УДК 621.01:534.1

КОЛЕБАНИЯ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОРГАНОВ ПОВЫШЕННОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ

© Иосиф Исаакович Вульфсон

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна" (СПГУПТД), Санкт-Петербург, Россия
jvulf@yandex.ru

Аннотация. В статье исследуются колебания рабочих органов, которые используются в машинах с повышенной протяженностью зон технологической обработки выпускаемой продукции. Предложен ряд новых динамических моделей, анализ которых базируется на замене дискретно заданных параметров псевдосредой, отражающей упругие, инерционные, диссипативные и кинематические характеристики колебательной системы. Полученные результаты анализа могут быть использованы при решении оптимизационных задач динамического синтеза, а также для исследования моделей при совместном учете механических и электромагнитных характеристик двигателей.

Ключевые слова: колебания, машины, механизмы, континуальные модели, псевдосреда.

VIBRATIONS OF THE OPERATING MEMBERS WITH INCREASED DIMENSION

© Iosif. I. Vulfson

Saint Petersburg State University of Industrial Technologies and Design, Saint-Petersburg, Russia
jvulf@yandex.ru

Abstract. The article studies the vibrations of the operating members, which are used in machines with an increased length of the products processing zones. A number of new dynamic models are proposed the analysis of which is based on the replacement of discretely specified parameters with a pseudo medium reflecting the elastic, inertial, dissipative, and kinematic characteristics of the oscillatory system. The results of the analysis can be used in solving problems of optimal dynamical synthesis, as well as for the study of models, while taking into account the mechanical and electromagnetic characteristics of the engines.

Key words: vibrations, machines, mechanisms, models with distributed parameters, pseudo medium.

Вводные замечания. Решение современных задач динамики машин нередко связано с анализом, так называемых, регулярных колебательных систем. Под термином «регулярность» будем понимать совпадение динамической структуры и параметров отдельных подсистем (модулей). Теория регулярных колебательных систем нашла отражение в работах многих выдающихся учёных. Впервые одномерную решётку, состоящую из точечных частиц, исследовал Ньютон при определении скорости звука. Дальнейшие исследования связаны с работами Даниила и Иоганна Бернулли, Коши, Кельвина, Борна, Кармана, Дебая, Бриллюэна и др.[1–4]. Эти работы легли в основу так

называемой теории цепочек, с помощью которой удаётся осуществить аналитическое описание систем с большим числом степеней свободы, базируясь на анализе одного структурного элемента системы. Объектами для использования аппарата теории цепочек были кристаллические решётки и ряд других задач теоретической физики.

Среди технических задач анализа этого класса систем можно привести теорию электрических линий, а также некоторые задачи, возникающие при расчётах деформаций и колебаний в рамах, фермах и т.п. В машинах циклового действия и автоматических линиях приходится сталкиваться с регулярными колебательными системами в связи с широким распространением динамически идентичных модулей, используемых при повышенной длине зоны технологического процесса, а также для реализации однотипных технологических и транспортных операций. В подобных случаях в виду естественного стремления к унификации и взаимозаменяемости отдельных деталей и целых узлов машины возникает определенная повторяемость блоков динамической модели привода. Такая ситуация, в частности, встречается в машинах текстильной, легкой, пищевой, полиграфической и в ряде других отраслей промышленности [5, 6].

На рис.1,а показан фрагмент кинематической схемы, которая состоит из двигателя M , передаточного механизма (редуктора – 1), и приводов исполнительных органов кольцевой ($j = 1; 2$) и цепной (3) структуры.

Рис.1. Кинематическая схема и модификации динамических моделей привода регулярной структуры: а) 1–редуктор; 2– главный вал; 3 – механизм цепной структуры; j – механизмы кольцевой структуры

На рис.1,б приведены несколько модификаций типовых динамических моделей для машинного агрегата со сдвоенным двухсторонним приводом, которые состоят из подсистем двигателей M и подсистемы рабочей машины, главный вал который связан с двигателями посредством приводов с передаточным числом u . Примем следующие условные обозначения: J_0, J_1, J_2 – моменты инерции; $\Pi(\varphi)$ – оператор, соответствующий нелинейной функции положения (см. ниже); c, ψ – приведенные коэффициенты жесткости и рассеяния привода; u – оператор передаточного отношения редуктора. Для идеального механизма, в котором отсутствуют зазоры и все звенья принимаются абсолютно жёсткими, $\varphi = \varphi_* = \bar{\omega}t$, где $\bar{\omega}$ – средняя угловая скорость входного звена. Пусть $\varphi = \varphi_* + \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ – динамическая ошибка, возникающая при колебаниях. Принимая во внимание, что функция положения непрерывна и дифференцируема, произведём линеаризацию этой функции в окрестности программного движения: $\Pi(\varphi_* + q) \approx \Pi(\varphi_*) + \Pi'(\varphi_*)q$, где $\Pi' = d\Pi/d\varphi$ – первая геометрическая передаточная функция механизма (подробнее см. [5, 6]). Отметим, что динамическая модель 1 может быть трансформирована к виду модели 2. При этом

$$J^* = J_1 + J_2 \Pi'^2, \quad c^* = c_1 + c_2 \Pi'^2, \quad c^* = \tilde{c}_1 (1 + \zeta \Pi'^2), \quad J_1^* = J_2^* = J_1 (1 + \mu \Pi'^2), \quad (1)$$

где $\zeta = c_2 / c_1$; $\mu = J_2 / J_1$; $\tilde{c}_1(\delta_1^*) = c_1(1 + 2i\delta_1^*)$; $\delta_1^* = \psi_1^* / (4\pi)$; $i = \sqrt{-1}$;

$\psi^* = \psi_1^* = (\psi_1 c_1 + \psi_2 c_2) / (c_1 + c_2)$, $J_2^* = J_2 = \mu J_1$, $c^* = \tilde{c}_1(\delta_2^*) / (\Pi'^2 + \zeta^{-1})$; $\delta_2^* = \psi_2^* / (4\pi)$;

$\psi^* = \psi_2^* = |c^*|(\psi_1 / c_1 + \psi_2 / c_2)$; $\tilde{c}_1(\delta_2^*)$ – комплексная форма упругодиссипативного элемента.

Вопрос об эффективности применения привода с двумя двигателями (модели 1, 2) требует всестороннего анализа с учетом конструктивных особенностей машины. Заметим, что в ряде трикотажных машин, число приводов, ведущие звенья которых располагаются на общем распределительном валу, достигает четырех. На рис.2 приведена осциллограмма колебаний трех рабочих органов основовязальной машины при одном двигателе. При этом нумерация кривых (1, 2, 3) соответствует степени удаленности первого механизма при отсчете от двигателя; линии 4 отвечают отметкам времени при $\Delta t = 0,02$ с. На осциллограмме четко проявляется зависимость уровня колебаний от расположения кинематической цепи относительно двигателя.

Рис.2. Осциллограмма колебаний рабочих органов

Отметим, что применение двух двигателей нередко слабо влияет на виброактивность колебательной системы, что связано с их большой «эквивалентной податливостью» [7 – 9]. Кроме того, следует иметь в виду, что при этом основному резонансу отвечает форма колебаний с узлом колебаний, расположенным в середине рабочего органа, а его концы колеблются в противофазе. Это может отрицательно проявиться на качестве продукции. Для устранения данного эффекта нередко требуются другие конструкторские решения при проектировании машины. В частности, для ужесточения системы может оказаться более эффективным использовать двухсторонний привод лишь при одном двигателе посредством установки дополнительного вала повышенной жесткости, выполняющего функцию упругой связи между крайними элементами главного вала (модель 3).

Агрегирование характеристик динамической модели. В рассматриваемых системах массив обобщенных координат и варьированных параметров обычно оказывается трудно обозримым, что оправдывает использование континуальной идеализации, с помощью которой упругие, инерционные и диссипативные свойства системы отображены интегральными характеристиками, образующими некоторую псевдосреду [5, 6]. Аналогичный приём (агрегирование) широко используется при исследованиях не только сложных объектов механики, но и при решении задач автоматического управления, экономики и др. [10 – 12].

На рис.3 представлена динамическая модель, состоящая из приводного механизма, схематизированного в виде крутильной подсистемы ($s=0$), и повторяющихся модулей ($s = \overline{1, n}$).

Рис.3. Континуальная динамическая модель

На первом этапе ограничимся анализом динамических характеристик одного модуля. Каждый модуль соответствующей секции привода образован участком главного вала, связанного с исполнительным органом n идентичными цикловыми механизмами, а с соседними подсистемами – упругими элементами с коэффициентом жесткости Δc . Согласно модификации метода континуальной идеализации представим n идентичных механизмов в виде псевдосреды. Это среда, образованная «размазыванием» упругих и инерционных характеристик вдоль осей соответствующих валов. В частности, «вертикальная» среда $\Pi - c$ обладает свойством передавать моменты и движение только вдоль слоя среды, причем взаимодействие между слоями осуществляется лишь через подсистемы главного вала и исполнительного органа. Характеристикой псевдосреды служит распределенная модифицированная матрица перехода

$$\tilde{\Gamma}_* = \prod_s^1 \tilde{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{bmatrix} \quad (i = \overline{1, s}), \quad (2)$$

где s – число элементов механизма, $\tilde{\Gamma}_i$ – матрица перехода элемента.

Так, в частности, если механизм образован соединением инерционных, упругих и кинематических элементов $J - c - \Pi$, (Π – функция положения), то

$$\tilde{\Gamma}_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p^2 J n / l & 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\Gamma}_c = \begin{bmatrix} 1 & l / (cn) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\Gamma}_\Pi = \begin{bmatrix} \Pi'(\varphi_1^*) & 0 \\ 0 & \Pi'(\varphi_1^*)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Здесь l – длина участка вала; $\Pi'(\varphi_1^*) = d\varphi_2^* / d\varphi_1^*$ – первая геометрическая передаточная функция. (Ниже при иллюстрациях примем $\Pi' = h_0 \sin \varphi_1$).

Дифференциальное уравнение колебаний исполнительного органа в координатной системе $\varphi_1 = \Pi(\varphi)$ имеет вид

$$GI \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - b \frac{\partial \eta}{\partial t} = \rho \omega^2 \frac{d^2 \Pi}{d\varphi^2} - M(x, t), \quad (4)$$

где $\eta = \varphi_2(x, t) - \Pi(\varphi)$ – динамическая ошибка в сечении x ; $\rho = J_2 / l$ – погонный момент инерции; b – эквивалентный коэффициент линейной силы сопротивления; $M(x, t)$ – интенсивность распределенного внешнего момента.

Как показывает анализ, в приведенных упругодиссипативные характеристиках передаточного механизма можно ограничиться учетом медленной составляющей, которая описывается функциями «медленного» времени $\tau = \varphi_* / \bar{\omega}$. При этом граничные условия определяются следующим образом:

$$GI \frac{\partial \eta}{\partial x}(0) = c(\tau) \eta(0) + b(\tau) \frac{\partial \eta}{\partial t}(0) + J_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}(0); \quad \frac{\partial \eta}{\partial x}(0) = 0. \quad (5)$$

Принимая во внимание пренебрежимо малое влияние сил сопротивления на собственные частоты и формы колебаний, на этом этапе примем $b \equiv 0$. Согласно методу условного осциллятора [5, 6] решение однородного дифференциального уравнения, полученного из (4) при обращении в нуль правой части, ищем в форме

$$\eta_p = X(x, \tau) \cos \Phi(t), \quad (6)$$

где τ – медленное время.

В одном из сечений (например, при $x = \ell$) функции $X(\ell, \tau)$ и Φ согласно методу условного осциллятора могут быть связаны дополнительным условием

$$2 \frac{dB}{d\tau} p + B \frac{dp}{d\tau} = 0, \quad (7)$$

где $p(\tau) = d\Phi / dt$ – «собственная» частота; $B = X(\ell, \tau)$.

На основании (4) – (7) формальное частотное уравнение может быть записано в виде

$$\theta(\tau)[\theta(\tau) + \mu \operatorname{tg} \theta(\tau)] = \sigma_0^2 (1 + \chi \sin^2 \omega \tau)^{-1}, \quad (8)$$

где $\mu = \rho l / J_1$; $\sigma_0 = k_1 / k_2$; $k_1 = \sqrt{c_1 / J_1}$; $k_2 = \sqrt{GI / (J_2 l)}$; $\theta_r(\tau) = p_r(\tau) / k_2$; $\chi = h^2 \sigma_0^{-2} J_1^{-1} J_2$

Уравнение (8) имеет неограниченное множество корней $\theta_r(\tau)$ ($r = \overline{1, \infty}$), которым соответствуют «собственные» частоты $p_r(\tau) = k_2 \theta_r(\tau)$.

Если принять $B = 1$ при $\tau = 0$, то нестационарная форма колебаний определяется следующей зависимостью:

$$X_r(x, \tau) = \sqrt{\frac{\theta_r(0)}{\theta_r(\tau)}} \cos[\Phi_r(\tau)(1 - x/l)], \quad (9)$$

где r – номер частоты

Рис.4. Эволюция форм колебаний

Эволюция форм колебаний для $\chi = 1$, $\varphi = \pi/2$ при варьировании параметрами μ и σ_0 показана на рис.4. При этом сплошная линия отвечает $\mu = 0,5$, $\sigma_0 = 1$, штриховая – $\mu = 3$, $\sigma_0 = 1$, штрих пунктирная – $\mu = 1$, $\sigma_0 = 0,5$, пунктирная – $\mu = 1$, $\sigma_0 = 2$.

Используя аппарат квазинормальных координат, представим решение неоднородного дифференциального уравнения (4) как

$$\eta = \sum_{r=1}^{\infty} X_r(x, \tau) U_r(t), \quad (10)$$

где функция U_r определяется из следующего дифференциального уравнения:

$$\ddot{U}_r + 2n_r(\tau)\dot{U}_r + p_r^2(\tau)U_r = W_r(t). \quad (11)$$

В левую часть этого уравнения включен опущенный при частотном анализе диссипативный член, для определения которого можно воспользоваться следующей зависимостью, полученной при исключении диссипативных связей между различными формами колебаний:

$$\psi_r^*(\tau) = \frac{c(\tau)l\psi(\tau) + GID_r(\tau)\psi_r}{c(\tau)l + GID_r(\tau)}, \quad (12)$$

где $D_r = l^{-1} \int_0^l X_r'^2(x, \tau) dx = 0,5 \theta_r(\tau) [\theta_r(\tau) - 0,5 \sin 2\theta_r(\tau)]$; ψ, ψ_r – коэффициенты рассеяния

соответственно для обеих рассматриваемых подсистем; ψ_r^* – приведенный к форме r коэффициент рассеяния. При этом $n_r(\tau) \approx \psi_r^*(\tau) p_r(\tau) / (4\pi)$.

Правая часть дифференциального уравнения (11) может быть найдена как

$$W_r = -w_*(t) \int_0^l X_r dx / \int_0^l X_r^2 dx = -w_*(t) H_r(\tau), \quad (13)$$

$$\text{где } H_r(\tau) = \frac{2 \sin \theta_r(\tau)}{\theta_r(\tau) + 0,5 \sin 2\theta_r(\tau)}.$$

На основании метода условного осциллятора частное решение уравнения (11) при медленном изменении коэффициентов имеет вид

$$U_r = \frac{1}{\sqrt{p_r(t)}} \int_0^t \frac{W_r(z)}{\sqrt{p_r(z)}} \exp\left[-\int_z^t n_r(\xi) d\xi\right] \sin\left[\int_z^t p_r(\xi) d\xi\right] dz. \quad (14)$$

Для инженерных оценок представляет интерес функция $\ddot{\eta}_{\max}(x/\ell)$, характеризующая распределение дополнительных ускорений вдоль оси вала x . Следует отметить, что при реальных значениях параметров именно виброускорения, вызванные резкими изменениями ускорений программного движения $d^2\phi_1/dt^2$, являются источником повышенной виброактивности, лимитирующим эксплуатационные характеристики машин.

Как показывает анализ приведенных зависимостей, при изменении заданного программного ускорения от 0 до $w_{\max}$ за время Δt^*

$$\ddot{U}_{r\max} = w_{\max} \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r(v_r) H_r X_r, \quad (15)$$

где $v_r = \Delta t^* / T_r$; $T_r = 2\pi / \bar{p}_r$; $\bar{p}_r$ – усредненное значение $p_r(\tau)$ на интервале $[0, \Delta t^*]$, $w_{\max}$ – максимальное значение $|w(t)|$; κ_r – коэффициент динамичности при кинематическом возбуждении [5, 6]: $\kappa_r = z_r^2 / \sqrt{(1 - z_r^2)^2 + 4z_r^2 \delta_r^2}$, где $z_r = \omega_i / p_r$; $\delta_r \approx \psi_r / (4\pi)$; ω_i – частота возбуждения.

Поскольку при принятом нормировании форм $X_r(\ell) = 1$, из зависимости (15) следует, что

сумма $K = \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r |H_r|$ может служить критерием для оценки уровня динамической ошибки по

виброускорениям. Слагаемые этой суммы $K_r = \kappa_r |H_r|$ характеризуют распределение ускорений по различным формам колебаний.

Можно показать, что $v_r = \Delta\phi_1 k_2 \bar{\theta}_r / (2\pi\omega_0)$, где $\Delta\phi$ – угол поворота главного вала, отвечающий изменению $w(t)$ между экстремумами, $\bar{\theta}$ – среднее значение θ . При малых значениях v_r критерий K мало отличается от единицы. Следовательно, $\ddot{y}_{\max} \approx w_{\max}^*$, что отвечает так называемому мягкому удару. С ростом параметра θ , пропорционального «собственной» частоте, этот критерий резко убывает.

При формировании критерия K обычно следующим по значимости является член K_3 .

Относительно малое влияние членов, отвечающих четным формам, связано с близостью к

антисимметричной форме колебаний, для которой интегральное по длине ℓ значение элементарной работы от заданной симметричной нагрузки относительно мало.

Для анализа характера распределения виброускорений по оси x введем в рассмотрение функцию

$$Z_1 = K(v)X_1(x/l)/X_1(0), \quad (16)$$

которая отвечает низшей форме колебаний. На рис.4 приведены графики этой функции, полученные при $\chi = 1$, $\mu = 1$ для двух значений $v_1 = 0,1$ и $v_1 = 1$. При этом сплошные линии соответствуют $\sigma_0 = 4$, штриховые – $\sigma_0 = 3$, штрих пунктирные – $\sigma_0 = 2$. Как следует из графиков, с уменьшением параметра σ_0 ускорения более равномерно распределяются по длине исполнительного органа.

Рис.4. Распределение виброускорений

Для контроля уровня виброактивности определим нагрузку, передаваемую на привод $c(\tau)u(0,t) = c(\tau)\sum_{r=1}^{\infty} X_r(0,\tau)U_r(t)$. Критерием оценки каждого из слагаемых суммы, входящего в эту зависимость служит $N_r = |X_r(0,\tau)U_r|_{\max}$.

Анализ этого критерия свидетельствует, что удовлетворение условий $v_1 \geq 3 \div 4$ также представляется целесообразным и с позиций снижения виброактивности системы. Рассмотрение других законов изменения ускорений программного движения приводит к аналогичным выводам.

Анализ динамической модели с переменной интенсивностью пространственного распределения инерционных характеристик. Как уже отмечалось, использование моделей с распределенными параметрами может существенно облегчить трудоемкость расчетов. Это особенно проявляется при инженерных оценках и динамическом синтезе, когда необходим более общий подход к проблеме. Такая ситуация, в частности, возникает при решении вопроса о выявлении участков рабочего органа с повышенной интенсивностью колебаний и целесообразном распределении инерционных характеристик. Процесс проектирования машин, как известно, состоит из нескольких этапов. На начальном этапе обычно рассматривается кинестатическая модель, позволяющая сделать некоторые предварительные оценки, необходимые при реализации заданной кинематической схемы в форме проекта конструкции. В частности, для каждого модуля, представленного на рис. 3,

может быть поставлена задача определения коэффициентов жесткости механизмов, при которых распределение нагрузок будет равномерным. Принимая, что каждый механизм схематизирован в виде последовательного соединения $\Pi - c_s$ и расположен на одинаковом расстоянии от предыдущего, получаем [14]

$$c_s^{-1} = c_1^{-1} - \Pi'^2 (n - 0,5s)(s - 1) / c_0,$$

где $c_0 = GI / \Delta \ell$ – коэффициент жесткости одного пролета вала.

При решении задачи при переменном распределении нагрузок с учетом возбуждаемых колебаний могут быть использованы различные методы [15]. Ниже мы воспользуемся методом условного осциллятора [16, 5, 6]. Дифференциальное уравнение для свободных колебаний без учета диссипации может быть записано как

$$G \frac{\partial}{\partial x} [I(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x}] = \rho(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (17)$$

где $\varphi(x, t)$ – угловая координата сечения x ; G – модуль сдвига; $I(x)$ – полярный момент инерции; $\rho(x) = \partial J / \partial x$ – интенсивность изменения момента инерции масс по оси вала.

В отличие от изложенного выше случая теперь $\rho(x) \neq \text{const}$. Далее, следуя методу Фурье, решение ищем в форме

$$\varphi(x, t) = X(x, \tau)T(t). \quad (18)$$

Здесь τ – «медленное время».

После подстановки (18) в (17) и известных преобразований получаем

$$\begin{aligned} X'' + 2P(x, \tau)X' + K^2 X(x, \tau) &= 0; \\ \ddot{T} + p^2(\tau)T &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь принято:

$$\begin{aligned} P(x) &= 0,5\gamma'(x) / \gamma(x); K^2(x, \tau) = p^2(\tau)a(x, \tau)^{-2}\gamma(x)^{-1}; a^2(x, \tau) = GI(0) / \rho(x, \tau); \gamma(x) = I(x) / I(0); \\ (') &= \partial / \partial x; (\dot{}) = \partial / \partial t. \end{aligned}$$

На основании метода условного осциллятора имеем

$$X = \exp\left\{-\int_0^x P(\xi)d\xi - 0,5[z(x) - z(0)]\right\}(C_1 \cos \Phi + C_2 \sin \Phi), \quad (20)$$

где $\Phi(\tau) = \int_0^\ell U(\xi, \tau)d\xi$; $U(x, \tau) = \sqrt{K^2 - P^2 - P'}$; C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Функция z является частным решением (точным или приближенным) уравнения условного осциллятора, которое в данном случае определяется как

$$z'' - 0,5z'^2 + 2U(0, \tau)e^{2z} = 2U(x, \tau)^2. \quad (21)$$

Для определенности примем, что на левом конце вала располагается диск (ротор двигателя, маховик), момент инерции которого значительно превышает приведенный момент инерции главного вала, т.е. $J_o \gg J_{\max}^*$ (см. рис.1,б; модель 2). В этом случае граничные условия при частном анализе совпадают с условиями при заделке. Тогда $X(0) = 0$; $X'(\ell) = 0$. Кроме того, при $I = \text{const}$ имеем $\gamma = 1$; $P = 0$; $U(x, \tau) = K(x, \tau) = p^2 / a^2(x, \tau)$. На основании (20), (21)

при медленном изменении параметров решение уравнения совпадает с ВКБ приближением первого порядка [17] и имеет вид

$$X \approx A \sqrt{a(x, \tau) / a(0, \tau)} \sin \left[p \int_0^x \frac{dx}{a(x, \tau)} + \alpha \right]. \quad (22)$$

Отсюда, после подстановки граничных условий получаем частотное уравнение

$$\operatorname{tg} \left[p \int_0^{\ell} dx / a(x, \tau) \right] + 2p / a'(\ell) = 0. \quad (23)$$

Если между двигателем и главным валом находится достаточно податливый элемент (например, ременная передача, упругая муфта и т. п.), то справедливы следующие граничные условия:

$$GIX'(0) = cX(0); X'(\ell) = 0. \quad (24)$$

Здесь c – коэффициент жесткости промежуточного упругого элемента

На основании (23) и (24) получаем

$$\operatorname{tg} \left[p \int_0^{\ell} \frac{dx}{a(x, \tau)} \right] + \left[\frac{0,5a' + (a\sigma - 0,5a')}{p - 0,5a'p^{-1}(a\sigma - 0,5a')} \right]_{x=\ell} = 0, \quad (25)$$

где $\sigma = c / GI$

Аналогичным образом определяются частотные уравнения при других граничных условиях. Выше мы ограничились анализом одного повторяющегося модуля колебательной системы привода, т.е, по существу, «парциальные» частоты выделенной подсистемы. Полученные при этом результаты несомненно играют большую роль при динамическом синтезе и выборе рационального направления оптимизации подобных систем сложной структуры. Для определения амплитудно-частотных характеристик при совместном учете характеристик двигателя и механического привода целесообразно на базе полученных результатов воспользоваться способом, базирующимся на аппарате матриц перехода. При реализации двухстороннего привода посредством двух двигателей матрица перехода при учете (3) имеет вид.

$$\Gamma = \Gamma_M \Gamma_{J0} \Gamma_u \tilde{\Gamma}_* \Gamma_u \Gamma_{J0} \Gamma_M. \quad (26)$$

Элементы матрицы (26) соответствуют модели 2 (см. рис.1,б). Этот этап анализа, включающий частотный анализ и определение вынужденных колебаний при силовом и кинематическом возбуждении, а также учете характеристик двигателей, подробно рассмотрен в работах [9,18,19]. В отличие от аналогичных зависимостей, приведенных в этих статьях, формула (26) отражает особенности рассмотренной задачи, что нашло отражение в матрице $\tilde{\Gamma}_*$.

В заключение отметим, что приведенное выше решение поставленной задачи нельзя считать исчерпанным. В частности, отдельного рассмотрения требует учет нелинейных факторов, связанных установкой муфт, наличием зазоров, с особенностями различных видов диссипативных сил, и с рядом других факторов, сопутствующих динамическому анализу сложных колебательных систем современных машинных агрегатов.

Список литературы

1. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. - М.: Наука, 1972. – 470 с.
2. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. – М.: Изд.-во иностр. лит., 1959. - 457 с.
3. Индейцев Д.А., Кузнецов Н.Г., Мотыгин О.В. и др. Локализация линейных волн. – СПб.: Изд.-во С.- Петерб. ун-та, 2007. – 342 с.
4. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980.– 408 с.
5. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение, 1990. – 309 с.
6. Вульфсон И. И. Динамика цикловых машин. – СПб.: Политехника, 2013. – 425 с.
7. Коловский М.З. Динамика машин. – Л.: Машиностроение, 1989. – 264 с.
8. Вульфсон И.И., Коловский М.З. Нелинейные задачи динамика машин.– Л.: Машиностроение, 1968. – 284 с.
9. Вульфсон И. И. К проблеме динамической взаимозависимости электродвигателя и механического привода цикловой машины // Теория механизмов и машин. – 2016. - Т. 32, №4. – С. 173–182.
10. Вульфсон И. И. О некоторых коррективах при оценке влияния электродвигателя на виброактивность привода технологических машин// Вестник научно-технического развития. – 2017. - №2 (114). - С. 11–23. vntr.ru: 08.03.2017.
11. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластичных тел. – М.: Наука, 1976. –328 с.
12. Первозванский А.А., Гайцгори В.Г. Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. - М.: Наука, 1979. – 344 с.
13. Банах Л. Я. Методы декомпозиции при исследовании колебаний механических систем. – Ижевск: АНО Ижевский институт компьютерных исследований, 2016. – 291с.
14. Вульфсон И. И., Левит В. Л. Распределение динамических нагрузок в замкнутых приводах с учётом зазоров и фазовых рассогласований// Машиноведение. - 1988. -№1. – С. 75-81.
15. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. - М.: Наука, 1964. - 432 с.
16. Вульфсон И. И. О колебаниях систем с параметрами, зависящими от времени. // Прикладная математика и механика. - 1969. - Т.33, №2. – С. 331–337.
17. Фреман Н., Фреман П. У. ВКБ - приближение. – М.: Мир, 1967. – 168 с.
18. Вульфсон И.И. К проблеме снижения виброактивности приводов машин при учете динамических характеристик электродвигателя // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2017. - №4. - С. 12–19.
19. Вульфсон И.И. К проблеме динамической взаимозависимости электродвигателя и механического привода цикловой машины. // Теория механизмов и машин. – 2016. - Т. 32, №4. – С. 173–182.

Дата поступления: 8 февраля 2018 г.