, а не гашению рассеянного поля. Гасить рассеянное поле таким способом на практике невозможно, потому что оператору, приступающему к гашению, величина полного поля v , которая получится после приложения сил, не известна, и измерить он ее не может, потому что ее еще нет, т.к. не известна величина f_a .

Правильное решение $f_a=f_1=(Z-Z_0)v_0$ получено в [6] при решении этой же задачи другим способом непосредственно из формулы рассеянного поля

$$p_s = \frac{Z_s}{(Z - Z_s)} [v_0(Z_0 - Z) + f_a]$$

из которой следует, что

$$f_a = (Z - Z_0)v_0. \quad (5)$$

Проявление внимания к вопросу выбора решения (5) вызвано желанием предостеречь специалистов, которые со ссылкой на [5] повторяют ошибку о ненужности факторизации [7].

Предлагаемая задача создания акустически прозрачного тела. Перейдем к главному, к объяснению новизны и полезности предлагаемой задачи создания акустически прозрачного

тела. Объяснение сопровождается расчетными формулами, полученными применительно к конечной свободной цилиндрической оболочке. Рассматривается рассеяние и переизлучение на боковой поверхности конечной цилиндрической оболочки, принята модель оболочки в жестком экране. Отражение от острых углов и торцов оболочки не учитывается, т.к. выходит за рамки данной работы и должно быть рассмотрено отдельно. Зависимость параметров от времени t принята в виде $\exp(i\omega t)$ и ниже опущена. Некоторые формулы для простоты приведены без суммирования по окружающим гармоникам n .

Предлагаемая задача о создании акустически прозрачного тела заключается в следующем. Вследствие попадания на тело зондирующего акустического сигнала, идущего от стороннего источника излучения из точки M , вокруг тела возникает дифракционное звуковое поле. Это поле также называется переизлученным или вторичным полем. Зондирующий сигнал возбуждает вынужденные колебания поверхности тела, как упругого тела, и отражается от него, как от твердого тела. Вторичное поле регистрируется приемными устройствами, которые могут быть расположены в различных точках N пространства в дальнем поле рис.2. Термин дальнее поле употребляется в традиционном понимании $kr \gg 1$ или $kr \rightarrow \infty$ как поле на большом расстоянии. Звуковое давление его характеризуется двумя сомножителями, один из которых определяет сферическую волну, а другой сомножитель, включающий диаграмму направленности, не зависит от расстояния.

Рис.2. К расчету дальнего поля

Основное отличие предлагаемой задачи от задачи Малюжинца заключается в том, что исследуется то, как дифракционное поле, возникающее на поверхности тела, проявляется в дальнем поле. Специфика дальнего поля, выражается в преобразовании типа звуковых волн при их распространении на далеком расстоянии. В данном случае специфика учитывается использованием приближения Фраунгофера и формулы Кирхгофа [8]. Эта специфика также может учитываться использованием метода перевала и асимптотическим преобразованием функции Ганкеля [9].

В данном случае для расчета дальнего поля используется интегральная формула Кирхгофа (Гельмгольца–Гюйгенса), определяющая звуковое давление в дальнем поле в точке N по известному давлению p и его производной $\partial p / \partial n$ в произвольной точке A на поверхности тела, рис.2

$$p(N) = \frac{1}{4\pi} \iint \left[p \frac{\partial G(N, A)}{\partial n} - \frac{\partial p}{\partial n} G(N, A) \right] ds \quad (6)$$

$$G(N, A) = \frac{\exp(-ikR_1)}{R_1}, \quad R_1 = |N, A|,$$

с граничными условиями на поверхности тела

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \begin{cases} \rho \omega^2 w(z, \varphi), & 0 \leq z \leq L \\ 0, & z < 0, z > L \end{cases}$$

где s - площадь поверхности тела, i - мнимая единица, $k=\omega/c$ -волновое число, ω - угловая частота, ρ – плотность жидкости, w - виброперемещение, p – полное звуковое давление на поверхности тела, равное сумме давлений падающего p_0 и рассеянного p_s полей.

В результате соответствующих преобразований формула Кирхгофа (6) применительно к конечной цилиндрической оболочке может быть представлена в виде [10]

$$p(N) = \frac{e^{ikR} i^n \pi \varepsilon_n}{4\pi R} \left[\mu \cdot J'_n(\mu) \int_0^L (p_0 + p_s - Z_2 w) e^{ikz \cos \theta} dz \right] \quad (7)$$

$$Z_2 = \frac{\rho \omega^2 \cdot J_n(\mu)}{(k \sin \theta) J'_n(\mu)}, \quad \mu = k a \sin \theta,$$

где θ - угол наблюдения, a - радиус оболочки, L -длина оболочки.

Из формулы (7) следует, что если, согласно Малюжинцу, погасить только рассеянное поле $p_s=0$ из условия (2), то в дальнем поле звуковое давление $p(N)$ не будет равно нулю, и, следовательно, для наблюдателя в дальнем поле тело не будет акустически прозрачным. Для того чтобы тело стало акустически прозрачным в дальнем поле, надо обнулить полное звуковое поле $p=0$ и его производную, т.е. вибрации $w(x)=0$ на поверхности тела.

Поставленная задача об акустически прозрачном теле в дальнем поле, в отличие от задачи Малюжинца, решается из условия равенства нулю подынтегральной скобки в (7)

$$p_0 + p_s - Z_2 w = 0. \quad (8)$$

Из условия (8) следуют важные выводы для задачи Малюжинца и ее последователей. В работе Малюжинца [1] написано: «...вне поверхности S_2 рассеяние тела полностью отсутствует. Очевидно, что при этом тело становится прозрачным, так что любые внешние поля как бы свободно проходят сквозь него». В работе [5] об акустически прозрачном теле говорится в названии статьи.

Устранение рассеянного поля не означает устранение на поверхности тела падающего поля. По факту устранения только рассеянного поля нельзя судить о прозрачности или непрозрачности тела без указания метода расчета дифракционного поля, точки наблюдения и углов падения и наблюдения.

Ограниченность задачи Малюжинца обусловлена ее постановкой. В задаче задали падающее поле в отсутствии тела. Прибавили к нему рассеянное поле. Затем убрали рассеянное поле. В остатке получили падающее поле в отсутствии тела. Такой подход создает впечатление обобщенности задачи, пригодности ее для любого произвольного тела. Но рассмотрение из всех процессов, происходящих на теле, только рассеянного поля, превращает задачу Малюжинца в упрощенную интерпретацию задачи дифракции, не позволяющую судить о прозрачности тела. Этот вывод является важным для практической реализации методов гашения.

Таким образом, в задаче Малюжинца и во всех работах, основанных на его методе [2-7], в которых говорится об акустически прозрачном теле, имеется общая принципиальная ошибка. Ошибка заключается в том, что гашение только рассеянной составляющей полного поля, не делает тело акустически прозрачным.

Аналогичная ошибка имеется в работе [11], где при рассмотрении дифракции звуковой волны на абсолютно твердом цилиндре в формуле Кирхгофа используется только рассеянная составляющая полного поля.

Выполнение условия (8) может быть реализовано путем размещения на поверхности цилиндрической оболочки датчиков, измеряющих звуковое давление p и виброперемещения $w(x)$, и активной системы гашения, состоящей из звуковых излучателей и вибраторов и компьютерной системы управления. Результат выполнения условия (8) по смыслу равносителен устранению падающего поля, поскольку каждое слагаемое в (8) определяется через падающее поле. В этом случае устраняется все, что возникает вследствие действия падающего поля на тело.

Погасить дальнейшее звуковое поле $p(N)=0$ можно тремя способами с использованием: 1) только сил, 2) только излучателей, 3) совместно сил и излучателей. Во всех этих способах измерительная поверхность S_I совмещается с поверхностью тела. Во всех способах активная система гашения располагается на поверхности тела, что позволяет выполнить ее в виде интеллектуального покрытия. Здесь ограничимся рассмотрением первого из указанных способов гашения.

Гашение с использованием сил, приложенных к поверхности тела. Задача активного гашения вторичного поля тела в дальней зоне с использованием сил, приложенных к поверхности тела, впервые рассматривалась в [10]. Однако в ней были допущены ошибки редакционного характера (в формуле (7), вместо угла падения ψ написан угол наблюдения θ и в формуле (5) смещено место расположения интеграла), поэтому здесь приведены фрагменты [10] с исправлениями.

Приложим к поверхности оболочки S распределенные вынуждающие силы $f_a = F_a/s$ имеющие размерность давления.

Считая, что взаимодействие оболочки с жидкостью происходит только по радиальной координате W , представим уравнение вынужденных колебаний оболочки в виде

$$\left(L(\gamma) + \omega_*^2 \bar{E} \right) \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a}{q}(p_0 + p_s + f_a) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где U, V, W - продольные, касательные и радиальные перемещения при колебаниях поверхности оболочки, элементы матрицы $L(\gamma)$ являются функциями фазы падающего поля $\gamma = ka \cos \psi$. Поскольку в формулу Кирхгофа (7) входят только радиальные колебания, уравнение колебаний (9) решаем относительно радиальных колебаний w

$$ZW = p_0 + p_s + f_a \quad (10)$$

где Z представляет собой механический импеданс оболочки.

$$Z = \frac{q}{a} \left[\frac{\Delta_0(\gamma)}{\Delta_1(\gamma)} \right].$$

Падающее звуковое поле, разложенное в ряд по цилиндрическим функциям Бесселя

$$p_0 = A_0 e^{ikz \cos \psi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(kr \sin \psi) \cos n\varphi. \quad (11)$$

Звуковое давления на поверхности конечной цилиндрической оболочки при произвольной функции радиального виброперемещения $w(x)$, допускающей представление $w(x)$ в виде интеграла Фурье (без учета суммирования по окружным гармоникам n), может быть представлена в виде [9]

$$p_s(x) = \frac{a\rho\omega^2}{2\pi} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \frac{w(x) H_n^{(2)}(\alpha\tau) e^{i\gamma(z-x)} d\gamma dx}{\alpha\tau H_n^{(2)\prime}(\alpha\tau)} \quad (12)$$

где $H_n^{(2)}(a\tau)$, $H_n^{(2)'}(a\tau)$ функция Ганкеля второго рода и ее производная, $\tau = \sqrt{k^2 - \gamma^2}$, γ - переменная интегрирования.

В результате соответствующих преобразований (12) с учетом граничного условия рассеянное поле можно представить в виде

$$p_s = -\varepsilon_n i^n \frac{A(k \sin \psi) J_n'(ka \sin \psi) H_n(kr \sin \psi)}{(k \sin \psi) H_n'(ka \sin \psi)} + \frac{\rho \omega^2 W H_n(kr \sin \psi)}{(k \sin \theta) H_n'(ka \sin \psi)}, \quad (13)$$

где $A = A_0 \exp(ikz \cos \psi)$, первое слагаемое соответствует полю, отраженному абсолютно твердым цилиндром, а второе слагаемое - полю, излученному (переизлученному) оболочкой вследствие колебаний ее поверхности W . Верхний индекс у функций Ганкеля второго рода здесь и ниже опущен.

Представив рассеянное поле p_s через импедансы

$$p_s = WZ_s - p_0 \frac{Z_s}{Z_0} \quad (14)$$

$$Z_s = \frac{\rho \omega^2 \cdot H_n(ka \sin \psi)}{(k \sin \psi) H_n'(ka \sin \psi)}, \quad Z_0 = \frac{\rho \omega^2 \cdot J_n(ka \sin \psi)}{(k \sin \psi) J_n'(ka \sin \psi)}$$

подставим поле p_s в уравнение колебаний (11)

$$ZW = p_0 + WZ_s - p_0 \frac{Z_s}{Z_0} + f_a \quad (15)$$

и найдем перемещение оболочки

$$w = \frac{p_0 (Z_0 - Z_s)}{Z_0 (Z - Z_s)} + \frac{f_a}{Z - Z_s}. \quad (16)$$

Из условия (6) найдем гасящие силы

$$f_a = \frac{p_0 (Z_0 - Z_s)(Z - Z_2)}{Z_0 (Z_2 - Z_s)}. \quad (17)$$

Интересно отметить, что в частном случае при одинаковых углах $\theta = \psi$ будет $Z_2 = Z_0$ и формула для сил (17) совпадет с формулой (4), полученной в [6]. Это происходит по тому, что при $Z_2 = Z_0$ в выражении (6) рассеянное поле, как и в методе Малюжинца, $p_s = 0$, и кроме того добавок $Z_2 w$ компенсирует падающее поле p_0 , т.е. $p_0 = Z_2 w$. В выражении (17) падающее поле p_0 можно представить через параметры полного поля p и вибрации w , которые могут быть в натуральных условиях измерены

$$\frac{p_0}{Z_0} = \frac{Z \left(\frac{p}{Z_s} - w \right)}{Z_0 - Z_s}.$$

Таким образом, для проведения гашения надо измерить полное поле p , измерить вибрации w и с использованием импедансов Z , Z_0 , Z_s посчитать силы f_a (17).

На основе предложенной задачи аналитическим методом получена формула расчета звукового давления вторичного гидроакустического поля, переизлученного абсолютно твердой конечной цилиндрической оболочкой в дальней зоне [12,13].

В качестве итогового результата сформулируем в кратком изложении отличия, новизну и полезность предлагаемой задачи в сравнении с задачей Малюжинца.

В задаче Малюжинца. Постановка задачи - полное поле состоит из падающего поля в отсутствии тела и поля, рассеянного телом. Решение задачи - факторизация полей и создание поля, компенсирующего рассеянное поле с использованием излучателей, расположенных на излучающей поверхности, охватывающей приемную поверхность, внутри

которой расположено тело. Результат - рассеянное поле гасится, но тело не становится акустически прозрачным.

В предложенной задаче. Постановка задачи - определение полного дифракционного поля на поверхности тела и вибраций тела, создаваемых падающим полем. Решение задачи – создание поля, компенсирующего дифракционное поле и вибрации с использованием средств гашения, расположенных на поверхности тела. Результат - тело становится акустически прозрачным.

Список литературы

1. Малюжинец Г.Д. Нестационарные задачи дифракции для волнового уравнения с финитной правой частью // Труды акустического института. - 1971. - Вып.15. - С.124-139.
2. Федорюк М.В. О работах Г.Д. Малюжинца по теории волновых потенциалов //Труды акустического института. - 1971. - Вып.15. - С.124 -139.
3. Завадская М.П., Попов А.В., Эгельский Б.Л. Об аппроксимации волновых потенциалов в задачах активного гашения звуковых полей по методу Малюжинца // Акустический журнал. - 1975. - Т.21, №5. - С.732-738.
4. Бойко А.И., Тютюкин В.В. Система активного гашения звуковых полей, основанная на методе выделения пространственных гармоник // Акустический журнал. - 1999. - Т.45, №4. - С. 454-460.
5. Бобровницкий Ю.И. Новое решение задачи об акустически прозрачном теле // Акустический журнал. - 2004. - Т.50, №6. - С.751-755.
6. Косарев О.И. Активное гашение звука, рассеянной упругой цилиндрической оболочкой, путем приложения к ней вынуждающих сил // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2008. - №5. - С. 29-33.
7. Арабаджи В.В. О преобразовании акустически жесткого тела в акустически прозрачное в задаче с начальными условиями // Акустический журнал. - 2008. - Т.54, №6. - С. 869-878.
8. Авербух А.З., Вейцман Р.И., Генкин М. Д. Колебания элементов конструкции в жидкости. - М.: Наука, 1987. - 155 с.
9. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. - Л.: Судостроение, 1972. - 352 с.
10. Косарев О.И. Активное гашение вторичного поля цилиндрической оболочки в дальней зоне с использованием приложенных к оболочке вынуждающих сил // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2013. - №1. - С. 10-17.
11. Музыченко В.В. Дифракция звука на упругих оболочках. - М.: Наука, 1993. - 329 с.
12. Косарев О.И. К расчету вторичного поля конечной твердой цилиндрической оболочки // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2016. - №3. - С. 98-102.
13. Косарев О.И. Точное аналитическое решение задачи дифракции гидроакустического поля на конечном твердом цилиндре в дальней зоне. «Акустика океана». Доклады XV школы-семинара им. акад. Л.М. Бреховских, совмещенной с XXIX сессией РАО. - М.: ГЕОС, 2016. - С. 127-130.

Дата поступления: 4 апреля 2018 г.

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТАЗОБЕДРЕННОМ СУСТАВЕ ИЗ ТИТАНОВОГО СПЛАВА ВТ-6, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ЛАЗЕРНО-УДАРНО-ВОЛНОВОЙ ОБРАБОТКЕ

© Геронтий Жорович Сахвадзе¹, Омар Георгиевич Киквидзе²¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения
им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия²Государственный университет им. Ак. Церетели, Кутаиси, Грузияsakhvadze@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе проводится конечноэлементное моделирование сжимающих остаточных напряжений в имплантатах тазобедренных суставов из титановых сплавов ВТ-6, возникающих при лазерно-ударно-волновой обработке (ЛУВО), с использованием метода собственных деформаций.

Ключевые слова: лазерно-ударно-волновая обработка (ЛУВО), метод конечных элементов, собственные деформаций, тазобедренный сустав, остаточные напряжения, титановый сплав ВТ-6.

RESIDUAL STRESSES MODELING IN THE HIP REPLACEMENTS OF TITANIUM ALLOYS Ti6Al4V, ARISING AT THE LASER SHOCK PROCESSING

© G.Zh. Sakhvadze¹, O.G. Kikvidze²¹Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Moscow, Russia²Ak. Tsereteli State University, Kutaisi, Georgiasakhvadze@mail.ru

Abstract. In the present paper is presented finite element modeling of compressive residual stresses in the implants of the hip replacement of titanium alloys Ti6Al4V, arising at the laser shock processing (LSP), using the eigenstrain simulation.

Keywords: laser shock processing, finite element modeling, eigenstrain, hip replacement, compressive residual stresses, Ti6Al4V.

Общая методология технологии лазерно-ударно-волновой обработки (ЛУВО) материалов состоит в следующем: обрабатываемую поверхность (рис. 1а, позиция 5) покрывают непрозрачным для лазерного излучения слоем с низкой температурой испарения: черной краской, металлической фольгой или лентой (3). Сверху находится прозрачный слой (2), роль которого наиболее часто выполняет вода. Энергия лазерного импульса (1) поглощается непрозрачным слоем, что приводит к его нагреву, испарению и формированию высокотемпературной плазмы, ограниченной с одной стороны поверхностью исследуемого материала, а с другой – прозрачным слоем, сдерживающим распространение плазмы. Вследствие ограниченности объема, давление резко возрастает до высоких значений и быстро распространяется в материал в виде ударной волны (4), которая способствует появлению в материале сжимающих остаточных напряжений. Если эти напряжения

превосходят упругий предел Гюгонио, то материал деформируется пластически [1]. Параметры процесса, необходимые для реализации технологии ЛУВО, таковы: нужен короткий (в диапазоне 3-30 нс) и интенсивный ($> 1 \text{ ГВт/см}^2$) лазерный импульс, перпендикулярно направленный на поверхность исследуемого материала. Поверхностный слой при этом мгновенно испаряется (явление абляции) и образуется приповерхностная плазма (6) с высокими температурой (приблизительно 10000 К) и давлением ($> 2 \text{ ГПа}$). Плазма при расширении в результате быстропротекающих физико-химических процессов и фазовых превращении излучает ударные волны (4), и механические импульсы распространяются как в среде, так и в твердом теле.

Главным результатом применения технологии ЛУВО является создание в приповерхностной области полей мощных сжимающих остаточных напряжений (СОН), которые благоприятно влияют на такие фундаментальные механические характеристики материалов, как прочность, долговечность, износ- и коррозионостойкость. Основными пользователями технологии ЛУВО являются крупные промышленные, военные и космические корпорации (Airbus, Boeing, General Electric, Rolls-Royce, Pratt & Whitney и другие). Кроме того, корпорация Toshiba развила применение ЛУВО-технологии для повышения безопасности атомных реакторов. В последнее время данная технология широко стали применяться в машиностроении и биомедицине. Настоящая работа посвящена применению ЛУВО к биопротезам.

Рис.1. Схематическое представление технологии ЛУВО и механизма возникновения остаточных напряжений: а) принципиальная схема технологии ЛУВО; б) возникновение пластических деформаций в приповерхностной области; в) возникновение остаточных напряжений.

1 – лазерный импульс; 2- прозрачный слой; 3 – непрозрачный слой; 4 – ударная волна; 5 – исследуемый материал; 6- плазма; 7 – область воздействия лазерного импульса; 8 – сжатый в вертикальной плоскости материал (отрицательные пластические деформации); 9 – растянутый в горизонтальной плоскости материал (положительные пластические деформации); 10 – релаксация деформируемого материала, вызывающей создание поля сжимающих остаточных напряжений в поверхностном слое

Титановые сплавы ВТ-6 хорошо известны за их превосходные механические свойства и за их хорошую биологическую совместимость, делая их привлекательными в качестве имплантатов [2]. Протезы из ВТ-6 тазобедренного сустава успешно применяются в последнее время [2-3]. В основном, цель хирургического введения искусственного тазобедренного сустава состоит в том, чтобы максимально восстановить кинематику опорно-двигательной системы пациента, выдерживая при этом естественные физиологические нагрузки, минимизировав износ и трение в суставе, избегая вредные реакции со стороны организма.

Обычно возможные механизмы разрушения введенного в организм протеза тазобедренного сустава классифицируются на основе их функциональной продолжительности: 1) краткосрочные воздействия, такие как внезапная инфекция или вывих; 2) среднесрочные

воздействия, главным образом вызванные механическим разрушением одного или нескольких компонентов имплантата; 3) длительный воздействия из-за усталостного разрушения одного или нескольких компонентов имплантата [4]. Целью настоящих исследований является превенция третьего механизма разрушения посредством упрочнения приповерхностной области.

В последние два десятилетия качество протезов тазобедренного сустава значительно улучшилось, при этом каждая новая конструкция имплантата стремится быть более устойчивой к усталостному разрушению [3]. Для этих целей широко используется традиционное дробеструйное упрочнение для создания сжимающих остаточных напряжений. Недавние исследования показали, что ЛУВО обеспечивает создание более глубоких сжимающих остаточных напряжений и усталостная прочность повышается по сравнению с дробеструйным упрочнением. В настоящей работе мы численно исследуем тазобедренный сустав из титанового сплава ВТ-6 при его упрочнении по технологии ЛУВО. Несмотря на возникающие вычислительные трудности при моделировании технологии ЛУВО на больших площадях и криволинейных 3D-геометриях, удалось избежать возникших трудностей с помощью использования метода собственных деформаций.

Материал и геометрические особенности тазобедренного сустава. Выбранный материал для численного анализа в настоящих исследованиях – известный биосовместимый материал – титановый сплав ВТ-6. Выбранная форма тазобедренного сустава – стандартный протез Чарнли (Charnley), геометрические особенности которого представлены на рис. 2 [2]. Геометрия протеза сильно влияет на его биомеханические характеристики, а также и на биосовместимость [2-3]. Форма протеза Чарнли с гладкими поверхностями уменьшают концентрации напряжения и увеличивают долговечность протеза. Сложность геометрии протеза Чарнли требует тщательной предварительной подготовки его макета в САЕ-системе в виде IGES-файла прежде, чем импортировать его для проведения расчетов в конечноэлементных пакетах LS-DYNA и ANSYS.

Рис.2. Геометрические особенности протеза тазобедренного сустава Чарнли (Charnley). Размеры показаны в мм.

Концепция метода собственных деформаций. Прежде всего, необходимо создание наглядной физической модели, объясняющей механизм возникновения пластических деформаций, и, соответственно, остаточных напряжений, возникающих при ЛУВО. После этого следует выбрать адекватные численные методы для реализации данной физической модели.

При однократном ЛУВО (рис. 1а) во время и в области воздействия лазерного излучения поверхностный слой испытывает растягивающие пластические деформации в горизонтальной плоскости и сжимающие пластические деформации - в вертикальной плоскости (рис.1 б). После прекращения воздействия лазерного импульса наступает период релаксации напряжений, во время которой деформированная часть материала подвергается сжатию со стороны окружающей ее недеформированной части материала (рис.1 в). Таким образом, пластические деформации, вызванные ударной волной, созданной при ЛУВО, генерируют в материале поле сжимающих остаточных напряжений (СОН). Отклик материала можно считать упругим, т.к. к моменту начала процесса релаксации пластические деформации уже полностью сформированы и они стабильны. Поэтому имеем все основания считать, что поле СОН, сформированных при ЛУВО, является статическим упругим откликом материала на начальную ударную волну в случае, если предварительно там введены уже сформированные стабильные пластические деформации (т.н. «собственные деформации»). Важно заметить, что использование термина «собственная деформация» позволяет исследователю абстрагироваться от природы возникновения той или иной пластической деформации.

В настоящей работе предлагается практическая реализация в конечноэлементных пакетах LS-DYNA и ANSYS сравнительно нового подхода для решения задач определения остаточных напряжений при ЛУВО.

Термин «собственные деформации» впервые ввел Рейснер (*Reissner*) в 1931 году [5]. Под этим термином он понимал неупругие деформации, соответствующие самоуравновешенным остаточным напряжениям. В 1991 году Мура (*Mura*) [6] предложил более общее определение собственной деформации (*eigenstrain*), принятое в современной научной литературе. В рамках геометрически линейной теории это могут быть неупругие деформации любой природы (температурные, пьезоэлектрические, пластические, ростовые, фазовые и др.). Использование термина собственной деформации позволяет исследователю абстрагироваться от природы возникновения той или иной собственной деформации.

Деформаций будем считать аддитивными, в этом случае тензор малой деформации ε можно представить суммой упругой ε_e и собственной ε^* деформаций [7]:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon^*. \quad (1)$$

В большинстве случаев наличие в теле собственных деформаций для удовлетворения условиям совместности деформации требует наличия и упругих деформации (т.е., в таких задачах собственные деформации выступают в роли своего рода источника несовместности деформации [7]). Важно заметить, что эти упругие деформации должны удовлетворять обобщенному закону Гука, устанавливающего линейную зависимость между упругими деформациями и упругими напряжениями. Если внешних воздействий на тело нет, то вышеупомянутые поля представляют собой поле упругих остаточных деформаций и поле остаточных напряжений, соответственно.

Метод собственных деформаций в настоящее время широко применяется для моделирования остаточных напряжений на разных масштабных уровнях, сильно сократив при этом время на вычисления.

В случае отсутствия собственных деформаций любое упругое тело свободно от остаточных напряжений. Продолжая аналогию, можно заключить, что случай наличия остаточных напряжений может быть представлен как некое распределение по исследуемому объему собственных деформаций (как в конечноэлементном моделировании, так и аналитических исследованиях). Решение для остаточных напряжений σ_{ji} в таком случае должно удовлетворять:

1) уравнениям равновесия, т.е. на поверхности тела отсутствуют нагрузки, что в декартовой системе координат выражается уравнениями (2):

$$\sigma_{ji,j} = 0; \quad (2)$$

2) граничным условиям:

$$\sigma_{ji}n_j = 0 ; \quad (3)$$

где $\mathbf{n}$ - нормаль к поверхности тела.

3) условиям совместности деформации:

$$\varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jk,il} - \varepsilon_{il,jk} = 0 . \quad (4)$$

Из условий совместности деформации, в частности, для деформации $\varepsilon_{xx}(z)$, следует:

$$\frac{d^2 \varepsilon_{xx}(z)}{dz^2} = 0 . \quad (5)$$

Отсюда следует, что для удовлетворения условий совместности деформации полные деформации должны быть линейными функциями от z :

$$\varepsilon_{xx}(z) = C_1 z + C_2 . \quad (6)$$

Кроме того, по своей природе остаточные напряжения являются самоуравновешенными по всему объему V исследуемого материала:

$$\int_V \sigma_{ij} dV = 0 . \quad (7)$$

Таким образом, метод собственных деформации представляет собой реальный механизм, с помощью которого, после определения собственных деформаций, восстанавливается полное поле распределения остаточных напряжений в материале посредством только упругого анализа.

Результаты показывают [8], что стабильные пластические деформации, генерируемые при ЛУВО, зависят только от параметров лазерного импульса, и мало зависят от геометрии образца, т.е. являются практически геометрически независимыми.

После того, как определено распределение собственных деформаций, вызванное одним конкретным лазерным импульсом, оно может быть распространено для оценки остаточных напряжений, вызванных тем же импульсом в других местах образца (в виду геометрической независимости), получая картину распределения ОН в целом образце.

А. М. Корсунский предложил общий метод определения собственных деформаций [6], который нашел множество приложений, в частности, в задачах сварки, упрочнения, лазерной формовки. Его практическая важность подтверждается тем, что если определены собственные деформации, создаваемые ЛУВО для образцов с простой геометрией, то их можно распространять и на образцы более сложной геометрии. Этот принцип, впервые сформулированный А. М. Корсунским в работе [8], назван им «принципом переносимости собственных деформаций» («Principle of Transferability of Eigenstrain»).

В настоящей работе применяется метод, разработанный Де Волдом и Хиллом [9]: предполагается, что полные остаточные напряжения ($\sigma_{\text{полн}}$), возникающие при ЛУВО, является суперпозицией остаточных напряжений, возникающих непосредственно при ЛУВО ($\sigma_{\text{ЛУВО}}$), и остаточных напряжений, генерируемых материалом на внешнее воздействие, необходимых для удовлетворения условий равновесия, формально названные «остаточными напряжениями равновесия» ($\sigma_{\text{равн}}$):

$$\sigma_{\text{полн}} = \sigma_{\text{ЛУВО}} + \sigma_{\text{равн}} . \quad (8)$$

Эти остаточные напряжения ($\sigma_{\text{полн}}$) в обрабатываемой ЛУВО области материала являются тензором второго порядка с пространственным изменением во всех трех направлениях (в общем случае). Полные остаточные напряжения ($\sigma_{\text{полн}}$) представляют наибольший интерес с точки зрения оценки рабочих характеристик материала образца, так как это они присутствует в образце непосредственно после ЛУВО. Однако остаточные напряжения, непосредственно вызванное технологией ЛУВО ($\sigma_{\text{ЛУВО}}$), как известно, является геометрически независимыми, в то время как остаточное напряжение равновесия ($\sigma_{\text{равн}}$) являются остаточными

напряжениями, призванными удовлетворять уравнения равновесия, обязательно являются геометрически зависимыми.

Остаточные напряжения, непосредственно вызванные технологией ЛУВО ($\sigma_{\text{ЛУВО}}$), можно определить из (9):

$$\sigma_{\text{ЛУВО}} = \sigma_{\text{полн}} - \sigma_{\text{равн}} . \quad (9)$$

Рассматривая важный частный случай двухосного распределения напряжений в облучаемой ЛУВО области (xy), получим:

$$\begin{cases} \sigma_{\text{ЛУВО},xx}(z) = \sigma_{\text{полн},xx}(z) - \sigma_{\text{равн},xx}(z) \\ \sigma_{\text{ЛУВО},yy}(z) = \sigma_{\text{полн},yy}(z) - \sigma_{\text{равн},yy}(z) \\ \sigma_{\text{ЛУВО},zz}(z) = 0 \end{cases} . \quad (10)$$

Кроме того, остаточное напряжение равновесия ($\sigma_{\text{равн}}$), согласно формуле (6), может быть представлено линейной функцией, коэффициенты которой C_1 и C_2 могут быть вычислены графически с помощью профиля распределения по глубине полных остаточных напряжений ($\sigma_{\text{полн}}$) [4].

$$\begin{cases} \sigma_{\text{ЛУВО},xx}(z) = \sigma_{\text{полн},xx}(z) - \sigma_{\text{равн},xx}(z) = \sigma_{\text{полн},xx}(z) + C_{1,xx}z + C_{2,xx} \\ \sigma_{\text{ЛУВО},yy}(z) = \sigma_{\text{полн},yy}(z) - \sigma_{\text{равн},yy}(z) = \sigma_{\text{полн},yy}(z) + C_{1,yy}z + C_{2,yy} \\ \sigma_{\text{ЛУВО},zz}(z) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, собственные деформации, вызванные технологией ЛУВО, можно определить следующими линейными уравнениями Гука:

$$\varepsilon_{\text{ЛУВО}}^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\text{ЛУВО},xx}^*(z) \\ \varepsilon_{\text{ЛУВО},yy}^*(z) \\ \varepsilon_{\text{ЛУВО},zz}^*(z) \end{bmatrix} = -\frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{\text{ЛУВО},xx}(z) \\ \sigma_{\text{ЛУВО},yy}(z) \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (12)$$

где E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона.

Таким образом, мы получаем три компонента собственных деформаций на каждом шаге, продвигаясь от поверхности вглубь материала. Таким образом, процедура решения состоит из трех шагов. 1) Вычисляются все собственные деформации, вызванные с применением технологии ЛУВО ($\varepsilon_{\text{ЛУВО}}^*$) (посредством решения явной задачи динамического анализа посредством МКЭ-пакета LS-DYNA). 2) Вычисленные собственные деформации ($\varepsilon_{\text{ЛУВО}}^*$) вводятся как начальное распределение деформаций для решения упругой задачи (неявная задача ANSYS). 3) Полученные полные остаточные напряжения для части образца, вызванные технологией ЛУВО, распространяются для любых новых участков образца с любой сложной геометрией.

Как известно [8], задача определения остаточных напряжений при заданных пластических и температурных деформациях имеет единственное решение. Этому решению соответствует минимальное значение потенциальной энергии остаточных напряжений:

$$E_{\min} = \int_0^t \left[\int_V \sigma \dot{\varepsilon}_p dV \right] d\tau , \quad (13)$$

где σ значение напряжения из определяющего соотношения, V - объем исследуемого образца, τ - время, $\dot{\varepsilon}_p$ - скорость пластической деформации:

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[(\dot{\varepsilon}_{1p} - \dot{\varepsilon}_{2p})^2 + (\dot{\varepsilon}_{2p} - \dot{\varepsilon}_{3p})^2 + (\dot{\varepsilon}_{3p} - \dot{\varepsilon}_{1p})^2 \right]^{1/2} , \quad (14)$$

где $\dot{\varepsilon}_{1p}$, $\dot{\varepsilon}_{2p}$ и $\dot{\varepsilon}_{3p}$ являются скоростями пластических деформаций в главных направлениях.

Стратегия численного моделирования. Предложенная стратегия численного конечноэлементного моделирования определения полных остаточных напряжений в тазобедренном суставе при ЛУВО состоит из двух шагов: 1) вычисление собственных деформаций, вызванных с применением технологии ЛУВО, решая явную задачу динамического анализа посредством МКЭ-пакета LS-DYNA (номер лицензии 10312012); 2) вычисленные на шаге 1 собственные деформации вводятся в качестве входа для упругого моделирования с целью определения полных остаточных напряжений, вызванных в тазобедренном суставе при ЛУВО, путем решения неявной задачи ANSYS (номер лицензии 660578) (графически это представлено на рис. 3).

Приложение ударной нагрузки. Для выбора оптимальной формы импульса и упрощения численного анализа лучше использовать экспериментальные данные, которые показывают [4], что давление сначала резко повышается, а затем медленно снижается. Поэтому в последних исследованиях справедливо аппроксимируют изменение давления треугольным импульсом [10–16].

Рис.3. Стратегия численного моделирования

На рис. 4 приведены некоторые возможные варианты простых треугольных приближений: а – пиковое давление $p_{\max}$ продолжительностью T_p действует в центре импульса; б – быстрое повышение давления с последующим постепенным снижением; в – аналогичен варианту а, но есть горизонтальный участок, соответствующий $p_{\max}$; г – аналогичен варианту б, но с билинейной формой снижения давления. Так как в настоящей работе основное внимание уделяется физическому моделированию возникновения ОН при ЛУВО, целесообразно выбрать относительно простую форму импульса, например треугольную (см. рис. 4, а), характеризующуюся только двумя параметрами ($p_{\max}$ и T_p), и при этом имеющую удовлетворительную сходимость с экспериментальными данными [17].

Рис.4. Профили давлений P в ударной волне в простейшей треугольной аппроксимации:

a – 2 неизвестных ($p_{\max}, T_p$); $б$ – 3 неизвестных ($p_{\max}, T_p, a$); $в$ – 4 неизвестных ($p_{\max}, T_p, a, b$); $г$ – 5 неизвестных ($p_{\max}, T_p, a, b, c$)

Вычисление собственных деформаций, вызванных с применением технологии ЛУВО (явная задача). Для вычисления собственных деформаций, вызванных с применением технологии ЛУВО, решая явную задачу в LS-DYNA. Здесь решается задача распространения ударной волны в твердом материале со специфическим рассмотрением упруго-пластического поведения материала. При ЛУВО из-за воздействия большого по величине и кратковременного по времени давления скорости деформации в исследуемом материале достигают величин 10^6 с^{-1} и более, поэтому при расчетах напряженно-деформированного состояния используется модель пластического деформирования материала Джонсона-Кука [1]:

$$\sigma = (A + B\bar{\epsilon}^n) \left(1 + C\dot{\bar{\epsilon}}^*\right) [1 - (T^*)^m], \quad (15)$$

где σ – эквивалентное напряжение по Мизесу, $\bar{\epsilon}$ – эквивалентная пластическая деформация, $\dot{\bar{\epsilon}}^* = \dot{\bar{\epsilon}}/\dot{\bar{\epsilon}}_0$ – безразмерная эквивалентная скорость деформации ($\dot{\bar{\epsilon}}_0 = 1.0 \text{ с}^{-1}$), T^* – гомологическая температура, связь которой с абсолютной температурой T определяется следующим образом:

$$T^* = (T - T_0)/(T_m - T_0), \quad (16)$$

где T_0 – комнатная температура, T_m – температура плавления материала образца.

Уравнение (20) содержит пять материальных констант, которые определяются эмпирическим путем: A – статический предел текучести, B – модуль деформационного упрочнения, n – показатель степени в законе деформационного упрочнения, C – коэффициент скорости деформаций, m – показатель степени в законе температурного разупрочнения. Модель Джонсона-Кука предполагает независимость относительного влияния деформационного упрочнения, скорости пластической деформации и повышения температуры при всех скоростях и температурах пластической деформации. В уравнении (15) выражение в первых скобках определяет напряжение как функцию деформации при $\dot{\bar{\epsilon}}_0 = 1$ и $T^* = 0$, во вторых и третьих – влияние мгновенного значения скорости деформации и температуры на предел текучести, соответственно. Так как общепринято, что технология ЛУВО относится к

нетермическим технологиям, тепловыми эффектами игнорируем, и при моделировании будем использовать упрощенную модель Джонсона-Кука для комнатной температуры:

$$\sigma = (A + B\bar{\epsilon}^n)(1 + C\dot{\bar{\epsilon}}^*) . \quad (17)$$

В наших исследованиях расчеты проводятся (а также сравниваются с экспериментами) для титанового сплава ВТ-6. Его механические характеристики приведены в таблице 1.

Таблица 1

Механические характеристики титанового сплава ВТ-6

Характеристика	Значение	Размерность
Плотность, ρ	4500	Кг/м ³
Коэффициент Пуассона, ν	0,342	-
Модуль упругости, E	110	ГПа
Предел упругости Гюгонио, σ_{HEL}	2,8	ГПа
A	1098	МПа
B	1092	МПа
C	0,93	-
n	0,014	-

Большое количество элементов в конечноэлементной модели, особенно в явной задаче, ведет к очень долгим вычислительным процедурам. Однако эти вычислительные трудности могут быть легко преодолены при использовании моделирования собственных деформаций. Т.к. полные остаточные напряжения, вызванные технологией ЛУВО, геометрически независимы, рассматриваем только маленькую часть исследуемого образца с относительно простой геометрией, получив распределение полных остаточных напряжений по глубине. Имея такой профиль распределения, формулами (12) получаем собственные деформации, вызванные с использованием ЛУВО ($\epsilon_{ЛУВО,ij}^*$).

Вычисление остаточных напряжений путем упругого моделирования (неявная задача).

После определения собственных деформаций ($\epsilon_{ЛУВО,ij}^*$), вызванных с использованием технологии ЛУВО (шаг 1), они используются в качестве входа в упругом моделировании (шаг 2), что позволяет определять полные остаточные напряжения, вызванные ЛУВО для всего исследуемого образца, а не только для его участка с простой геометрией.

Полученные собственные деформации вводятся как анизотропные коэффициенты теплового расширения α_{ij} , путем ввода их в соответствующей подпрограмме ANSYS (16):

$$\alpha_{ij} = \epsilon_{ЛУВО,ij}^* . \quad (18)$$

Т.к. α_{ij} включает в себя 6 независимых компонентов, процедура счета позволяет описать любые возможные состояния собственных деформаций. После этого запускается неявный решатель ANSYS с температурной вариацией $\Delta T = 1$ и решается прямая термоупругая задача. Исследуемый образец упруго деформируется согласно (19)

$$\epsilon_{упр. ij} = \alpha_{ij} \Delta T . \quad (19)$$

Перерасчетом по закону Гука получаем распределение ОН ($\sigma_{ЛУВО}$) для всего образца на каждом шаге. В конечноэлементном анализе используются тетраэдральный элемент C3D4T (линейными смещением и температурой), в узлах, которых вводятся температурные деформации.

Как было отмечено выше, собственные деформации – это смесь всех неупругих деформации различного происхождения без возможности их разделения на компоненты. Поэтому

представление при моделировании собственных деформаций в виде термических деформаций вполне корректно и дает те же результаты.

Полученные результаты и их обсуждение. Остаточные напряжения, возникшие в тазобедренном суставе в результате обработки по технологии ЛУВО. Рассмотрим процесс определения остаточных напряжений, возникшие в тазобедренном суставе со сложной геометрией в результате его обработки по технологии ЛУВО, используя метод собственных деформаций.

На рис. 5а представлен 3D-макет протеза тазобедренного сустава, созданного в САЕ-системе для дальнейшего конечноэлементного анализа. Стратегия численного моделирования заключается в следующем. На первом этапе, как было отмечено выше, решается явная задача в пакете LS-DYNA для малой части макета (участок 1 на рис. 5) длиной порядка 10 мм. Происходит обработка этой части по технологии ЛУВО, применяя лазерное воздействие со следующими параметрами: диаметр лазерного пятна - 1,5 мм, степень перекрытия лазерных пятен - 78 %. Такая высокая степень перекрытия лазерных пятен, как показывает накопленный опыт, уменьшает градиент поверхностных остаточных напряжений, обеспечивая их относительную однородность и сглаженный профиль. Получаем распределение собственных деформаций ($\epsilon_{ЛУВО}^*$) для этого участка. На втором этапе происходит реконструкция собственных деформаций для всей области макета (участок 2 на рисунке 5) длиной 80 мм в конечноэлементной модели (рис. 5б), состоящей из 300240 конечных элементов типа C3D4T, импортируя сюда полученные на первом этапе собственные деформации ($\epsilon_{ЛУВО}^*$). На третьем этапе в соответствующем решателе ANSYS решается неявная задача с определением полей остаточных напряжений.

Рис.5. Макет тазобедренного сустава:

а) Уменьшенная (1) и целая (2) области макета тазобедренного сустава, 3 – направление сканирования; б) – конечноэлементная сетка ANSYS

На рис.6 показаны главные минимальные поверхностные остаточные напряжения с разных точек зрения, что свидетельствует об однородном распределении поверхностных остаточных напряжений благодаря высокой степени перекрытия лазерных пятен. Как видим, сжимающие остаточные поверхностные напряжения больше чем 600 МПа по всей рассматриваемой поверхности. Представляет большой интерес установление общих закономерностей при применении технологии ЛУВО в материалах с криволинейной геометрией. В этом направлении были проведены специальные исследования на вогнутые и выпуклые формы образцов (в основном, с цилиндрической и сферической геометрией) и изучены особенности распространения ударных волн в таких средах.

Рис.6. Поверхностные остаточные напряжения, генерируемые в тазобедренном суставе при ЛУВО

Результаты показывают [2-3], что существует почти линейная зависимость между кривизной материала и возникшими вследствие наличия кривизны дополнительными сжимающими остаточными напряжениями: наблюдается тенденция увеличения остаточных напряжений для вогнутых поверхностей и спад - для выпуклых поверхностей. Такая интересная взаимосвязь может быть объяснена из энергетических соображений, как следствие увеличения или уменьшения энергии пластической диссипации, возникающих в криволинейных геометриях по сравнению с плоскими геометриями.

К сожалению, экспериментальные измерения остаточных напряжений в образцах с криволинейной геометрией, а также на краях, не могут быть корректно выполнены. По этой причине численное моделирование является необходимым инструментом для учета краевого эффекта и эффекта кривизны. Для ответственных узлов, например, таких как биопротезы, крайне важно знание реального распределения остаточных напряжений перед началом их практической эксплуатации.

Рис.7. Внутренние остаточные напряжения в конечноэлементном макете тазобедренного сустава, вызванные технологией ЛУВО

На рис. 7 для удобства анализа закономерностей распределения внутренних остаточных напряжений показаны два различных сечения вдоль осей x и y . Результаты конечноэлементного анализа определяют глубину существования устойчивых сжимающих остаточных напряжений – порядка 1,64 мм (см. рисунок 8, где показан профиль распределения остаточных напряжений вдоль оси x).

Рис.8. Распределение внутренних остаточных напряжений при ЛУВО вдоль оси x

На рис. 9 показано сравнение между моделируемыми в настоящей работе остаточными напряжениями (по оси x), генерируемыми при ЛУВО, и экспериментальными остаточными напряжениями, наведенными при использовании традиционной дробеструйной обработкой, широко используемой в настоящее время для обработки протезов тазобедренного сустава. Как видно, глубина СОН, созданные при использовании технологии ЛУВО, более чем в четыре раза больше чем при дробеструйной обработке. Это лишний раз доказывает, что технология ЛУВО создает гораздо более глубокие СОН, чем другие альтернативные технологий.

Рис.9. Сравнение между распределениями остаточных напряжений по глубине: созданными по технологии ЛУВО (линия 1) и различными экспериментальными данными (показаны треугольниками и квадратами), полученными методом дробеструйной обработки (экспериментальные результаты взяты из [17])

Выводы. Была разработана численная конечноэлементная модель расчета полей остаточных напряжений, вызванных технологией лазерно-ударно-волновой обработки (ЛУВО) в тазобедренных суставах из титанового сплава ВТ-6. Модель реализует все физические процессы, протекающие при прохождении ударной волны в реальных трехмерных криволинейных объектах. Вычислительные трудности, возникающие в аналогичных задачах, были преодолены путем использования метода собственных деформаций. Были вычислены сжимающие остаточные напряжения (СОН), возникающие при ЛУВО в протезе тазобедренного сустава из титанового сплава ВТ-6. Полученные результаты показали, что технология ЛУВО в протезах тазобедренного сустава может сгенерировать СОН, больше 600 МПа, при этом глубина залегания СОН – более 1,60 мм, что более чем в 4 раза больше, чем применяющейся в настоящее время с целью их упрочнения технология дробеструйной обработки. Полученные результаты, подтвержденные доступными в литературе экспериментальными результатами, показывают, что технология ЛУВО может быть успешно

применена для упрочнения протезов тазобедренных суставов с целью создания в них глубоких СОН, существенно повышая их прочность, долговечность, а также износ- и коррозионостойкость.

Авторы выражают благодарность старшему научному сотруднику Института машиноведения им. А.А. Благоназова РАН Бубнову М.А. за помощь в проведение расчетов в конечноэлементных пакетах LS-DYNA и ANSYS.

Список литературы

1. Peyre P., Berthe L., Vignal V., Popa I., Baudin T. Analysis of laser shock waves and resulting surface deformations in an Al–Cu–Li aluminum alloy // J. Phys. D Appl. Phys. – 2012. – V.45. – P. 303–335.
2. Campioni I., Notarangelo G., Andreus U., Ventura A., Giacomozzi C. Hip prosthesis computational modeling: FEM simulations integrated with fatigue mechanical tests, Biomechanics imaging and computational modeling in biomechanics // Lecture notes in computational vision and biomechanics. – 2013. – V. 4. – P. 81–109.
3. Senalp A.Z., Kayabasi O., Kurtaran H. Static, dynamic and fatigue behavior of newly designed stem shapes for hip prosthesis using finite element analysis // Mater. Des. – 2007. – V.28 (5). – P. 1577–1583.
4. Ocaña J.L., Morales M., Porro J.A., Díaz M., Ruiz L., Correa C. Induction of thermo-mechanical residual stresses in metallic materials by laser shock processing // Encyclopedia Therm. Stresse. – 2014. – P. 2427–2444.
5. Reissner H. Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen // Z. Angew. Math. Mech. – 1931. – V. 11. – P. 1–8.
6. Mura T. Micromechanics of Defects in Solids. – 2nd ed. – Dordrecht: Kluwer Academic Publisher. – 1991. – P. 587.
7. Лохов В.А., Туктамышев В.С. Исследование условий отсутствия механических напряжений в системах с собственными деформациями // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 2 (26). – С. 198–207.
8. Korsunsky A.M. Residual elastic strain due to laser shock peening: modelling by eigenstrain distribution // J. Strain Anal. Eng. Des. – 2006. – V. 41 (3). P. 195–204.
9. DeWald A.T., Hill M.R. Eigenstrain-based model for prediction of laser peening residual stresses in arbitrary three-dimensional bodies Part 1: model description // J. Strain Anal. Eng. Des. – 2009. – V.44. – P. 1–11.
10. Сахвадзе Г.Ж., Гаврилина Л.В. Лазерно-ударно-волновая обработка материалов при однократных и многократных импульсных воздействиях // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2015. – № 6. – С. 75–80.
11. Сахвадзе Г.Ж., Гаврилина Л.В., Киквидзе О.Г. Влияние эффекта перекрытия лазерных пятен на остаточные напряжения при лазерно-ударно-волновой обработке материалов // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2016. – № 3. – С. 77–84.
12. Сахвадзе Г.Ж., Булекбаева Г.Ж., Киквидзе О.Г. Исследование качества поверхностных слоев, упрочненных лазерно-ударно-волновой технологией при различных степенях перекрытия лазерных пятен // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 2. – С. 132–141.
13. Сахвадзе Г.Ж., Гаврилина Л.В., Бармина О.В., Киквидзе О.Г. Повышение микротвердости материалов технологией двухсторонней лазерно-ударно-волновой обработки // Вестник научно-технического развития. – 2016. – № 7 (107). – С. 29–41. <http://www.vntr.ru/nomera/2016-7107/>
14. Сахвадзе Г.Ж., Пугачев М.С., Киквидзе О.Г. Особенности упрочнения материалов

- технологией лазерно-ударно-волновой обработки // Упрочняющие технологии и покрытия. –2016. – № 9 (141). – С. 20-25.
15. Сахвадзе Г.Ж., Пугачев М.С., Киквидзе О.Г. Технология двухсторонней лазерно-ударно-волновой обработки материалов // Вестник машиностроения. –2016. – № 10. – С. 71-76.
 16. Achintha M., Nowell D. Eigenstrain modelling of residual stresses generated by laser shock peening // J. Mater. Process. Tech. – 2011. – V. 211 (6). – P.1091–1101.
 17. Xie L., Zhang J., Xiong C., Wu L., Jiang C., Lu W. Investigation on experiments and numerical modelling of the residual stress distribution in deformed surface layer of Ti-6Al-4V after shot peening // Mater. Des. – 2012. – V. 41. – P. 314-318.

Дата поступления: 11 апреля 2018 г.