Вестник научно-технического развития Bulletin of Science and Technical Development

Номер 3 (127), март 2018 г.

DOI: 10.18411/vntr2018-127

Издается с 2007 года

Издание зарегистрировано в Министерстве РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации Эл. № ФС77-29768.

ISSN 2070-6847

*Журнал выпускается под научным руководством Федерального государственного
бюджетного учреждения науки Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН*

ОГЛАВЛЕНИЕ № 3 (127), 2018

Николай Николаевич Веричев. Хаотическая синхронизация: 30 лет спустя.....
.....стр. 3 – 15

Виталий Львович Крупенин. К проблеме анализа случайных колебаний ударного осциллятора при отказе от гипотезы Ньютона.....**стр. 16 – 21**

Владимир Николаевич Перевезенцев, Александр Сергеевич Пупынин. Анализ влияния параметров микроструктуры на аномальный рост зерен в субмикроструктурных металлах и сплавах. Часть I. Физическая модель.....стр. 22 – 27

Игорь Николаевич Солдатов, Наталья Владимировна Ключева. Колоннообразный вихрь микрополярной жидкости.....стр. 28 – 36

Издание зарегистрировано в Министерстве РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации Эл. № ФС77-29768.

ISSN 2070-6847

УДК 517.938

ХАОТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ: 30 ЛЕТ СПУСТЯ

© Николай Николаевич Веричев

*Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального исследовательского центра «Институт прикладной физики Российской академии наук»,
Нижний Новгород, Россия
nverichev@yandex.ru*

Аннотация. Статья посвящена краткой истории открытия хаотической синхронизации и анализу ее места в парадигме современного естествознания.

Ключевые слова: хаотическая синхронизация.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН на проведение фундаментальных научных исследований на 2013-2020 г.г. по теме № 0035-2014-0402, № госрегистрации 01201458047.

CHAOTIC SYNCHRONIZATION: 30 YEARS LATER

© N.N. Verichev

*Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences,
Nizhny Novgorod, Russia
nverichev@yandex.ru*

Abstract. The article outlines a brief history of the discovery of chaotic synchronization and its place in the paradigm of modern science.

Keywords: chaotic synchronization.

Acknowledgements. The work was carried out within the Russian state task of the Institute of Applied Physics for conducting fundamental scientific research for 2013-2020 on the topic No. 0035-2014-0402, state registration number 01201458047.

1. Введение. Синхронизация – согласованные движения связанных субъектов живой и неживой природы, возникающие в результате их взаимодействия (воздействия одного на другие), относится к числу фундаментальных явлений. Оно охватывает настолько многие сферы нашего материального и социального существования, что трудно найти современного человека, который не знал бы или не слышал бы вовсе об этом явлении. Однако не многие из общего числа знают, что без него не существовало бы, в частности, ни одного из средств современной коммуникации: радио телевидения, интернета и многого другого. Еще труднее найти человека, который знал бы не только внешние признаки, но и понимал бы суть явления синхронизации (узкий круг специалистов). Это не удивительно: причина возникновения согласованности движений систем не так проста. Достаточно сказать, что эта причина принципиально не могла быть понята вплоть до конца XIX века, - до открытия А. Пуанкаре предельных циклов и создания им качественной теории дифференциальных уравнений [1], а также создания А.М. Ляпуновым теории устойчивости движения [2]. Современная теория синхронизации начинается с пионерских работ Ван-дер-Поля (1927) [3] и А.А.Андропова с А.А.Виттом (1930) [4]. Ван-дер-Поль сформулировал задачу принудительной синхронизации радиотехнического генератора в виде неавтономного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, известного теперь под его

именем и ставшего одним из канонических уравнений нелинейной динамики. Вместе с этим, он предложил и оригинальный метод исследования уравнения, мотивируя свои действия (усреднение) лишь интуицией и физическими рассуждениями о разномасштабности изменения переменных - амплитуды и фазы колебаний. А.А. Андронов и А.А. Витт решили ту же проблему для нелинейной динамической системы второго порядка общего вида и дали подробную физическую интерпретацией всех “деталей” математического исследования. Удивительным на то время оказалось то, что в частном случае кубической нелинейности (нелинейность Ван-Дер-Поля) результаты этих двух работ совпали. В настоящее время, когда уже давно известно о смысле процедур усреднения, интуитивно проводимых Ван-Дер-Полем, остается только удивляться его гениальной находке.

Знаменательным событием в развитии теории динамических систем и, в частности, теории синхронизации, явилось открытие Н.М Крыловым и Н.Н Боголюбовым метода усреднения (1934) [5]. Этот метод не только обосновал процедуру Ван-дер-Поля (побочный результат), но и положил начало многим новым направлениям исследований в математической и нелинейной физике. Исключительная эффективность метода усреднения, а также его взаимосвязь с методом точечных отображений и простота интерпретации результатов, явились причиной потока работ, касающихся различных аспектов синхронизации периодических колебаний. В результате было решено огромное количество важных теоретических и прикладных задач и к концу прошлого века казалось, что о синхронизации известно все или почти все. По крайней мере, если возникали новые прикладные задачи, то методы и алгоритмы их решения были известны.

Открытие в 1983г. синхронизации хаотических колебаний для идентичных (Yamada T. and Fujisaka H., [6]) и, независимо, в 1986г. для неидентичных автоколебательных систем с хаотической динамикой (Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И., [7]) в немалой степени изменило устоявшиеся представления о синхронизации как явлении. В отличие от явления классической синхронизации периодических колебаний, в силу своей распространенности и привычности, ставшее почти очевидным, явление хаотической синхронизации, напротив, казалось на то время маловероятным и даже невозможным. Причиной тому – сложившееся убеждение, что взаимодействие внутренне неустойчивых систем может порождать только лишь усиление неустойчивости. С точки зрения теории бифуркаций ситуация связанная с рождением предельных циклов на счетном множестве торов седлового типа (рождение нового аттрактора – образа синхронизации), возникающая при взаимодействии странных аттракторов, казалась невероятной. В порядке исследования свойств хаотической синхронизации стало ясно, что само определение синхронизации, сводимое до этого к соизмеримости частот, нуждается в обновлении. Было ясно и то, что уникальная по своим свойствам хаотическая синхронизация, которая может быть реализована при помощи простых технических решений (в частности, - радиотехнических схем), найдет самые широкие приложения.

Настоящая работа посвящена краткой истории открытия хаотической синхронизации, а также той точке зрения на это явление, которой придерживались авторы в то далекое время. Эта информация будет полезна в особенности тем, кто только начинает знакомиться с этим интересным и далеко не познанным явлением.

2. Об открытии хаотической синхронизации. В 1985 году, для иллюстрации хаотической динамики осцилляторов в учебном процессе (ГГУ, кафедра Теории колебаний), на аналоговой машине было смоделировано дифференциальное уравнение нелинейного параметрического осциллятора вида

$$\ddot{x} + k\dot{x} + (1 + q \cos \Omega t)x + x^3 = 0 \quad (1)$$

Привлекательность этого осциллятора состояла в том, что он демонстрирует хаотическую динамику в широком диапазоне параметров, и, кроме того, при разных параметрах он имеет топологически различные типы хаотических аттракторов, рис.1.

Рис.1. Различные типы хаотических аттракторов осциллятора $q = 50, \Omega = 2$. а: $k = 0.56$,
б: $k = 0.46$.

В силу инвариантности уравнения (1) к замене $x \rightarrow -x$, для каждого несимметричного аттрактора, рис.1,а существует симметричный ему аттрактор – близнец. При изменении параметров k или q переход от а к б происходит через “кризис аттракторов” – объединение областей притяжения аттракторов – близнецов. Здесь и далее изображены результаты компьютерного счета. Оригинальные результаты аналогового моделирования см. в [8]. Далее возник интерес к исследованию динамики связанной системы вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1, \dot{y}_1 = -k_1 y_1 - (1 + q \cos \theta + x_1^2) x_1 - \varepsilon (y_1 - y_2), \\ \dot{x}_2 &= y_2, \dot{y}_2 = -k_2 y_2 - (1 + q \cos \theta + x_2^2) x_2 + \varepsilon (y_1 - y_2), \\ \dot{\theta} &= \Omega.\end{aligned}\tag{2}$$

Исследуя динамику этих осцилляторов, и была обнаружена, ставшая теперь хорошо известной, хаотическая синхронизация. К сожалению, из-за небыстрого на то время распространения зарубежной научной информации в нашей стране (СССР), нам была неизвестна работа [6]. По этой причине в нашей статье нет ссылки на эту работу, и обнаруженное явление нами было описано полностью: в идентичном и неидентичном случаях.

В случае идентичных осцилляторов экспериментально было обнаружено существование критического значения параметра связи ε^* , такого, что при всех $\varepsilon > \varepsilon^*$ имеет место полная изохронная синхронизация хаотических колебаний, в то время как при $\varepsilon < \varepsilon^*$ синхронизация является “частичной”. В последнем случае осциллограммы хаотических процессов представляются длинными цугами синхронизированных колебаний, сменяющимися десинхронизацией, с последующим восстановлением режима синхронизации через некоторое короткое время, рис.2.

Рис.2. Режим частичной хаотической синхронизации идентичных осцилляторов: $q = 50, \Omega = 2$, $k = 0.46, \varepsilon = 0.33$.

С увеличением параметра связи величина отклонения фазовой траектории от диагоналей плоскостей (x_1, x_2) и $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ уменьшается, диагонали покрываются множеством мелких «островков» неустойчивости, величина которых уменьшается при увеличивающемся параметре ε . Впоследствии этот динамический режим, предшествующий взаимному захвату колебаний, назван “bubbling synchronization”. Далее при всех $\varepsilon > \varepsilon^*$ изображающая точка уже не покидает диагональ - синхронизация становится полной, рис.3.

Здесь отрезок траектории, примыкающий к диагонали, соответствует переходному процессу. В режиме синхронизации “парциальные” фазовые портреты в индивидуальных подпространствах осцилляторов $(x_1, \dot{x}_1, t)$ и $(x_2, \dot{x}_2, t)$ являются тождественными. Заметим, что при значениях связи $\varepsilon = \varepsilon^* + \alpha$, где $\alpha > 0$ и невелико, синхронизация устойчива “в большом”, но не глобально. В этом случае наряду с хаотическим аттрактором, соответствующим синхронизации, могут существовать и другие регулярные или хаотические аттракторы. С увеличением связи побочные аттракторы исчезают, и режим хаотической синхронизации становится устойчивым глобально.

Необходимо заметить, что существование синхронизации в случае идентичных систем представляется почти очевидным фактом, поскольку непосредственно из уравнений (2), следует, что $x_1(t) = x_2(t)$, $y_1(t) = y_2(t)$ является решением (точнее, - интегральным многообразием) системы. На многообразии связанная система (2.) распадается на пару синхронизированных осцилляторов. В данном случае роль связи сводится к обеспечению устойчивости хаотической синхронизации.

Рис.3. Переходный процесс и полная хаотическая синхронизация: $q = 50, \Omega = 2$,
 $k_1 = k_2 = k = 0.46, \varepsilon = 1.5$.

Для неидентичных осцилляторов ситуация меняется радикально. В этом случае такого простого экспериментального критерия синхронности колебаний как движения на диагоналях нет. Вместо диагонали на плоскости (x_1, x_2) изображающая точка (точнее, - ее проекция) хаотически движется в пределах некоторой полосы и если наблюдать только это движение, то трудно говорить о том: существует ли в данном случае синхронизация осцилляторов или нет.

В данном случае важно было обратить внимание на то, что парциальные фазовые точки (проекции фазовой точки на подпространства осцилляторов) движутся согласованно и вырисовывают геометрически подобные фазовые портреты. Другими словами, важным является то, что между парциальными фазовыми портретами синхронизированных осцилляторов существует пространственно-временная связь, рис.4.

В простейшем случае один фазовый портрет получается из другого в результате растяжения (сжатия), а далее любая его часть отображается на соответствующую часть другого в результате некоторого постоянного временного сдвига по траекториям. Реализации соответственных переменных осцилляторов имеют те же самые свойства: одна из них может быть получена из другой в результате двух операций- растяжения по ординате и сдвига по времени, рис.4. В данном случае, несмотря на существенную разницу параметров осцилляторов ($k_1 = 0.82, k_2 = 0.1$), временной сдвиг практически отсутствует. В результате наблюдения хаотической синхронизации различных осцилляторов, было дано следующее ее определение.

Рис.4. Взаимосвязь парциальных фазовых портретов неидентичных осцилляторов в режиме синхронизации: $q = 50, \Omega = 2, k_1 = 0.82, k_2 = 0.1, \varepsilon = 1.5$.

Определение. Пусть $\dot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{F}_1(\mathbf{X}_1)$, $\dot{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{F}_2(\mathbf{X}_2)$, $\mathbf{X}_1 \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{X}_2 \in \mathbf{R}^m$ – динамические системы двух осцилляторов. Предположим, что каждая из этих систем имеет аттракторы A_1 и A_2 , соответственно. Рассмотрим связанную систему вида

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}_1 &= \mathbf{F}_1(\mathbf{X}_1) + \varepsilon \mathbf{f}_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2), \\ \dot{\mathbf{X}}_2 &= \mathbf{F}_2(\mathbf{X}_2) + \varepsilon \mathbf{f}_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)\end{aligned}$$

Будем говорить, что имеет место синхронизация осцилляторов (в частности хаотическая) для значений параметра связи из интервала $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$, если для этих значений ε существует аттрактор A_ε , такой, что:

- его образы $\pi_1(A_\varepsilon)$ и $\pi_2(A_\varepsilon)$ при проекциях на “парциальные пространства” переводятся один в другой с помощью взаимно однозначного, взаимно непрерывного отображения, т.е. гомеоморфные (π_1 и π_2 – естественные проекции на подпространства $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$),
- существует гомеоморфное отображение $g: \pi_1(A_\varepsilon) \rightarrow \pi_2(A_\varepsilon)$, со следующими свойствами:
 - g – Липшиц непрерывно на $\pi_1(A_\varepsilon)$,
 - для любой траектории $\{T^t(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)\} \subset A_\varepsilon$, где T^t – отображение сдвига по траекториям связанной системы,

б) $g(\pi_1(T^t(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2))) = \pi_2(T^{rt+\alpha(t)}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2))$, причем $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{rt+\alpha(t)}{t} = r$ – рациональное число.

Если $r=1$, то синхронизацию называем “простой”, а во всех других случаях – “кратной”. Кратная синхронизация хаотических колебаний с числом вращения $r=2$ обнаружена в работе [8]. Заметим, что введенное “число вращения” r является аналогом числа вращения Пуанкаре на торе.

Данное *определение* фактически утверждает, что все индивидуальные характеристики колебаний синхронизированных осцилляторов: спектры, размерности и т.д. являются или подобными или равными. На рис.5 представлены спектры мощности реализаций $x_1(t)$ и $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ в режиме хаотической синхронизации [9].

Рис.5. Спектры мощности реализаций переменных в режиме хаотической синхронизации осцилляторов.

Видим, что два спектра повторяют друг друга даже в мелких деталях.

На рис.6 представлена эволюция фрактальной размерности аттрактора связанной системы осцилляторов при увеличении параметра связи [9].

Рис.6. Эволюция фрактальной размерности хаотического аттрактора системы (2).

При достаточно малых значениях ε величина размерности аттрактора связанной системы практически равна сумме размерностей аттракторов несвязанных осцилляторов. С увеличением связи размерность монотонно падает и при полной синхронизации стабилизируется, оставаясь далее неизменной при значениях $\varepsilon > \varepsilon^*$. При этом : $\dim \pi_1(A_\varepsilon) = \dim \pi_2(A_\varepsilon) = \dim A_\varepsilon$. Объяснить данное поведение размерности достаточно

просто. Напомним, что в случае классической синхронизации эволюция размерности аттрактора взаимодействующих осцилляторов протекает скачкообразно. А именно, при малой связи в фазовом пространстве системы имеется устойчивый двумерный тор с квазипериодической обмоткой (режим биений). При этом размерность аттрактора равняется двум. Далее на торе рождается устойчивый предельный цикл (режим синхронизации), и размерность аттрактора уменьшается скачком до единицы. Возвращаясь к рассматриваемому случаю имеем следующую ситуацию. При малых ε аттрактор связанной системы включает в себя счетное множество двумерных торов седлового типа. С увеличением связи, на каждом из этих торов (последовательно) рождаются предельные циклы седлового типа, и каждое такое рождение влечет за собой упорядочение взаимного движения, поскольку циклы имеют устойчивые по трансверсалиям к многообразию направления. То есть, весь падающий участок на графике размерности – «растянутый скачок», который представляет собой бесконечную последовательность скачков ничтожно малой амплитуды.

3. Асимптотическая теория. В рамках приведенного выше *определения* синхронизации построим ее количественную асимптотическую теорию для случая слабо неидентичных осцилляторов с линейной диссипативной связью. С другими асимптотическими исследованиями можно ознакомиться в [10].

Рассматриваем связанную систему двух однотипных хаотических осцилляторов, со слабо неидентичными параметрами:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{X}_1) - \varepsilon \mathbf{C}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) + \mu \mathbf{F}_1^*(\mathbf{X}_1, \mu), \\ \dot{\mathbf{X}}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{X}_2) + \varepsilon \mathbf{C}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) + \mu \mathbf{F}_2^*(\mathbf{X}_2, \mu)\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь μ – некоторый безразмерный малый параметр, отражающий малую неидентичность параметров осцилляторов, $\mathbf{C}$ – диагональная матрица, определяющая набор связанных переменных осцилляторов. В частности, для системы (2) $\mathbf{C} = \text{diag}(0, 1)$.

В первую очередь решим вопрос устойчивости синхронизации. Если $\mu = 0$, то (3) обращается в систему идентичных осцилляторов, которую далее будем называть “порождающей” системой. Соответственно, ее интегральное многообразие $M_0 = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 | \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2\}$ – “порождающим” интегральным многообразием. Введем в системе (3) переменную $\mathbf{U} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$ и рассмотрим уравнение вида

$$\dot{\mathbf{U}} = (\mathbf{F}'(\xi(t)) - 2\varepsilon \mathbf{C})\mathbf{U} + \mu \mathbf{F}^*(t, \mathbf{U}, \mu). \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{F}'(\cdot)$ – матрица Якоби для функции $\mathbf{F}(\mathbf{X})$, $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}_1^* - \mathbf{F}_2^*$.

При переходе от системы (3) к уравнению (4) использована теорема Лагранжа, $\xi(t) \in M_0$.

Порождающее многообразие ($\mu = 0$) соответствует решению $\mathbf{U} = 0$ этого уравнения.

Далее можно воспользоваться теорией интегральных многообразий квазилинейных систем [11], согласно которой, если порождающее многообразие уравнения (4) устойчиво, то при достаточно малом $\mu \in [0, \mu^*)$ существует и устойчиво многообразие вида

$M_\mu = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 | \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 + \mu \mathbf{X}^*(\mathbf{X}_2, \mu)\}$. На этом многообразии располагается аттрактор возмущенной системы, соответствующий синхронизации осцилляторов. Заметим, что часть этого многообразия, в виде некоторой узкой области – полосы, вытянутой вдоль диагонали плоскости (x_1, x_2) , мы и наблюдаем в эксперименте, рис.4. Таким образом, задача

устойчивости синхронизации сводится к задаче устойчивости тривиального решения уравнения вида

$$\dot{U} = (F'(\xi(t)) - 2\varepsilon C)U \quad (5)$$

Видим, что если $\varepsilon = 0$, $\xi(t) \in A_0 \in M_0$, то уравнение (5) совпадает с уравнением в вариациях для одиночного осциллятора. Будем считать, что максимальный ляпуновский показатель его аттрактора нам известен и равен $\lambda_{\max}$. Этого достаточно, чтобы показать: если матрица связи является единичной, $C = I$, то условие устойчивости уравнения (5) выражается неравенством $\varepsilon > \lambda_{\max} / 2$, а в общем случае – неравенством $\varepsilon > \varepsilon^*$, где величина ε^* зависит не только от ляпуновского показателя, но и от структуры связей осцилляторов – матрицы C . Далее решим вопрос о количественной стороне взаимосвязи фазовых портретов осцилляторов в режиме синхронизации. Эта связь близка к тождественной, а, значит, речь идет о тех добавках, которые возникают вследствие различия параметров. Представим многообразие M_μ в параметрической форме, в виде степенных рядов по малому параметру:

$$\begin{aligned} X_1 &= X + \mu X_{11}(X) + \mu^2 X_{12}(X) + \dots, \\ X_2 &= X + \mu X_{21}(X) + \mu^2 X_{22}(X) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Параметром многообразия здесь является вектор X . Предположим, что этот вектор является решением дифференциального уравнения вида

$$\dot{X} = F(X) + \mu F_*(X) + \mu^2 F_{**}(X) + \dots \quad (7)$$

Допустим, что функции $F_*(X)$, $F_{**}(X)$, ..., $X_{11}(X)$, $X_{21}(X)$, ... некоторым образом нами найдены. Тогда синхронизация осцилляторов формально может быть интерпретирована «без самих осцилляторов» следующим образом. В $2n$ -мерном евклидовом пространстве, которое является фазовым пространством системы осцилляторов, имеется n -мерная гиперповерхность M_μ , которая заполнена фазовыми траекториями уравнения «эффективного» осциллятора (7). При этом проекции его фазового портрета, определяемые системой (6), являются парциальными фазовыми портретами синхронизированных осцилляторов. Явное выражение для функциональной связи парциальных портретов находится исключением параметра из системы (6). Другими словами, динамику ансамбля синхронизированных субъектов можно заменить динамикой одного эффективного субъекта с набором функциональных связей, отражающих количественные характеристики колебаний синхронизированных членов этого ансамбля.

Заметим, что если уравнения (6) интерпретировать как замену переменных для системы (3), то она переопределена, а, значит, имеется свобода выбора необходимого числа функциональных соотношений. Действуя далее в технике малого параметра (разложение в степенные ряды, приравнивание коэффициентов), для функций первого приближения получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} F_* + \dot{X}_{11} &= F' X_{11} - \varepsilon C(X_{11} - X_{21}) + F_1^*, \\ F_* + \dot{X}_{21} &= F' X_{21} + \varepsilon C(X_{11} - X_{21}) + F_2^*. \end{aligned} \quad (8)$$

Положим в системе (8), что $\mathbf{X}_{21} + \mathbf{X}_{11} = 0$. В таком случае, для определения других функций получаем уравнения вида

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_* &= (\mathbf{F}_1^* + \mathbf{F}_2^*)/2, \\ \dot{\mathbf{X}}_{11} &= \mathbf{F}' \mathbf{X}_{11} - 2\varepsilon \mathbf{C} \mathbf{X}_{11} + (\mathbf{F}_1^* - \mathbf{F}_2^*)/2.\end{aligned}\tag{9}$$

Вместо второго уравнения из системы (9), можно решать эквивалентное ему по первому приближению уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial \mathbf{X}_{11}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{X}_{11} + 2\varepsilon \mathbf{C} \mathbf{X}_{11} = \frac{\mathbf{F}_1^* - \mathbf{F}_2^*}{2}.\tag{10}$$

Выясним вид уравнения первого приближения для эффективного осциллятора. Из правых частей системы (3) получаем: $\mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mu \mathbf{F}_1^*(\mathbf{X}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{X})$, $\mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mu \mathbf{F}_2^*(\mathbf{X}) = \mathbf{F}_2(\mathbf{X})$. При этом, с учетом первого уравнения (9), правая часть уравнения (7) вычисляется следующим образом: $\mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mu \mathbf{F}_*(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mu (\mathbf{F}_1^* + \mathbf{F}_2^*)/2 = (\mathbf{F}_1(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{X}))/2$. Получаем, ожидаемый, но тем более и ценный для теории результат: эффективный осциллятор имеет параметры среднеарифметические параметров взаимодействующих осцилляторов. В эксперименте, результат которого изображен на рис.4: $k_1 = 0.82$, $k_2 = 0.1$, $(k_1 + k_2)/2 = 0.46$. Здесь изображен небольшой отрезок траектории. Однако, если бы этот отрезок был много больше, то получилась бы картина, на визуальном уровне не отличимая от фазового портрета изображенного на рис. 1,б, для которого $k = 0.46$. В другой асимптотике в [6] получен такой же результат.

В общем случае решение уравнения (10) представляет собой трудоемкую задачу. Приведем здесь пример вида возмущений, для которого существует простое решение. Допустим, что $(\mathbf{F}_1^* - \mathbf{F}_2^*)/2 = \nu \mathbf{C} \mathbf{F}$, где ν – число. Тогда непосредственной подстановкой можно убедиться, что $\mathbf{X}_{11} = \Delta \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X})$, где $\Delta = \nu/2\varepsilon$, является решением уравнения (10). В этом случае уравнения (6) в первом приближении имеют вид: $\dot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{X} + \mu \Delta \dot{\mathbf{X}}$, $\dot{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{X} - \mu \Delta \dot{\mathbf{X}}$. В свою очередь, это определяет отображение сдвига по траекториям: $\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{X}_2(t + 2\mu\Delta)$ (первое приближение).

Иллюстрация временного (фазового) сдвига приведена на рис.7. Численный эксперимент проводился над системой связанных хаотических осцилляторов Чуа:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha_1 (y_1 - h(x_1)) - \varepsilon (x_1 - x_2), \\ \dot{y}_1 &= x_1 - y_1 + z_1, \\ \dot{z}_1 &= -\beta y_1 - \gamma z_1, \\ \dot{x}_2 &= \alpha_2 (y_2 - h(x_2)) + \varepsilon (x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= x_2 - y_2 + z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\beta y_2 - \gamma z_2,\end{aligned}$$

$$h(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_2 - m_1)(|x+1| - |x-1|).$$

Рис. 7. Временной сдвиг синхронизированных хаотических колебаний.

Значения параметров в эксперименте: $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma, m_2, m_1, \varepsilon\} = \left\{14, 4, 14, 0.1, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 2\right\}$.

Теоретический параметр сдвига $2\mu\Delta = \phi_0 = (\alpha_1 - \alpha_2) / \varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2) = 5/18$. Непосредственно по рисунку можно убедиться в достаточной точности теории, несмотря на то, что параметры осцилляторов не отличаются высокой близостью (известное “чудо” малого параметра). Естественно, здесь остается в силе и то, что аттрактор A_μ связанной системы по своим свойствам близок к аттрактору эффективного осциллятора с параметром $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2) / 2 = 9$.

4. Вместо заключения. Начиная с 90-х прошлого века и по настоящее время, исследования хаотической синхронизации развиваются чрезвычайно интенсивно и количество публикаций на эту тему огромно. Явление многогранно и с самого начала исследований стало обильно обрастать собственной терминологией: “bubbling synchronization” [12,13], “generalized synchronization” [14-16], “phase synchronization” [17], “lag synchronization” [18], “riddled basins of attraction” [19], “on-off intermittency” [20] и др.

К настоящему времени уже сформировалось несколько направлений теоретических и прикладных исследований.

Одно из них, - современные информационные технологии. Первые сообщения об экспериментах по передаче информации на основе хаотической синхронизации появились в начале 90-х годов [21-23]. Привлекательность использования динамического хаоса в передаче информации связана со следующими обстоятельствами. Во-первых, с широкополосностью сигнала носителя, - с его большой информационной емкостью. Во-вторых, - с возможностью конфиденциальности (скрытности) передачи информации.

Конфиденциальность связи достигается в результате того, что “эталонный” автогенератор, определяющий хаотическую несущую информационного сигнала, синхронизируется только с аналогичным ему по динамике автогенератором.

Другое направление связано с моделированием биологических нервных тканей, а также искусственных нейроноподобных сетей. Многочисленные физиологические наблюдения за деятельностью различных отделов головного мозга показывают хаотичность их динамики. Таковой она может быть как отражение нормальной жизнедеятельности, или стать таковой вследствие кризисного состояния объекта [73, 74]. По этой причине моделирование нервных сетей в виде связанных динамических систем с хаотической динамикой представляется правдоподобным и дает достаточно адекватные результаты. Число публикаций по моделированию биологических систем огромно. С частью из них можно ознакомиться в обзорах [24, 25].

Наконец, нельзя не упомянуть исследований диссипативных структур в решетках осцилляторов. Эти объекты, с одной стороны, имеют собственные технические приложения (антенные решетки, фрактальные антенны и др.), а с другой стороны, представляют собой адекватные дискретные модели для описания структурной динамики сплошных сред. Решетки начали исследоваться давно, безотносительно к хаотической синхронизации, однако, она «вдохнула» в эти исследования новое содержание. Стало очевидным, что именно хаотическая синхронизация лежит в основе образования структур с локальной турбулентной динамикой – структурной турбулентности. Самым известным примером здесь являются конвективные структуры, с хаотической динамикой элементов в виде конвективных валов или ячеек Бенара. Вероятно, что турбулентные структуры является одним, если не главным, из механизмов образования развитой турбулентности. По крайней мере, числовые свойства инвариантных многообразий решеток [26-28] и математические теории «числовой» турбулентности говорят именно об этом.

Список литературы

1. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. - М. – Л.: ОГИЗ, 1947.
2. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. - М. – Л.: ГИТТЛ, 1950. - 472 с.
3. Van der Pol B. [1927] Forced oscillation in circuit with non-linear resistance. // Philos. Mag. – 1927, Ser. 7. - Vol.3, No 13. - P.65-80.
4. Андронов А.А., Витт А.А. К математической теории захватывания // Журнал прикладной физики. - 1930. - Т.7, № 4. - С.3-11.
5. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. - М.– Ижевск: НИЦ «РХД», 2004. - 354 с.
6. Yamada T., Fujisaka H. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Prog. Theor. Phys. - 1983. - Vol.70. - P.1240-1248.
7. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. - 1986. - Т.29, №9. - С.1050-1060.
8. Rulkov N.F., Afraimovich V.S., Lewis C.T., Chazottes J.-R., Cordonet A. Multi-valued in generalized chaos synchronization // Phys. Rev. E. - 2001. - Vol. 64, 016217.
9. Verichev N.N., Maksimov A.G. Synchronization of stochastic oscillations of parametrically excited nonlinear oscillators // Radiophysics and Quantum Electronics. - 1989. - Vol. 32, No 8. - P. 713-716.
10. Verichev N.N., Verichev S.N., Wiercigroch M. Asymptotic theory of synchronization for dissipative-coupled dynamical systems // Chaos, Solitons & Fractals. - 2009. - Vol. 41, No 2. - P. 752-763.

11. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. - М.: Наука, 1973. - 512с.
12. Ashwin P., Buescu J., Stewart I. Bubbling of attractors and synchronization of oscillators // Phys. Lett. A. - 1994. - Vol.193. - P.126-139.
13. Heagy J.F., Carroll T.L., Pecora L.M. Desynchronization by periodic orbits // Phys. Rev. E. - 1995. - Vol. 52. - P.1253-1256.
14. Rulkov N.F., Suschik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. - 1995. - Vol. 51. - P.980-994.
15. Abarbanel H.D., Rulkov N.F., Suschik M.M. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // Phys. Rev. E. - 1996. - Vol. 53. - 4528.
16. Kocarev L., Parlitz U. Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems // Phys. Rev. Lett. - 1996. - Vol. 76. - P.1816-1819.
17. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. - 1996. - Vol.76. - P.1804-1807.
18. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. - 1997. - Vol. 78. - P. 4193-4196.
19. Alexander J.C., Yorke J.A., You Z., Kan I. Riddled basins // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. - 1992. - Vol. 2. - P.795-813.
20. Yu L., Ott E., Chen Q. Fractal distribution of floaters on a fluid surface and the transition to chaos for random maps // Physica D. - 1992. - Vol. 53. - P.102-124.
21. Дмитриев А.С., Панас А.И., Старков С.О. Динамический хаос как парадигма современных систем связи // Успехи современной радиоэлектроники. - 1997. - № 10. - С.4-26.
22. Kocarev L., Halle K.S., Eckert K., Chua L., Parlitz U. Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization // Int. J. Bifurcation and Chaos. - 1992. - Vol. 2, No 3. - P. 709-713.
23. Dedieu H., Kennedy M., Hasler M. Chaos shift keying: Modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuits // IEEE Trans. Circuits Syst.-II: Analog Digit. Signal Process. - 1993. - Vol. 40. - P. 634-642.
24. Абарбанель Г.Д., Рабинович М.И., Селверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Сушик М.М., Рубчинский Л.Л. Синхронизация в нейронных ансамблях // Успехи физических наук. - 1996. - Т.166, № 4. - С.363-390.
25. Борисюк Г.Н., Борисюк Р.М., Казанович Я.Б., Иваницкий Г.Р. Моделирование динамики нейронной активности и обработка информации в мозге – итоги «десятилетия» // Успехи физических наук. - 2002. - Т. 172, № 10. - С.1189-1214.
26. Josic K. Invariant manifolds and synchronization of coupled dynamical systems // Phys. Rev. Lett. - 1998. - Vol. 80. - P.3053-3056.
27. Georgiou I.T., Bajaj A.K., Corless M. Invariant manifolds and chaotic vibrations in singularly perturbed nonlinear oscillators // Int. J. Eng. Sci. - 1998. - Vol. 36. - P. 431-458.
28. Belykh V.N., Belykh I.V., Hasler M. Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems // Phys. Rev. E. - 2000. - Vol. 62. P.6332-6345.

Дата поступления: 22 марта 2018 г.

УДК 534.1

К ПРОБЛЕМЕ АНАЛИЗА СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ УДАРНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПРИ ОТКАЗЕ ОТ ГИПОТЕЗЫ НЬЮТОНА

© Виталий Львович Крупенин^{1,2}¹ИМАШ РАН, Москва, Россия²Московский Политехнический Университет, Москва, Россияkrupeninster@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена методика расчета виброударной системы с одной степенью свободы, соударяющейся с нежестким ограничителем хода при широкополосном случайном силовом воздействии. Используются методы, предложенные и развитые Р.Л. Стратоновичем. Получены определяющие соотношения, найдены необходимые характеристики случайного виброударного процесса.

Ключевые слова: удар, виброударная система, гипотеза Ньютона, стандартный белый шум, уравнение ФПК, плотность вероятностей, буфер.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (проект 18-08-00168).

TO THE ANALYSIS OF VIBRATIONAL CONDUCTING SYSTEMS WITH INCLUSIVE SHOCK VARIATIONS

© Vitaly Krupenin^{1,2}¹IMASH RAN, Moscow, Russia²Moscow Polytechnic University, Moscow, Russiakrupeninster@gmail.com

Abstract. The technique for calculating a vibro-impact system with one degree of freedom colliding with a non-rigid limiter for broadband random force action is considered. The methods proposed and developed by R.L. Stratonovich. The determining relations are obtained, the necessary characteristics of a random vibro-impact process are found.

Keywords: impact, vibro-impact system, Newton's hypothesis, standard white noise, FPK equation, probability density, buffer.

Acknowledgements. The work was supported by RFBR (project 18-08-00168).

1. Введение. Задача учета конечной продолжительности времени ударного контакта, т.е. задача отказа в расчётах от гипотезы Ньютона и рассмотрения более реальных механизмов диссипации при ударах в ряде случаев остаётся достаточно актуальной. Методы сингуляризации [1, 2], позволяют это проделать, но, при рассмотрении случайных колебаний, вообще говоря, регулярные методики, по-видимому, не достаточно эффективны. Ниже рассмотрена схема расчета виброударной системы с одной степенью свободы при отказе от предположения о применимости гипотезы Ньютона. При этом считается, что возбуждение случайного виброударного процесса осуществляется за счет действия широкополосных силовых воздействий типа стандартных белых шумов. В качестве

методики исследования использована один из методик, предложенных Р.Л. Стратоновичем [3].

2. Постановка задачи. Рассмотрим ударный осциллятор [1, 2] в предположении, что точечное тело, его образующее, взаимодействует не с абсолютно жестким ограничителем, а с некоторым буфером, силовая характеристика которого

$$\Phi(u, \dot{u}) = \varepsilon r(u, \dot{u}) + \lambda \Phi_1(u), \quad (1)$$

где u -определяющая координата системы; $\varepsilon b(u, \dot{u})$ -диссипативная, а $\lambda \Phi_1(u)$ -упругая составляющая силы. При этом ε, λ - соответственно малый и большой параметры; $\varepsilon = O(\lambda^{-\alpha})$, $\alpha > 0$.

Относительно функции $\Phi(u, \dot{u})$ предполагаем, что она принадлежит классу пороговых функций [1, 2] и отлична от нуля только после достижения координатой некоторого порогового значения: $u \geq \Delta$.

Предположим, что возбуждения осуществляется силой $f(t)$, представляющей из себя широкополосный случайный процесс, который близок к стандартному белому шуму и имеет нулевое среднее значение.

Уравнение движения осциллятора запишем в виде:

$$\ddot{u} + \Omega^2 u + 2\varepsilon b \dot{u} + \varepsilon r(u, \dot{u}) + \lambda \Phi_1(u) = \sqrt{\varepsilon} f(t), \quad (2)$$

причём здесь все члены отнесены к единичной массе

Необходимо определить основные характеристики движения, т.е. характеристики случайного процесса $u(t)$.

3. Метод решения. Воспользуемся известной методикой Р.Л. Стратоновича и введём новую медленную переменную – полную энергию консервативной системы:

$$W = \frac{1}{2} \dot{u}^2 + U(u); \quad U(u) = \frac{1}{2} \Omega^2 u^2 + \lambda \int_0^u \Phi_1(u) du.$$

Тогда для двумерного марковского процесса после преобразований получим систему:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \pm \sqrt{2(E - W)}, \\ \dot{E} &= \mp \varepsilon \sqrt{2(W - U)} r_0(x, \sqrt{2(W - U)}) + \pm \sqrt{2\varepsilon(W - U)} f(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Причём здесь $r_0(u, \dot{u}) = 2b\dot{u} + r(u, \dot{u})$. Проведя усреднение по быстрой переменной u , можно составить уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова для плотности вероятности энергии W . Его решение будет иметь вид

$$p(W) = C_0 T_0(W) \exp \left[-\frac{2}{S} \int_0^W \frac{Q_1(W_0)}{Q_2(W_0)} dW_0 \right]. \quad (4)$$

Здесь обозначено: $C_0 = \text{const}$; $T_0(W)$ - период колебаний в консервативной при $\varepsilon = 0$ системе (2). Кроме того,

$$Q_1(W) = \int_{u_1(W)}^{u_2(W)} r_0(x, \sqrt{2(W - U(u))}) du + \int_{u_1(W)}^{u_2(W)} r_0(x, -\sqrt{2(W - U(u))}) du;$$

$$Q_2(W) = 2 \int_{u_1(W)}^{u_2(W)} \sqrt{2(W - U(u))} du,$$

где значения координаты $u_{1,2}(W)$ определяются как решения уравнения $U(u_{1,2}) = W$ и отвечают её предельно возможным значениям при данном уровне полной энергии W в вырожденной системе.

Величина S , фигурирующая в формуле (4) – интенсивность широкополосного стационарного процесса $f(t)$:

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(t)f(t+\tau) \rangle d\tau;$$

угловые скобки – операция статистического усреднения.

Подобные же соотношения находятся и для совместных плотностей вероятности $p(u_t, W)$, $p(u, u_t)$.

4. Пример. На рис. 1 изображена система, состоящая из осциллятора и буфера, который установлен с малым зазором величины $\varepsilon\Delta > 0$. Пусть пружинный элемент, входящий в буфер – линеен, а демпфирование осуществляется элементом, имеющим характеристику сухого трения.

Рис.1

Обозначая неизвестную координату через y , найдём, что уравнение движения (2) принимает следующий вид:

$$\ddot{y} + \Omega^2 y + \varepsilon 2b\dot{y} + \varepsilon\beta\eta(y - \varepsilon\Delta)\text{sign}\dot{y} + \lambda(y - \varepsilon\Delta)\eta(y - \varepsilon\Delta) = \sqrt{\varepsilon}f(t). \quad (5)$$

Здесь приняты следующие отношения порядка: $\varepsilon = O(\lambda^{-1/2})$; $\beta = O(\varepsilon^{-1})$, поскольку демпфирование в зоне контакта действует малое время ударного взаимодействия $t_\lambda \sim (\lambda^{-1/2})$ [4].

Обозначим $u = y - \varepsilon\Delta$ и перепишем уравнение движения в виде

$$\ddot{u} + \Omega^2 u + \varepsilon[2b\dot{u} + \Omega^2\Delta] + \varepsilon\beta\text{sign}\dot{u}\eta(u) + \lambda u\eta(u) = \sqrt{\varepsilon}f(t). \quad (6)$$

Для вырожденной системы при $\varepsilon=0$ имеет место изохронизм колебаний, свойственной системам с нулевым зазором [2]. Здесь колебания могут происходить только на частоте

$$\Omega_\lambda = 2\Omega \frac{\sqrt{\Omega^2 + \lambda}}{\sqrt{\Omega^2 + \lambda} + \Omega} \approx 2\Omega(1 - \frac{\Omega}{\sqrt{\lambda}}). \quad (7)$$

Отметим, что при принятии гипотезы о мгновенном ударе, когда $\lambda \rightarrow \infty$, система переходит в традиционный ударный осциллятор. Частота его изохронных колебаний $\Omega_\infty = 2\Omega$ [2].

При помощи формулы (4) определим функцию плотности вероятности полной энергии $p(W)$.

Определим вид функций $Q_1(W)$ и $Q_2(W)$. Можно легко вычислить следующие значения определяющих величин:

$$u_1(W) = -\Omega^{-1} \sqrt{2W}; \quad u_2(W) = \frac{\sqrt{2W}}{\Omega^2 + \lambda}; \quad r_0(u, \dot{u}) = [2b\dot{u} + \Omega^2 \Delta] + \varepsilon \beta \text{sign} \dot{u} \eta(u).$$

Далее находим:

$$Q_1(W) = \int_{u_1(W)}^{u_2(W)} 4b\sqrt{2(W - U(u))} du + 2\beta u_2(W) = 2[bQ_2(W) + \beta u_2(W)]$$

$$Q_2(W) = 2 \int_{u_1(W)}^{u_2(W)} \sqrt{2(W - U(u))} du = \frac{2\pi W}{\Omega_\lambda}.$$

Здесь последнее равенство следует из того факта, что действие $J_0 = \frac{1}{2\pi} Q_2(W)$ и в случае изохронизма: $W = \Omega_\lambda J_0$ [5, 6]. Таким образом вычислены все величины, входящие в формулу (4). Поэтому можно записать выражение для плотности вероятности случайного процесса $W(t)$:

$$p(W) = \frac{2\pi C_0}{\Omega_\lambda} \exp \left\{ -\frac{2}{S} \left[2bW + \frac{2\sqrt{2}\beta\Omega_\lambda}{\pi\sqrt{(\Omega^2 + \lambda)}} \sqrt{W} \right] \right\}. \quad (8)$$

Для квадратной скобки, входящей в показатель этой экспоненты выберем обозначение $B(W)$:

$$B(W) = 2bW + \frac{2\sqrt{2}\beta\Omega_\lambda}{\pi\sqrt{(\Omega^2 + \lambda)}} \sqrt{W}. \quad (9)$$

Можно показать, что совместные плотности вероятности $p(u, W)$ и $p(u, \dot{u})$ даются следующими выражениями:

$$p(u, W) = C_1 \frac{1}{2\sqrt{2(W - U(u))}} \exp \left[-\frac{2}{S} B(W) \right],$$

$$p(u, \dot{u}) = C_2 \exp \left\{ -\frac{2}{S} B \left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 + U(u) \right] \right\}.$$

Причём константы C_1 и C_2 находятся из условий нормировки.

Посредством замены $y = u - \varepsilon \Delta$ можно вернуться к исходной координате.

В качестве примера использования найденных представлений построим плотность вероятности амплитуды (полуразмаха) колебаний.

$$A = \frac{1}{2}[u_2(W) - u_1(W)] = \Omega_\lambda^{-1} \sqrt{2W}.$$

В соответствии с общими правилами вычисления плотностей вероятности случайных процессов, связанных некоторой детерминированной функциональной зависимостью [2] и, принимая во внимание, связь $W = \frac{1}{2}\Omega_\lambda^2 A^2$, найдём после ряда простых преобразований из формулы (8):

$$p(A) = 2\pi C_0 \Omega_\lambda A \exp \left\{ -\frac{2}{S} \left[2b\Omega_\lambda^2 A^2 + \frac{2\beta\Omega_\lambda^2}{\pi\sqrt{(\Omega^2 + \lambda)}} A \right] \right\}.$$

После проведения нормирования этой функции посредством интегрирования по $A \geq 0$, получаем

$$C_0 = 2b_1 \left[2\pi\Omega_\lambda \exp \left(\frac{\beta_1^2}{8b_1} \right) D_{-2} \left(\frac{\beta_1}{\sqrt{2b_1}} \right) \right]^{-1}.$$

Здесь $D_{-\gamma}(z)$ – функция параболического цилиндра [7],

$$b_1 = \frac{2b\Omega_\lambda^2}{S}, \quad \beta_1 = \frac{2\beta\Omega_\lambda^2}{S\pi\sqrt{\Omega^2 + \lambda}}.$$

Подобным же образом можно найти и моменты стационарного случайного процесса $A(t)$. Например, для начальных моментов легко получить формулу

$$m_A^{(q)} = \int_0^\infty A^q p(A) dA = 2b_1^{-\frac{1}{2}q} \frac{D_{-q-2} \left(\frac{\beta_1}{\sqrt{2b_1}} \right)}{D_{-2} \left(\frac{\beta_1}{\sqrt{2b_1}} \right)} (q+1)!$$

Значения использованной специальной функции параболического цилиндра затабулированы, а также имеются программы, позволяющие строить необходимые графики и производить вычисления.

Определением плотности вероятности исследуемого процесса и заканчивается решение поставленной задачи. Все необходимые оценки параметров могут быть выполнены теперь без труда. Найденное выражение (8) является приближенным, построенным с точностью до членов $\sim \varepsilon^2$.

Список литературы

1. Крупенин В. Л. Расчет механизмов с пороговыми нелинейностями методом сингуляризации // Машиноведение. - 1984. - № 1. - С. 6-12.
2. Бабицкий В. И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. - М.: Наука, 1985. - 320 с.
3. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. - М.: Советское радио, 1961. - 440 с.
4. Крупенин В. Л. О колебаниях систем с большими упругими силами порогового типа // Изв. АН СССР. МТТ. - 1983. - №4. - С. 76-84.
5. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. - М.: Наука, 1989. - 472 с.
6. Бурд В.Ш., Крупенин В.Л. Усреднение в квазиконсервативных системах. - М.: Белый Ветер, 2016. - 172 с.
7. Кузнецов Д.С. Специальные функции. - М.: Высшая школа, 1965. - 272 с.

Дата поступления: 12 марта 2018 г.

УДК 539.219.3:620.186.8

**АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ МИКРОСТРУКТУРЫ НА
АНОМАЛЬНЫЙ РОСТ ЗЕРЕН В СУБМИКРОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ
МЕТАЛЛАХ И СПЛАВАХ
Часть I. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ**

© Владимир Николаевич Перевезенцев, Александр Сергеевич Пупынин
Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального исследовательского
центра «Институт прикладной физики Российской академии наук»,
Нижний Новгород, Россия
pupynin.as@gmail.com

***Аннотация.** Разработана физическая модель аномального роста зёрен при отжиге субмикрокристаллических металлов и сплавов, полученных методами интенсивной пластической деформации. В основе модели лежат представления об ускорении диффузии в границах аномально растущего зерна, связанном с переходом быстро мигрирующих границ в сильно неравновесное состояние. Модель позволяет учесть влияние на процесс аномального роста зёрен таких параметров как исходный разброс зерен по размерам, исходная плотность дислокаций в границах зерен и объемная доля частиц второй фазы.*

***Ключевые слова:** неравновесные границы зерен, субмикрокристаллические материалы, миграция границ, аномальный рост зерен.*

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН на проведение фундаментальных научных исследований на 2013-2020 гг. по теме № 0035-2014-0401.

**ANALYSIS OF INFLUENCE OF PARAMETERS OF
MICROSTRUCTURE ON ANOMALOUS GROWTH OF GRAINS IN
SUBMICROCRYSTALLINE METALS AND ALLOYS
Part I. PHYSICAL MODEL**

© V.N. Perevezentsev, A.S. Pupynin
Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences,
Nizhny Novgorod, Russia
pupynin.as@gmail.com

***Abstract.** A physical model of anomalous growth of grains during annealing of submicrocrystalline metals and alloys obtained by the methods of intense plastic deformation is developed. The model is based on the idea of the acceleration of diffusion within the boundaries of anomalously growing grain, associated with the transition of rapidly migrating boundaries to a highly nonequilibrium state. The model allows to take into account the influence on the process of anomalous grain growth of such parameters as the initial spread of grains in size, the initial dislocation density in the grain boundaries, and the volume fraction of the particles of the second phase.*

***Keywords:** nonequilibrium grain boundaries, submicrocrystalline materials, boundary migration, anomalous grain growth.*

***Acknowledgements.** The work was carried out within the Russian state task of the Institute of Applied Physics for conducting fundamental scientific research for 2013-2020 on the topic No. 0035-2014-0401.*

Введение. Экспериментальные данные показывают, что в субмикроструктурных (СМК) металлах, полученных методами интенсивной пластической деформации (ИПД) [1], часто наблюдается аномальный рост зерен [2-4]. При кратковременных отжигах в структуре СМК материала на фоне мелкозернистой «матрицы» возможно появление отдельных зерен, размер которых существенно превышает размер зерен «матрицы». На примере СМК никеля [5] и алюминий-магниевого сплава [6] было показано, что путем кратковременных отжигов можно целенаправленно создавать бимодальную структуру с необходимыми долями мелких и крупных зерен и, как следствие, целенаправленно изменять прочностные и пластические свойства материала [5,6]. Аномальный рост зерен наблюдается также и в ряде алюминиевых сплавов [7]. Формирование бимодальной структуры при отжигах в указанных материалах приводит к увеличению долговечности при испытаниях образцов на малоцикловую усталость по сравнению с образцами непосредственно после равноканального углового прессования (РКУП) [8]. Как свидетельствуют экспериментальные данные [9] и результаты теоретических расчетов [10,11], такой показатель пластичности как однородное удлинение, также зависит от объемной доли крупных зерен. Создавая бимодальную структуру, удаётся, по крайней мере в некоторых случаях, увеличить как прочность, так и показатели пластичности материала. Так, формирование бимодальной структуры в меди после РКУП и последующих кратковременных отжигах (10 мин) ниже температуры начала рекристаллизации [12] приводит к повышению прочности при сжатии и высокой однородности пластического течения материала.

Приведённые выше факты говорят о том, что создание бимодальной структуры является одним из перспективных методов управления прочностными и пластическими характеристиками СМК металлов и сплавов, полученных методами ИПД. В связи с этим становится весьма актуальной разработка адекватной физической модели аномального роста зёрен с целью установления характера влияния на него и на формирующуюся в этих материалах бимодальную структуру режимов отжига и параметров микроструктуры (исходного размера зерна, объёмной доли второй фазы и др.).

Принципиальное отличие предлагаемой в данной работе модели аномального роста зёрен от предложенных ранее моделей [13,14], основанных на анализе движущих сил роста зёрен, заключается в том, что в качестве основной причины аномального роста зёрен рассматривается возможность перехода быстро мигрирующих границ зёрен в сильно неравновесное состояние, характеризующееся аномально высокой скоростью зернограницной диффузии [15-18].

Описание модели. Рассмотрим процессы, происходящие при аномальном росте зерен в СМК металлах и сплавах, полученных методами ИПД. При этом следует учесть такую специфическую особенность структуры таких материалов, как наличие предельно высоких значений плотности дислокаций ($\approx 10^7 - 10^8 \text{ м}^{-1}$), накопившихся в границах зерен в процессе предшествующей деформации [19].

Границы растущего зерна «заматают» примыкающие к нему участки границ соседних зерен. При этом принадлежащие последним зернограницные атомы встраиваются в кристаллическую решетку растущего зерна, а их избыточный (по отношению к их объему в кристаллической решетке) объем выделяется в виде вакансий в границах растущего зерна. Важно, что вакансии в неупорядоченной атомной структуре обычной границы при повышенных температурах неустойчивы и делокализуются [17], приводя к увеличению ее неравновесного избыточного («свободного») объема. Помимо рассмотренного увеличения избыточного объема мигрирующей границы может осуществляться и его уменьшение, вызванное термоактивированным процессом возникновения в границе локализованных вакансий и выходом их в объем соседних зерен [16]. Кинетика изменения неравновесного относительного избыточного объема f границы, мигрирующей со скоростью V_m описывается уравнением [17,18]:

$$\dot{f} = \varphi \frac{V_m}{d_0} f^* - \frac{\Omega_v}{\delta} [2A_0 \exp(\alpha f) - B(2C^* + \Delta C_1 + \Delta C_2)_{(r=d/2)}], \quad (1)$$

Здесь: f - неравновесный относительный избыточный объем, приходящийся на один атом границы, $A_0 = \omega_b/a^2 \exp(-(F_{vf} + \Delta F)/kT + \alpha f^*)$, $\alpha = K_b v_b^0/2kT$, K_b - модуль всестороннего сжатия, v_b^0 - объем зернограничного атома, $B = a \omega \exp(-\Delta F/kT)$, F_{vf} и ΔF - свободная энергия образования решеточной вакансии и энергия активации перескока атома из объема зерна в границу, соответственно; ω_b и ω - частота колебаний атомов в границе и в объеме зерна; a - межатомное расстояние; φ - геометрический множитель; d_0 - средний размер зерен матрицы; f^* - избыточный объем атома равновесной границы [13]; Ω_v - объем вакансии; δ - ширина границы зерна; ΔC_1 и ΔC_2 - концентрации неравновесных вакансий внутри растущего зерна и вне его; C^* - равновесная концентрация вакансий вблизи границы, k - постоянная Больцмана; T - температура. Первое слагаемое в (1) описывает увеличение f за счет «заметания» мигрирующей границей примыкающих к ней участков границ соседних зерен, а второе - его уменьшение за счет обмена вакансиями между границей и объемом зерна. Первое слагаемое в квадратных скобках описывает процесс термофлуктуационного возникновения в границе локализованных вакансий и выхода их в объем как растущего зерна, так и соседних зерен, второе слагаемое - процесс перескока вакансий из объема зерен в границу [21].

Как показано в [15], коэффициент зернограничной диффузии экспоненциально зависит от неравновесного относительного избыточного объема границы:

$$D_b = D_b^* \exp(\alpha f), \quad (2)$$

где D_b^* - коэффициент диффузии равновесной границы.

Увеличение степени неравновесности границы (т.е. величины f) приводит к ускорению диффузии по границам растущего зерна и, как следствие, увеличению их подвижности, $M_b = D_b \delta b / kT$ (b - вектор Бюргерса), и скорости миграции V_m . При дальнейшем рассмотрении следует учесть такую специфическую особенность границ зёрен в СМК материалах, как наличие высокой линейной плотности дислокаций ($\rho_b \approx 10^7 - 10^8 \text{ м}^{-1}$), накопившихся в процессе предшествующей ИПД [19]. В процессе миграции границ аномально растущего зерна и «заметания» ими участков границ соседних зерен расположенные в последних дислокации переходят на границы растущего зерна, изменяя их миграционную подвижность. Как показано в [22], эффективный коэффициент миграционной подвижности такой границы имеет вид:

$$M_{eff} = \frac{M_{\perp} M_b}{M_{\perp} + M_b \rho_b \Delta b_t}, \quad (3)$$

где: Δb_t - тангенциальная составляющая вектора Бюргерса дислокаций, $M_{\perp} = (2\pi/\ln(d/b))(\bar{D}\Omega/kT\Delta b_t)$ - подвижность дислокаций [21], $\bar{D} = D_s + \beta \delta D_b/d$ - эффективный коэффициент диффузии, D_s - коэффициент объемной самодиффузии, β - геометрический множитель, Ω - объем атома «матрицы».

Таким образом, скорость аномального роста зерен $\dot{d}$ можно записать в виде:

$$\dot{d} \approx V_m = M_{eff} (P_{\gamma} - P_Z), \quad (4)$$

где $P_{\gamma} = \gamma_b/d_0 \Delta d/d_0(1 + \Delta d)$ - движущая сила миграции, обусловленная поверхностным натяжением границ, γ_b - удельная поверхностная энергия границы, $\Delta d = d - d_0$, d - размер аномально растущего зерна; $P_Z = 3\gamma_b f_v/2R_p$ - сила торможения Зинера, действующая на

мигрирующую границу со стороны частиц второй фазы, f_v и R_p - объемная доля и радиус частиц второй фазы, соответственно.

В процессе отжига плотность дислокаций в мигрирующей границе меняется со временем. Соответствующее кинетическое уравнение баланса для нее имеет вид:

$$\dot{\rho}_b = \varphi_1 \frac{V_m \cdot d \cdot \rho_{b0}}{d_0^2} - \frac{\rho_b}{t_R}, \quad (5)$$

Здесь: φ_1 - геометрический множитель, $t_R = 1/C(kT/G\Omega)(b/\delta)(d^2/D_b\rho_b\Delta b_t)$ - характерное время переползания дислокаций до их аннигиляции с дислокациями другого знака (C - численный коэффициент, G - модуль сдвига) [22], ρ_{b0} - плотность дислокаций в границах зерен «матрицы». Первое слагаемое соответствует увеличению плотности дислокаций за счет «заметания» мигрирующей границей соседних зёрен, а второе – ее уменьшению за счет процессов возврата. Отметим, что величина ρ_{b0} также не остается неизменной в процессе отжига. В дальнейшем для описания кинетики уменьшения ρ_{b0} используем уравнение:

$$\dot{\rho}_{b0} = - \frac{\rho_{b0}}{t_{R0}}, \quad (6)$$

где $t_{R0} = t_R(d = d_0, D_b = D_b^*)$.

Приведённая система уравнений позволяет адекватно описать процессы, происходящие при миграции границ и росте зёрен при отжиге СМК материалов. В рамках данной модели аномальный рост будут испытывать те зерна, на границах которых действует максимальная движущая сила (изначально наиболее крупные зерна) и которые вследствие этого имеют наибольшую стартовую скорость роста. Высокая начальная скорость миграции этих границ приводит к тому, что скорость увеличения неравновесного свободного объема этих границ выше, чем скорость его уменьшения за счет эмиссии вакансий в объем зерен. В силу этого границы таких зерен продолжительное время имеют более высокую подвижность, чем границы зерен окружающей аномально растущее зерно матрицы. Тем не менее, в процессе отжига происходит накопление в мигрирующих границах дислокаций, заметаемых из окружающего объема при росте зерна. Постепенно этот процесс уменьшает подвижность и скорость мигрирующих границ, при этом их неравновесный объем начинает уменьшаться, скорость границ падает, и, наконец, миграция границ останавливается. В результате возникает бимодальная структура из относительно крупных зерен на фоне мелкозернистой матрицы.

Для проведения численных расчетов кинетики аномального роста зерен систему уравнений (1)-(6) следует дополнить уравнениями диффузии, позволяющими рассчитать входящие в (1) концентрации неравновесных вакансий ΔC_i ($i=1,2$) аномально растущего зерна. Анализ результаты численного решения полной системы уравнений будет проведен во второй части данной работы.

Выводы.

1. Предложена модель аномального роста зерен в процессе отжига субмикроструктурных материалов, полученных методами интенсивной пластической деформации. Модель основана на представлениях о том, что быстро мигрирующие границы переходят в сильно неравновесное состояние, характеризующееся аномально высокими значениями зернограницной диффузии и миграционной подвижности.
2. Получена система уравнений, позволяющая проанализировать влияние параметров структуры (исходные разброс зерен по размерам и плотность дислокаций в границах

зёрен, объемная доля частиц второй фазы) и режима отжига на кинетику изменения размера аномально растущих зерен.

Список литературы

1. Valiev R.Z. Nanomaterial advantage // Nature. – 2002. - Vol. 419. - P.887-888.
2. Lian J., Valiev R.Z., Baudelet B. On the enhanced grain growth in ultrafine grain metals// Acta Met. Mater. – 1995. - V. 43. - P. 4165-4170.
3. Islamgaliev R.K., Amirkhanov N.M., Kurzydowski K.J., Bucki, J.J. Grain Growth in Ultrafine-Grained Copper Processed by Severe Plastic Deformation // In: Investigations and Applications of Severe Plastic Deformation. Eds. Lowe T.C. and Valiev R.Z. - Springer Netherlands, 2000. - P. 297-302.
4. Красильников Н.А., Амирханов Н.М., Исламгалиев Р.К., Валиев Р.З. Влияние степени интенсивной деформации и нагрева на эволюцию структуры композита на основе меди // Изв. Вузов. Физика. - 2002. - № 5. - С.15-22.
5. Krasil'nikov N. A. et al. Tensile strength and ductility of ultra-fine-grained nickel processed by severe plastic deformation // Mater. Sci. Eng. A 397 (2005) - P. 330–337.
6. Zha M. et al. Achieve high ductility and strength in an Al–Mg alloy by severe plastic deformation combined with inter-pass annealing // Mater. Sci. & Eng. A 598 (2014) - P. 141–146.
7. Sabirov I.N., Yunusova N.F., Islamgaliev R.K., Valiev R.Z. High-strength state of a nanostructured aluminum alloy produced by severe plastic deformation // The Physics of Metals and Metallography. - 2002. - Vol. 93, No. 1. - P. 94-99.
8. Mughrabi H. et al. Annealing treatments to enhance thermal and mechanical stability of ultrafine-grained metals // Z. Metallkd. 94 (2003). - 1079-1083.
9. Li Y.S., Zhang Y., Tao N.R., Lu K. Effect of thermal annealing on mechanical properties of a nanostructured copper prepared by means of dynamic plastic deformation // Scripta Mater. 59 (2008). - 475.
10. Zhu L. et al. A statistical model for predicting the mechanical properties of nanostructured metals with bimodal grain size distribution // Acta Mater. 60 (2012). - 5762–5772.
11. Sabirov I. et al. A theoretical study of the structure–property relations in ultra-fine metallic materials with fractal microstructures // Mater. Sci. Eng. A 559 (2013). - 543–548.
12. Jiang Q.-W., Li X.-W. Effect of pre-annealing treatment on the compressive deformation and damage behavior of ultrafine-grained copper // Mater. Sci. Eng. A 546 (2012). - 59–67.
13. Humphreys F. J. A unified theory of recovery, recrystallization and grain growth, based on the stability and growth of cellular microstructures - I. The basic model // Acta Mater. - 1997. - Vol. 45, No. 10. - P. 4231-4240.
14. Humphreys F. J. A unified theory of recovery, recrystallization and grain growth, based on the stability and growth of cellular microstructures - I. The effect of second-phase particles // Acta mater. - 1997. - Vol. 45, No. 10. - P. 5031-5039.
15. Perevezentsev V.N. A unified approach to the description of diffusion in equilibrium and nonequilibrium grain boundaries // The Physics of Metals and Metallography. - 2002. - Vol. 93, Is. 3. - P. 207-210.
16. Perevezentsev V.N., Pupynin A.S., Svirina Yu.V. Analysis of intragranular deformation influence on the grain boundary diffusive properties // Mater. Sci. Eng. A. - 2005. - Vol. 410-411. - P.273-276.
17. Perevezentsev V.N., Pupynin A.S. The theory of anomalous grain growth in submicrocrystalline materials produced by severe plastic deformation // The Physics of Metals and Metallography. - 2006. - Vol. 102, Is. 1. - P. 29-33.

18. *Перевезенцев В.Н., Пупынин А.С.* Анализ закономерностей аномального роста зерен в субмикрокристаллических металлах и сплавах, содержащих дисперсные частицы второй фазы // Вопросы материаловедения. - 2006. - № 4(48). - С.5-12.
19. *Valiev, R.Z., Islamgaliev, R.K., Alexandrov, I.V.* Bulk nanostructured materials from severe plastic deformation / Progr. in Mater. Sci. – 2000. - Vol. 45(2). - P. 103-189.
20. Gleiter H. On the structure of grain boundaries in metals / Mater. Sci. Eng. – 1982. - Vol. 52. - P. 91–131.
21. *Perevezentsev V.N., Rybin V.V., Chuvil'deev V.N.* The theory of structural superplasticity – III. Boundary migration and grain growth // Acta Metall. Mater. – 1992. - Vol. 40, No. 5. - P. 907-914.
22. *Perevezentsev V.N., Rybin V.V., Chuvil'deev V.N.* The theory of structural superplasticity – I. The physical nature of the superplasticity phenomenon // Acta Metall. Mater. – 1992. - Vol. 40, No. 5. - P. 887-894.

Дата поступления: 23 марта 2018 г.

УДК 530

КОЛОННООБРАЗНЫЙ ВИХРЬ МИКРОПОЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ

© Игорь Николаевич Солдатов, Наталья Владимировна Ключева

*Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального исследовательского центра «Институт прикладной физики Российской академии наук»,
Нижний Новгород, Россия
erfv@newmail.ru*

Аннотация. Рассмотрены волновые движения в закрученной струе вязкой микрополярной жидкости, окруженной потенциальным течением идеальной жидкости. Найден набор точных решений, суперпозиция которых описывает нормальную волну с произвольным азимутальным волновым числом.

Ключевые слова: микрополярная жидкость, вязкость, закрученная струя.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН на проведение фундаментальных научных исследований на 2013-2020 г.г. по теме № 0035-2014-0402, № госрегистрации 01201458047.

A MICROPOLAR FLUID COLUMNAR VORTEX

© I.N. Soldatov, N.V. Klyueva

*Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences,
Nizhny Novgorod, Russia
erfv@newmail.ru*

Abstract. Wave motions in a twisted jet of a viscous micropolar fluid surrounded by a potential flow of an ideal fluid are considered. A set of exact solutions is found whose superposition describes a normal wave with an arbitrary azimuthal wave number.

Keywords: micro-polar fluid, viscosity, swirling jet.

Acknowledgements. The work was carried out within the Russian state task of the Institute of Applied Physics for conducting fundamental scientific research for 2013-2020 on the topic No. 0035-2014-0402, state registration number 01201458047.

Введение. Хорошо известно, что жидкости с полимерными и нанопорошковыми добавками, жидкие кристаллы, физиологические жидкости, например, кровь могут демонстрировать поведение, плохо описываемое классической моделью ньютоновской жидкости. Возможно, возникающие неадекватности описания возникают из-за того, что не учитывается внутренняя микроструктура и микровращения частиц, эту микроструктуру образующих. С целью учета тонких эффектов, связанных с микроструктурой, созданы микроконтинуальные модели [1], одной из которых является модель микрополярной жидкости [1-7].

В работе рассмотрены волновые движения в закрученной струе микрополярной жидкости, окруженной потенциальным течением идеальной жидкости. Иначе говоря, инерционные волны в вихре Рэнкина – колоннообразном вихре с линейным распределением азимутальной скорости в ядре (ядро вихря в невозмущенном состоянии вращается как квазитвердое целое с угловой скоростью Ω) и безвихревым течением вне ядра (левая часть рис. 1). Будем

предполагать, что аксиальная скорость является постоянной в ядре и равна нулю вне ядра, т. е. имеет прямоугольное распределение (рис. 1).

Рис. 1

Исследование вихря Рэнкина (без учета вязкости ядра и осевого течения) проводилось ещё лордом Кельвином (1880г.) [8]. Кельвина интересовали вопросы устойчивости колоннообразных, кольцевых и точечных вихрей, возникшие в связи с предложенной им теорией вихревых атомов (1867г.) [9]. В этой теории мир понимается как некий эфир (аналог идеальной жидкости), в которой взаимодействуют вихри Гельмгольца, подобные атомам, образующим молекулы. Устойчивость вихревых атомов вызывала сильные сомнения. Интерес к вопросам устойчивости вихрей привел Кельвина к рассмотрению инфинитезимальных возмущений цилиндрической поверхности колоннообразного вихря, что, тем самым, положило начало исследованиям волн во вращающейся жидкости. Модель Рэнкина для вращающийся жидкости продолжает оставаться интересным

объектом исследований, что объясняется её простотой и широким кругом приложений, в том числе, технических. Лорд Кельвин в упоминавшейся работе 1880г. показал, что колоннообразный вихрь (вихрь Рэнкина) без осевого течения в идеальной жидкости с квазитвердотельно вращающимся ядром и потенциальным течением вне ядра нейтрально устойчив к инфинитезимальным возмущениям цилиндрической поверхности ядра вихря. Неустойчивость возникает, когда есть достаточно быстрое осевое течение в ядре. Это стало понятно после работ Chandrasekhar S. (1961) и Krishnamoorthy V. (1966). Позднее Moore D.W. и Saffman P.G. (1972) [4], Uberoi с соавт. (1972) [5], Lessen с соавт. (1973) [6]; Drazin, Reid, [7] Saffman P.G., Loiscleux et al (1998) [8] были выполнены более детальные исследования волновых движений и неустойчивости вихря. Влияние вязкости жидкости во внутренней области вихря на устойчивость, за исключением очень частных случаев, ранее не рассматривалось. В отличие от ранее проводившихся исследований, в данной работе учитывается не только ньютоновская вязкость, но и микрополярные свойства жидкости ядра. Плотность жидкости ядра и жидкости во внешней области, вообще говоря, различны.

Во многих случаях для струй можно не учитывать вязкость внешней среды при низкой плотности последней, но приходится учитывать вязкость и микроструктурные свойства жидкости самой струи, поскольку они оказывают сильное влияние на динамику струи и изменяют условия устойчивости. Когда учитывается вязкость жидкости, как правило, это очень сильно усложняет дело и часто вынуждает ограничиваться поиском приближенных решений, вводя пограничные слои и т.д. Ниже для закрученной вязкой микрополярной струи будет найден набор точных решений, суперпозиция которых описывает нормальную волну.

Уравнения движения и граничные условия. В невозмущенном состоянии микрополярная жидкость образует твердотельно вращающийся с угловой скоростью $\Omega = const$ круговой цилиндр радиуса a . Жидкость внутри цилиндрической поверхности равномерно движется со скоростью $W = const$ в направлении оси вращения. Для более компактного представления решения в случае, когда учитывается вязкость жидкости, удобнее использовать неинерциальную (равномерно вращающуюся) систему отсчёта, связанную с квазитвердотельно вращающимся (в невозмущенном состоянии) ядром вихря. Мы будем использовать вращающуюся цилиндрическую систему координат (r, φ, z) с осью z ,

направленной вдоль оси вращения. В этой равномерно вращающейся с угловой скоростью Ω системе координат в правой части уравнений движения микрополярной жидкости появляются члены, связанные с действием кориолисовой и центробежной сил

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + (\nu + \nu_r) \nabla^2 \mathbf{v} + 2\nu_r \nabla \times \boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \nabla [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]^2, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$J \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = 4(\beta + \mathcal{G} + \gamma) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} + 2\nu_r (\nabla \times \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) - 4\gamma \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{v} = (u, v, w)^T$ обозначает вектор скорости, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_r, \omega_\phi, \omega_z)^T$ – вектор микровращений, ν – коэффициент кинематической ньютоновской сдвиговой вязкости $\beta, \mathcal{G}, \gamma$ – коэффициенты кинематической вращательной вязкости, ν_r – коэффициент вихревой вязкости, характеризующий меру «сцепления» частицы со своим окружением, J – коэффициент микроинерции (говоря иначе, квадрат характерной длины микроструктуры), ρ – плотность, p – давление. Влиянием кориолисовой и центробежной сил на поле микровращений пренебрегаем.

Плотность микрополярной жидкости ядра ρ отлична от плотности идеальной жидкости ρ_l внешнего течения $r > a$. Кроме того, жидкости предполагаются неэмульгирующими и несмешивающимися между собой.

Течение жидкости во внешней области $r > a$ описывается уравнениями Эйлера и несжимаемости

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_l} \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

Для удобства различения течений мы часто будем снабжать не только плотность, но и другие величины, относящиеся к внешнему течению индексом l .

На границе раздела жидкостей $S(t, r, \phi, z) = r - a - h(t, \phi, z) = 0$ должны выполняться динамические условия:

$$\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_l] = -\gamma \mathbf{n} (\nabla_S \cdot \mathbf{n}) + \nabla_S \eta \quad (4)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (5)$$

где $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \rho\nu[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T] + \rho\nu_r[\nabla\mathbf{v} - \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\omega}]$ – тензор напряжений, $\mathbf{I}$ – единичная матрица, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – символ Риччи (тензор третьего порядка), η – поверхностное натяжение, $\nabla_S = \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)$ – поверхностный градиент, $-\eta(\nabla_S \cdot \mathbf{n})$ – удвоенная кривизна поверхности, $\mathbf{n} = \nabla S / |\nabla S|$ – единичный вектор нормали (направлен в сторону жидкости с индексом l); $\nabla S = \left(1, -\frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \phi}, -\frac{\partial h}{\partial z}\right)$, $\mathbf{m} = 4\rho\mathcal{G} \cdot \boldsymbol{\omega}\mathbf{I} + 4\rho\gamma \nabla \boldsymbol{\omega} + 4\rho\beta(\nabla \boldsymbol{\omega})^T$ – тензор моментных напряжений.

Также на границе раздела должны выполняться кинематические условия: компонента скорости, нормальная к границе, должна быть непрерывной при переходе через неё

$$[\mathbf{v} - \mathbf{v}_l] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (6)$$

совпадая со скоростью перемещения поверхности раздела

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = 0 \quad (7)$$

Вместо граничных условий, налагаемых на моментные напряжения, нередко используются условия на вектор микровращений:

$$\varpi = \frac{\alpha}{2} \nabla \times \mathbf{v}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (8)$$

Чаще всего используются условия с $\alpha = 0$ – условия полной вращательной заторможенности. Ограничимся рассмотрением случая, когда влиянием поверхностного натяжения можно пренебречь. Профили скорости невозмущенного течения $\mathbf{V} = (U, V, W)^T$, представляющего равномерное квазитвердое вращение ядра с угловой скоростью Ω и наложенной на это вращение постоянной осевой скоростью W , в выбранной нами вращающейся системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} U = 0, \quad V = 0, \quad W = \text{const} \neq 0, \quad r \leq a \\ U_I = 0, \quad V_I = \Omega \frac{a^2}{r} - \Omega r, \quad W_I = 0, \quad r > a. \end{aligned}$$

Давление в невозмущенном течении зависит только от радиальной координаты следующим образом

$$\begin{aligned} P(r) = p_0 + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2, \quad r \leq a \\ P_I = p_0 + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 a^2 - \frac{1}{2} \rho_I \Omega^2 \left(\frac{a^4}{r^2} - a^2 \right), \quad r > a \end{aligned}$$

где p_0 – давление в центре ядра. В невозмущенном состоянии поле микровращений – нулевое.

Представим движение жидкости как сумму основного $\mathbf{V} = (U, V, W)^T$, P (невозмущенного) течения и малого возмущения $\mathbf{v}'$, ϖ' , p'

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}', \quad p = P + p'$$

и линеаризуем уравнения движения (1)-(3)

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + W \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho} \nabla p' + (\nu + \nu_r) \nabla^2 \mathbf{v}' + 2\nu_r \nabla \times \varpi' + 2[\mathbf{v}', \Omega], \quad \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \quad r \leq a \quad (9)$$

$$J \left(\frac{\partial \varpi'}{\partial t} + W \frac{\partial \varpi'}{\partial z} \right) = 4(\beta + \mathcal{G} + \gamma) \nabla \nabla \cdot \varpi' + 2\nu_r (\nabla \times \mathbf{v}' - 2\varpi') - 4\gamma \nabla \times \nabla \times \varpi', \quad r \leq a \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'_I}{\partial t} + \frac{V_I}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{v}'_I - 2 \frac{V_I}{r} \nu'_I \mathbf{e}_r + \left(\frac{V_I}{r} u'_I + u'_I \frac{\partial V_I}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi = -\frac{1}{\rho_I} \nabla p'_I + 2[\mathbf{v}'_I, \Omega], \quad \nabla \cdot \mathbf{v}'_I = 0, \quad r > a \quad (11)$$

Ниже штрихи опускаем. Линеаризуем также граничные условия и перенесем их с возмущенной поверхности $r = a + h(\varphi, z, t)$ на свободную поверхность жидкости при стационарном вращении (имеющую своим уравнением $r = a$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} - u + W \frac{\partial h}{\partial z} &= 0, \quad -u + u_I + W \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \\
-p - \rho \Omega^2 a h + 2\rho v \frac{\partial u}{\partial r} &= -p_I - \rho_I \Omega^2 a h, \\
(v + v_r) \left(\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{a} \right) - v_r \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v_r \varpi_z &= 0, \\
v \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + v_r \frac{\partial w}{\partial r} + v_r \varpi_\varphi &= 0 \\
(\vartheta + \beta + \gamma) \frac{\partial \varpi_r}{\partial r} + \vartheta \left(\frac{\varpi_r}{a} + \frac{1}{a} \frac{\partial \varpi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varpi_z}{\partial z} \right) &= 0 \\
\beta \frac{1}{a} \frac{\partial \varpi_r}{\partial \varphi} + \gamma \left(\frac{\partial \varpi_\varphi}{\partial r} - \frac{\varpi_\varphi}{a} \right) &= 0, \quad \beta \frac{\partial \varpi_r}{\partial z} + \gamma \frac{\partial \varpi_z}{\partial r} = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

Заметим, что использование условий на микромоменты на границе не является твердо обоснованным. Альтернативными условиями являются условия на микровращения:

$$\begin{aligned}
\varpi_r &= \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
\varpi_\varphi &= -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varpi_z = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right)
\end{aligned} \tag{13}$$

Граничные условия должны быть дополнены условиями на бесконечности:

$$v_I \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty,$$

условиями излучения при $z \rightarrow \infty$ и ограниченности решения при $r = 0$. Ниже нас будут интересовать решения в форме бегущей волны $\sim e^{-i\omega t + ikz + im\varphi}$.

Точные решения. Во внешней области $r > a$ решение, описывающее возмущенное течение (11) легко находится. Действительно, система (11), как нетрудно показать, может быть сведена к одному уравнению для азимутальной скорости

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} v_I + 3r \frac{\partial}{\partial r} v_I - (m^2 - 1 + k^2 r^2) v_I = 0,$$

которое допускает следующее решение

$$v_I = \frac{im}{r} [C_6 K_m(|k|r) + C_* I_m(|k|r)] e^{i(kz + m\varphi - \omega t)} \tag{14}$$

где K_m, I_m – модифицированные функции Бесселя второго и первого рода, k – аксиальное, а m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) – азимутальное волновые числа, ω – циклическая частота, C_6, C_* – константы. Из условия на бесконечности следует, что коэффициент при втором слагаемом в квадратных скобках равен нулю $C_* = 0$. Выражения для остальных компонент поля скоростей и давления во внешней области $r > a$ также легко находятся

$$\begin{aligned}
u_I &= -\tilde{N}_6 \left(|k| K_{m-1}(|k|r) + \frac{m}{r} K_m(|k|r) \right) e^{i(kz+m\varphi-\omega t)} \\
w_I &= ikC_6 K_m(|k|r) e^{i(kz+m\varphi-\omega t)} \\
p_I &= -i\rho_I \left[\omega + m \left(\frac{\Omega a^2}{r^2} - \Omega \right) \right] \tilde{N}_6 K_m(|k|r) e^{i(kz+m\varphi-\omega t)}
\end{aligned} \quad (15)$$

Обратимся к течению в ядре вихря. Представим поле микровращений в виде суперпозиции потенциальной ϖ^p и вихревой частей ϖ^v

$$\varpi = \varpi^p + \varpi^v, \quad \nabla \times \varpi^p = 0, \quad \nabla \cdot \varpi^v = 0. \quad (16)$$

В линеаризованные уравнения для поля скоростей и давления потенциальная часть ϖ^p не входит, что позволяет разделить задачу на две части, связанные только граничными условиями. Для ϖ^p из (10) следует уравнение

$$J \left(\frac{\partial \varpi^p}{\partial t} + W \frac{\partial \varpi^p}{\partial z} \right) = 4(\beta + \vartheta + \gamma) \nabla \nabla \cdot \varpi^p - 4\nu_r \varpi^p$$

откуда находим решение, ограниченное при $r = 0$:

$$\begin{aligned}
\varpi_\varphi^p &= C_7 (\lambda_\gamma I_{m-1}(\lambda_\gamma r) - m I_m(\lambda_\gamma r) / r) e^{i(kz+m\varphi-\omega t)} \quad (\varpi_\varphi^p = C_7 \lambda_\gamma I_1(\lambda_\gamma r) e^{i(kz+m\varphi-\omega t)}, \text{ если } m=0) \\
\varpi_\varphi^p &= C_7 \frac{im}{r} I_m(\lambda_\gamma r) e^{i(kz+m\varphi-\omega t)}, \quad \varpi_\varphi^p = C_7 ik I_m(\lambda_\gamma r) e^{i(kz+m\varphi-\omega t)}
\end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{где } \lambda_\gamma^2 = k^2 + \frac{\nu_r}{\beta + \vartheta + \gamma} - i \frac{J(\omega - Wk)}{4(\beta + \vartheta + \gamma)}, \quad \text{Im } \lambda_\gamma \geq 0.$$

Получить решение, описывающее вихревую часть течения в ядре, можно способом, указанным в [19]. Способ основан на теореме, утверждающей, что в цилиндрической системе координат достаточно найти решение векторного уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{v} + \kappa^2 \mathbf{v} = 0 \quad (18)$$

и это будет решением линеаризованных уравнений (9),(10), описывающих движение микрополярной вращающейся жидкости, если

$$\begin{aligned}
4(\nu + \nu_r) \gamma \kappa^5 - [4(i\omega - ikW) \gamma + (\nu + \nu_r)(iJ\omega - ikJW - 2\nu_r) + 2\nu_r^2] \kappa^3 - 8ik\Omega \gamma \kappa^2 + \\
+ (i\omega - ikW)(iJ\omega - ikJW - 2\nu_r) \kappa + 2ik\Omega(iJ\omega - ikJW - 2\nu_r) = 0
\end{aligned} \quad (19)$$

где параметр κ называется параметром завихренности. Поскольку, как следует из (19), в общем случае существуют пять различных параметров κ_j ($j = 1, \dots, 5$), то, соответственно, существуют пять различных векторных полей. Суперпозиция этих полей формирует нормальную волну – моду, что, в математической форме, будет записано чуть ниже.

Уравнение (18) в цилиндрической системе координат имеет наиболее простой вид в проекции на ось z

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa_j^2 \right) w = 0 \quad (20)$$

Откуда следует, что для решения вида $w = \hat{w}(r) e^{i(-\omega t + kz + m\varphi)}$ амплитуда $\hat{w}(r)$ осевой компоненты вектора скорости должна удовлетворять уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{w}}{dr} + \left(-\frac{m^2}{r^2} + \lambda_j^2 \right) \hat{w} = 0 \quad (21)$$

где $\lambda_j^2 = \kappa_j^2 - k^2$, $\text{Im } \lambda_j \geq 0$.

Решение уравнения Бесселя (21) может быть выражено через функции Ганкеля, точнее, учитывая условие ограниченности решения при $r = 0$ и $\text{Im } \lambda_j \geq 0$, через вторую функцию Ганкеля m -ого порядка

$$\hat{w}_{m,j}(r) = C_j H_m^{(2)}(\lambda_j r) \quad (22)$$

где нижние индексы m и j у амплитуды введены для явного указания азимутального волнового числа и корня уравнения (19), C_j – произвольная постоянная. Заметим, что радиальная $u_{m,j}$ и азимутальная v компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$ связаны с аксиальной скоростью w следующим образом

$$u_{m,j} = \frac{im\kappa_j}{\lambda_j^2 r} w_{m,j} + \frac{ik}{\lambda_j^2} \frac{\partial w_{m,j}}{\partial r}, \quad v_{m,j} = -\frac{mk}{\lambda_j^2 r} w_{m,j} - \frac{\kappa_j}{\lambda_j^2} \frac{\partial w_{m,j}}{\partial r} \quad (23)$$

Моды с произвольным азимутальным волновым числом. Поле скоростей нормальной моды с азимутальным волновым числом m , формируют пять слагаемых, что, используя (23) с заменой производных, можно записать в виде

$$w_m = \sum_{j=1}^5 (\hat{w}_{m,j}) e^{i\omega t + ikz + im\varphi}, \quad u_m = \sum_{j=1}^5 \left(\frac{im(\kappa_j - k)}{\lambda_j^2 r} \hat{w}_{m,j} + \frac{ik}{\lambda_j} \hat{w}_{m-1,j} \right) e^{i\omega t + ikz + im\varphi},$$

$$v_m = \sum_{j=1}^5 \left(\frac{m(\kappa_j - k)}{\lambda_j^2 r} \hat{w}_{m,j} - \frac{\kappa_j}{\lambda_j} \hat{w}_{m-1,j} \right) e^{i\omega t + ikz + im\varphi}, \quad (24)$$

По полю скоростей (24) находятся выражения для вихревой части микровращений и давления в рассматриваемой моде

$$\omega^v = \sum_{j=1}^5 \frac{V_r \kappa_j}{-iJ(\omega - kW) + 4\gamma \kappa_j^2 + 2V_r} \hat{\mathbf{v}}_{m,j} e^{i\omega t + ikz + im\varphi}, \quad (25)$$

$$p_m = -2\rho\Omega \sum_{j=1}^5 (\kappa_j^{-1} \hat{w}_{m,j}) e^{i\omega t + ikz + im\varphi} \quad (26)$$

Подставим выражения (13), (14), (24), (26) для вектора скорости, давления и (17), (25) для микровращений в граничные условия (12). (Заметим, что с помощью первого уравнения системы (12), можно выразить h через радиальную скорость u

$$h = -i \frac{u}{\omega + kW},$$

а затем, используя это выражение, исключить h из второго и третьего уравнений и, тем самым, прийти к системе из восьми уравнений. После подстановки получим однородную систему уравнений относительно $C_1, \dots, C_8$, которую запишем в матричном виде

$$\mathbf{A}\mathbf{C} = 0 \quad (27)$$

где $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, 8$; $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_8)^T$.

Удобно перейти к безразмерным переменным $r' = r/a$, $z' = z/a$, $t' = t\Omega$, $\tau = \omega/\Omega$, $k' = ka$, $\kappa' = \kappa a$, $\lambda' = \lambda a$, $p' = p/(\rho\Omega^2 a^2)$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}/(\Omega a)$, $R = W/\Omega a$ (число Кибеля-Россби),

$E = \nu / (\Omega a^2)$ (число Экмана) $\hat{\tau} = \tau + kR$, $\Pi = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{1-A}{1+A}$, $A = \frac{|\rho - \rho_1|}{\rho + \rho_1}$ (число Этвуда), $N = \nu_r / \nu$,

$\Gamma = \gamma \Omega^{-1} J^{-1} a^{-2}$. Ниже штрихи опускаются.

Наименьший по модулю параметр завихренности связан с крупномасштабным течением в ядре вихря. Следующие по величине модулей параметры связаны с обычными вязкими пограничными слоями, образующимися около границы раздела. Наибольшие по модулю параметры завихренности обязаны своим возникновением вращательной вязкости. Для малых чисел Экмана $E \ll 1$, представляющих наибольший интерес для техники, справедливы следующие приближенные простые выражения для параметра завихренности, связанного с крупномасштабным течением, и “погранслоевых” κ

$$\kappa_1 \approx \frac{2k}{\tau + kR} + i \frac{8k^3}{(\tau + kR)^4} E + O(E^2),$$

$$\kappa_j \approx (-1)^{j+1} \sqrt{\frac{|\tau + kR|}{2E}} \left(-\frac{\tau + kR}{|\tau + kR|} + i \right) - \frac{k}{\tau + kR} + O(\sqrt{E}), \quad (j = 2, 3)$$

Нетривиальные решения у системы (27) существуют только, если

$$\det \mathbf{A} = 0 \quad (28)$$

Это уравнение определяет связь между аксиальным волновым числом k и частотой τ при заданных m и других параметрах.

На рис. 2 показаны проекции несколько первых ветвей дисперсионной кривой при $m = 1$, $\Pi = 1.0$, $R = 0$, $E = 10^{-6}$ на вещественную плоскость $\tau, \text{Re}(k)$.

Рис. 2

Закключение. Показано, что предложенный в работе [19] способ построения решений может использоваться для расчета струйных течений завихренной микрополярной жидкости. В отличие от приближенных процедур, связанных с использованием пограничных слоев, нет необходимости вводить в определенной мере искусственные параметры толщины погранслоев и сращивать разложения разного масштаба. Это особенно актуально для микрополярной жидкости, поскольку априори трудно дать оценку толщины пограничных слоев, связанных с волновым движением.

Список литературы

- [1] Stokes V. K. Theories of Fluids with Microstructure: An Introduction. - Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1984.
- [2] Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Кувшинский Е.В. Асимметрическая гидромеханика // ПММ. - 1965. - Т. 29, вып. 2. - С. 297–308.
- [3] Eringen A.C. Theory of micropolar fluid // J. Math. and Mech. 16 (1966), 118.
- [4] Петросян Л.Г. Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений. - Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984.
- [5] Allen S.J., Kline K.A. The effect of concentration in fluid suspension // Trans. Soc. Rheol., 12, N. 3 (1968). - 457-468.
- [6] Бессонов Н.М. О корректной постановке граничных условий в гидродинамике моментной жидкости.- СПб: препринт ИПМ РАН, 1993. - N 89. - 26с.
- [7] Lukaszewicz G. Micropolar Fluids: Theory and Applications. - New York: Springer Science+Business Media, LLC, 1999.
- [8] Kelvin, Lord Vibrations of a columnar vortex. //Phil. Mag. 10 (1880). - P. 155-168.
- [9] Kelvin, Lord On Vortex Atoms // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, VI, (1867). - P. 94-105. Reprinted in Phil. Mag. Vol. XXXIV, 1867. - P. 15-24.
- [10] Lamb H. Hydrodynamics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1932.
- [11] Chandrasekhar S Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. – Oxford: Clarendon Press, 1961.
- [12] Moore D.W., Saffman P.G. // Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A. – 1972. - A272. - P. 403-429.
- [13] Lessen M., Deshpande N.V., Hadji-Ohanes B. Stability of a potential vortex with a non-rotating and rigid-body rotating top-hat jet core. // J. Fluid Mech. - 1973. - Vol. 60. - P. 459–466.
- [14] Maxworthy T., Hopfinger E. J., Redekopp L. G. Wave motions on vortex cores //J. Fluid Mech. - 151 (1985). - P. 141-165.
- [15] Leibovich S., Brown S. N., Patel Y. Bending waves on inviscid columnar vortices //J. Fluid Mech. - 173 (1986). - P.595-624.
- [16] Wu C., Farokhi S., Taghavi R. Spatial instability of a swirling jet – theory and experiment. //AIAA J. - 30 (1992). - P. 1545–1552.
- [17] Marshall J.S., Krishnamoorthy S., On the instantaneous cutting of a columnar vortex with non-zero axial flow //J. Fluid Mech. - 351 (1997). - P. 41-74.
- [18] Loiseleux T., Chomaz J.M., Huerre P. The effect of swirl on jets and wakes: linear instability of the Rankine vortex with axial flow. //Phys. Fluids. - 10 (1998). - P. 1120–1134
- [19] Солдатов И.Н. Гироскопические волны во вращающемся слое жидкости //ПМТФ. - 49. - № 2. (2008). - 15-20.

Дата поступления: 23 марта 2018 г.