УДК 534.1

К АНАЛИЗУ ВИБРОПРОВОДЯЩИХ СИСТЕМ С ВКЛЮЧЁННЫМИ УДАРНЫМИ ПАРАМИ

© Виталий Львович Крупенин^{1,2}¹ИМАШ РАН, Москва, Россия²Московский Политехнический Университет, Москва, Россияkrupeninster@gmail.com

Аннотация. Рассматриваются резонансные явления в вибропроводящих одномерных системах с изолированными ударными парами. Дается частотно-временной анализ динамики таких систем, оценивается спектральный состав вибрации. Приводятся примеры расчёта.

Ключевые слова: вибропроводящая система, виброударный процесс, ударная пара, периодическая функция Грина, резонанс, фаза удара, импульс удара, спектр.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (проект 18-08-00168).

TO THE ANALYSIS OF VIBRATIONAL CONDUCTING SYSTEMS WITH INCLUSIVE SHOCK VARIATIONS

© Vitaly Krupenin^{1,2}¹IMASH RAN, Moscow, Russia²Moscow Polytechnic University, Moscow, Russiakrupeninster@gmail.com

Abstract. Resonant phenomena in vibro-conducting one-dimensional systems with isolated shock pairs are considered. Frequency-time analysis of the dynamics of such systems is given, the spectral composition of the vibration is estimated. Examples of calculations are given.

Keywords: vibro-conducting system, vibro-impact process, shock pair, periodic Green's function, resonance, impact phase, impact pulse, spectrum.

Acknowledgements. The work was supported by RFBR (project 18-08-00168).

1. Введение. В работах [1-3] изучались вибропроводящие и виброгенерирующие системы, оснащённые большим числом множественными ударных пар. Модели таких систем описывались, в частности, при помощи уравнений динамики сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры.

На основе указанных моделей были описаны вибрационные поля в ряде характерных систем со множественными разрывами; были получены необходимые определяющие соотношения и расчетные формулы.

В данной работе рассматриваются проблемы, связанные с описанием виброполей, возникающих при распространении виброударных процессов в одномерных (стержневых)

системах с изолированными одиночными ударными парами в предположении, что их концентрация достаточно мала.

2. Изучаемые модели. Пусть периодическая вибрация распространения по виброводу простой структуры, представляющему из себя продольно колеблющуюся, вообще говоря, составную стержневую систему, состояние которой даёт функция перемещений $u(x, t)$, $x \in \Lambda \subseteq \mathbf{R}^1$, t – время. Если стержневая система – линейна, то уравнение движения имеет вид

$$\mathbf{B}_v \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) = f(x, t); \quad \Gamma u = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{B}_v(p, q)$ – полином степени v , зависящей от свойств модели [4]; $f(x, t)$ – плотность внешних сил Γ – оператор граничных условий. При рассмотрении процесса распространения вибрации по бесконечным стержням граничные условия – суть условия ограниченности решений на бесконечности.

Если сечения стержней – переменны, то коэффициенты полинома $\mathbf{B}_v$ – зависят от величины x , если задача – нестационарна, то от величины t .

Уравнение (1) решается посредством нахождения распределенного оператора динамической податливости [5, 6] $L(x, y, p)$:

$$u(x, t) = \int_{\Lambda} L(x, y, p) f(y, t) dy; \quad p \equiv \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2)$$

Простейший пример рассматриваемой системы – тонкий бесконечный стержень постоянного сечения, по которому вследствие приложенной в точке $x=0$ синусоидальной вибрации в обе стороны распространяется бегущая волна (рис.1, а). При наличии отражающих границ – в стержне устанавливается стоячая волна. Представления соответствующих операторов можно найти в справочнике [7]. В дальнейшем, в данной работе будут рассматриваться распространяющиеся волновые виброударные процессы.

Рис.1.

Пусть в рассматриваемом прямом стержне в точках $\{x_k\}$ (k - целочисленный индекс) помещены точечные тела с массами $\{m_k\}$ (рис 1, б). Уравнение движения в предположении отсутствия диссипации принимает вид:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) - \sum_{k=1}^K m_k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \delta(x - x_k) \quad (3)$$

где $\delta(x)$ - δ -функция, K - число точечных включений, а ρ , E и S - соответственно плотность стержня, модуль Юнга его материала и площадь его поперечного сечения. Если воздействующая синусоидальная вибрация, локализована при $x=x_0$, то можно записать: $f(x, t) = f_0 \cos(\omega t + \phi) \delta(x - x_0)$ или $f(x, t) = f_0 \exp i(\omega t + \phi) \delta(x - x_0)$; f_0 , $\phi = \text{const}$, где $\delta(x)$ - δ -функция.

Заметим, что если предположить стержень бесконечным, а точечные включения - одинаковыми (все $m_k = m$) и расположенными через равные расстояния (a) друг от друга, то вместо (3) можно получить;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{ES}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) - \frac{m}{\rho} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \delta^a(x - x_0); \quad \delta^a(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na) \quad (4)$$

Здесь $\delta^a(x)$ - a -периодическая δ -функция [5, 8]. Вибровод такого рода изучался во многих работах, (см. в частности [8]). К уравнениям (3) и (4) должны быть добавлены граничные условия.

Пусть в силу некоторых причин произошли каких-либо нарушения или исчезновения необходимых силовых замыканий и на месте отмеченных на рис. 1, б возникли различного рода ударные пары (разрывы). На рис. 2, а показан разрыв типа «шарик в полости», на рис. 2, б - типа «осциллятор в полости», на рис. 2, в - типа «внешний ограничитель».

Наконец на рис. 3, а показана ударная пара типа «трещина».

Рис.2

Во всех приведенных примерах, кроме примера рис. 3, а для описания удара возможно использование как концепции мгновенного удара и гипотезы Ньютона, так и более реалистических гипотез взаимодействия, основанных на записи этой силы при помощи класса пороговых функций $\{\Phi\}_\Delta$ [5, 9].

Для примера рис. 3, а - возможна лишь гипотеза, предполагающая конечность продолжительности взаимодействия. Это обстоятельство можно обойти, если оказывается корректным моделировать разрыв при помощи схемы, показанной на рис. 3, б.

Наряду со стержневыми, вполне аналогично (за исключением «трещин») могут рассматриваться струнные модели типа показанной на рис. 3, в. Механический смысл обозначений виден из рисунка.

Наша цель - дать описание методов расчета виброводов, в которых заданная вибрация проходит через ударные пары, трансформируется в виброударный процесс и распространяется далее.

Рис.3

3. Уравнения движения. Уравнение движения виброводов с разрывами, типа показанных на рис. 2, в будут иметь вид [ср. с (3)]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) - \sum_{k=1}^K m_k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \delta(x - x_k) - \sum_{q=1}^Q \Phi_q[u(t, x), \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)] \delta(x - x_q), \quad (5)$$

где $c = \sqrt{\frac{ES}{\rho}}$ - скорость звука в материале данного стержня и все члены уравнения отнесены к плотности ρ . В правой части уравнения (5) ведется суммирование по k – массивным точечным включениям в вибровод и по q - ударным парам, локализованным при $x = x_q$. Рассматривая далее соударения, приведённые к массивным включениям, полагаем, что $Q \leq K$.

Представление сил удара $\Phi_q[u(t, x), u_t(t, x)]$ зависит от принятой гипотезы взаимодействия. Здесь, хотя для соотношений общего вида это и не существенно, будем предполагать, что во всех ударных парах действует одна и та же гипотеза удара, например, гипотеза Ньютона, или какая-либо гипотеза об ударе конечной продолжительности [5, 9].

Для моделей, данных на рис. 2, а и б оказывается необходимым добавить к уравнению вибровода уравнения движения ударников, поскольку здесь сила удара зависит от относительных координат. Например, для модели «шарик в полости» - рис. 2, б – будем иметь:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) - \sum_{k=1}^K m_k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \delta(x - x_k) - \sum_{q=1}^Q \Phi_q[u_{0q}(x_q, t), \frac{\partial u}{\partial t}(x_q, t)] \delta(x - x_q), \quad (6)$$

$$\mu_q [\ddot{u}(x_q, t) + \ddot{u}_0(x_q, t)] = \Phi_q[u_0(t, x), \frac{\partial u_0}{\partial t}(x, t)], \quad q=1, 2, \dots, Q.$$

Здесь μ_q и $u_0(x_q, t)$ – масса и смещения ударников, относительно вибрирующего включенного тела; удары в каждой из Q ударных пар происходят при $u_0(x_q, t) = \pm \Delta_q$.

В случае, если в полости оказываются ударные осцилляторы с собственными частотами Ω_q , то вторая группа уравнений (6) очевидным образом видоизменяется:

$$[\ddot{u}(x_q, t) + \ddot{u}_0(x_q, t)] + \Omega_q^2 \ddot{u}_0(x_q, t) = \Phi_q[u_0(x_q, t), \frac{\partial u_0}{\partial t}(x_q, t)], \quad q=1, 2, \dots, Q \quad (7)$$

где все силы отнесены к массам μ_q . Ко всем выписанным уравнениям необходимо добавить граничные условия.

Если вибропроводящей системой оказывается струна, уравнения движения – вполне аналогичны. Задачи о виброводах типа трещин рассматриваются по-иному и в этой работе не изучаются (см. [6, 10]).

4. Операторные уравнения. Имея в виду использовать методы частотно-временного анализа виброударных процессов [5, 11], проведем некоторые вспомогательные построения. Вначале запишем уравнения движения в операторной форме, используя операторы динамической податливости.

Рассмотрим линейные части систем, положив в (5) $\Phi_q = 0$. Найдем выражение для оператора $L(x, y, p)$, отвечающего системе (5) в случае пренебрежения ударами, считая заданным оператор $L_0(x, y, p)$ стержня без массивных включений. Пользуясь, свойствами операторов [2, 13], можно записать:

$$L(x, y, p) = L_0(x, y, p) - \sum_{k=1}^K m_k p^2 L_0(x, x_k, p) L(x, x_k, p). \quad (8)$$

Полагая последовательно $y = x_k$, получим соотношения, количество которых равно количеству точечных включений K . Отсюда следует алгебраическая линейная система уравнений для K неизвестных величин $L(x, x_k, p)$, после решения которой и определится искомый оператор (8).

Рассмотрим пример. Пусть система имеет единственное включение в виде точечного тела с массой m_1 при $x = x_1$. Тогда легко получить:

$$L(x, y, p) = L_0(x, y, p) - \frac{m_1 p^2 L_0^2(x, x_1, p)}{1 + m_1 p^2 L_0(x, x_1, p)}. \quad (9)$$

Для бесконечного стержня [13]

$$L_0(x, y, p) = \frac{1}{2pc} \exp[-\frac{p}{c} |x - y|]. \quad (10)$$

Поэтому для рассматриваемого принципиального примера

$$L(x, y, p) = \frac{1}{2pc} \exp[-\frac{p}{c} |x - y|] - \frac{\frac{m_1 p}{2c} \exp[-\frac{2p}{c} |x - x_1|]}{1 + \frac{m_1 p}{2c} \exp[-\frac{p}{c} |x - x_1|]} \quad (11)$$

Выражения для операторов стержневых систем других типов, в частности, для стержней конечной длины даны в [5-7].

Если внешнее воздействие $f(x, t)$ распределено на некотором множестве Λ , то соотношения (2), (9) и (10) и определяют решение данной линейной задачи. В случае, если $f(x, t+T) \equiv f(x, t)$ - T -периодическое распределение силового воздействия, то, вводя T -периодическую функцию Грина (ПФГ) $\chi(t, x)$ можно получить интегральное представление периодического решения вида [2]:

$$u_*(x, t) = \int \int_{\Lambda} \int_0^T \chi(x, y, t-s) f(y, s) dy; \quad u^*(x, t) = \int \int_{\Lambda} \int_0^{T/2} \chi^*(x, y, t-s) f(y, s) dy, \quad (12)$$

где «нижние звездочки» подчеркивают, что это - решения линейных задач.

Второе соотношение (12) выписано в предположении симметрии внешнего T -периодического воздействия: $f(x, t + T/2) \equiv -f(x, t)$. ПФГ $\chi(t, x)$ и симметричная ПФГ $\chi^*(t, x)$ - отклики (перемещения) линейной системы на эталонные воздействия в виде T -периодической последовательности δ -функций и симметричной T -периодической последовательности δ -функций (см. [5, 8]). Имеют место разложения ПФГ в ряды Фурье:

$$\chi(t, x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} L(x, y, i n \omega) \exp(i n \omega t); \quad \chi^*(t, x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} L[x, y, i(2k+1)\omega] \exp[i(2k+1)\omega t]. \quad (13)$$

Существуют способы записи рядов типа (13) в конечном виде на интервалах периодичности или симметрии [5].

5. Построение решения. Пусть соударения моделируются при помощи гипотезы Ньютона. Выберем, для определенности, систему с внешним ограничителем (рис. 2, в). Рассмотрим момент некоторого α -го соударения, предположив, что соударяются именно точечные включения. Плотность силы ударного взаимодействия будет тогда иметь вид:

$$-\sum_{q=1}^Q \Phi_q [u(t, x), \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)] \delta(x - x_q) \Big|_{t=t_\alpha} = -\sum_{q=1}^Q J(t_q, x_q) \delta(t - t_\alpha) \delta(x - x_q). \quad (14)$$

При этом $2Q$ параметров движения - импульсы ударов и моменты соударений - определяются соотношениями:

$$J(t_q, x_q) \equiv J_q = (1+R)m_q \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t_\alpha - 0, x_q) \right|; \quad u(t_\alpha, x_q) = \Delta_q. \quad (15)$$

Здесь коэффициент восстановления $0 < R \leq 1$, Δ_q - значения зазоров. При рассмотрении задач с внутренними соударениями, типа показанных на рис.2, а и б, условия ударов (15) записываются для относительных координат [2].

Представление решения уравнения (5) в общем случае будет иметь вид, следующий из формулы (2):

$$u(x, t) = \int_{\Lambda} L(x, y, p) f(y, t) dy - L(x, x_q, p) \sum_{q=1}^Q \Phi_q [u(t, x), \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)], \quad (16)$$

где плотности сил ударов Φ_q определяются из соотношений (14) и (15).

Данное представление - весьма общее и, конкретизируя условия задач, можно получать искомые решения для различных случаев. Оно может быть использовано при численном, а также (при малом числе ударных пар) для аналитического анализа виброударных процессов. Рассмотрим распространяющийся периодический виброударный процесс в системе с внешним ограничителем (рис. 2, в). Пусть стержень бесконечен. Плотность сил возбуждения имеет вид $f(x, t) = A(x)\cos(\omega t + \phi)$, где амплитудная функция $A(x) > 0$, удовлетворяет необходимым математическим требованиям; ϕ -фаза, которая, вообще говоря, оказывается функцией координаты $x \in [-l_0, l_0]$; $l_0 > 0$. Для первого члена правой части представления (16) (решения линейной задачи $u_*(x, t)$) найдем:

$$u_*(x, t) = \int_{-l_1}^{l_2} L(x, y, p) A(y) \cos(\omega t + \phi) dy = B(x) \cos[\omega t + \psi(x)], \quad (17)$$

где в данном случае оператор $L(x, y, p)$ определяется формулой (11), а функции $B(x)$ и $\psi(x)$ соответственно определяются величинами $|L(x, y, i\omega)|$ и $\arg L(x, y, i\omega)$.

Разместим точечное включение в точке $x_1 = 0$, положив $A(x) = P_1 \delta(x)$, т.е. считая, что в этой же точке приложено и внешнее воздействие. Тогда, используя представление (11), находим при $y=0$ выражение для оператора динамической податливости, действующего из точки включения в произвольную точку стержня:

$$L(x, 0, p) = \frac{\exp[-\frac{p}{c}|x|]}{2pc + m_1 p^2 \exp[-\frac{p}{c}|x|]}. \quad (18)$$

При $p = i\omega$ вместо формулы (17) найдем

$$u_*(x, t) = P_1 |L(x, 0, i\omega)| \cos[\omega t + \psi(x)]; \quad \psi(x) = \arg L(x, 0, i\omega), \quad \psi(x) \equiv \psi(|x|). \quad (19)$$

В точке $x = 0$: $L(0, 0, p) = (2pc + m_1 p^2)^{-1}$; $|L(0, 0, i\omega)| = [\sqrt{m_1^2 \omega^4 + 4\omega^2 c^2}]^{-1}$; $\arg L(0, 0, i\omega) = \operatorname{arctg}(2c/m_1 \omega)$. Далее будем обозначать $|L(0, 0, i\omega)| \equiv U_0$.

Второй член правой части представления (16) определяется при $Q=1$ для единственной ударной пары. Будем разыскивать симметричный T -периодический виброударный процесс, сопровождаемый поочередными соударениями о каждый из ограничителей. Силу удара, действующую на точечное тело, запишем в виде [5, 11]

$$\Phi_1[u(t, 0), \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0)] = J \delta^{\frac{T}{2}}(t - t_0), \quad (20)$$

где для определения импульса и момента удара имеются алгебраические уравнения, следующие из (15).

Предполагается, что за каждые полпериода происходят поочередные соударения с каким-то одним из двух ограничителей.

При этом

$$\delta^{\frac{T}{2}}(t) = \frac{2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[i(2k+1)\omega t] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\delta(t - jT) - \delta(t - jT - \frac{1}{2}T)]$$

- суть симметричная Т-периодическая последовательность δ -функций. Таким образом, с учетом (12) и (13) приходим к следующему двухпараметрическому представлению виброударного процесса [2, 14], в точке включения ударной пары:

$$u(x, t) = P_1 U_0 \cos(\omega t + \Psi) - J \chi^*(t, 0), \dots \dots \dots (21)$$

где начало отсчета времени совмещено с ударом. Импульс J и фаза Ψ подлежат определению из соотношений, следующих из условий (15):

$$P_1 U_0 \cos \Psi = \Delta - J \chi^*(0, 0); \quad P_1 U_0 \omega \sin \Psi = -J \left[\frac{\partial \chi^*(-0, 0)}{\partial t} + \frac{1}{(1+R)m_1} \right] \equiv -J W_0, \quad (22)$$

где смысл введенной величины W_0 очевиден. Этот член описывает потерю энергии при ударе.

Следуя книге [2], исключаем из (22) фазу и получаем два значения импульса при синусоидальном возбуждении:

$$J_{1,2} = \frac{-\Delta \chi^*(0, 0) \pm \sqrt{P_1^2 U_0^2 \chi^{*2}(0, 0) - \omega^2 W_0^2 (\Delta^2 - P_1^2 U_0^2)}}{\chi^{*2}(0, 0) + \omega^2 W_0^2}. \quad (23)$$

Часто используемое при применении методов частотно-временного анализа виброударных систем энергетическое условие неустойчивости приводит к выводу, что знаку минус здесь соответствует заведомо неустойчивый режим. Полное исследование устойчивости для таких систем возможно лишь при посредстве численных процедур. Далее, отбрасывая заведомо неустойчивые режимы всё время выбираем знак «плюс».

Закон движения точечного включения, находящегося в виброударном режиме определен. Осталось дать представления для ПФГ (13), отвечающих оператору $L(0, 0, p)$ (см. формулу (18)) и найти величины, входящие в формулы (22) и (23).

Рассмотрим вначале более общий случай передачи воздействия из точки включения $x=0$ в произвольную точку стержня $x \neq 0$.

Пользуясь представлением (13) и (18), получим

$$\chi^*(t, x) = \frac{2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-i(2k+1)\omega c^{-1}|x|]}{2pc + m_1 p^2 \exp[-i(2k+1)\omega c^{-1}|x|]} \exp[i(2k+1)\omega t]. \quad (24)$$

Теперь можно найти

$$\chi^*(t, 0) = \frac{2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-i(2k+1)\omega t]}{2i(2k+1)\omega c - m_1(2k+1)^2 \omega^2}. \quad (25)$$

и тем самым полностью определить решение (21) – (23). Ряд (25) можно записать в конечном виде на интервале симметрии при помощи формул, данных в [2]. Имеем при $0 \leq t < \frac{T}{2}$:

$$\chi^*(t, 0) = \frac{1}{4c} - \frac{1}{2c} \frac{\exp(-2ctm_1^{-1})}{1 + \exp(-cTm_1^{-1})}; \quad \chi^*(0, 0) = -\frac{1}{4c} \operatorname{th} \frac{cT}{2m_1};$$

$$\frac{\partial \chi^*(-0, 0)}{\partial t} = \frac{1}{m_1} \frac{1}{1 + \exp(-cTm_1^{-1})}.$$
(26)

Условие существования периодического виброударного процесса следует из условий реализуемости соотношений (22), (23). Из второго соотношения (23) найдем, например, учитывая значения входящих туда величин, условие существования в виде:

$$\left| \frac{J_1 \sqrt{m_1^2 \omega^4 + 4c^2 \omega^2}}{P_1 \omega m_1} \left[\frac{1}{1 + \exp(-cTm_1^{-1})} + \frac{1}{(1+R)} \right] \right| \leq 1.$$
(27)

Ввиду присутствия в бесконечном стержне волнового сопротивления [13], величина $\operatorname{Im} L(x, y, i\omega) \neq 0$ и виброударный режим при малых уровнях возбуждения срывается даже при отсутствии потери энергии при ударе ($R=0$). Характер зависимости $J(\omega)$ показан на рис.4. Здесь пунктир соответствует заведомо неустойчивым режимам, отвечающим значению импульса удара J_2 .

Рис.4

Видно, что эта зависимость во многом схожа с обычными для теории виброударных систем нелинейными резонансными зависимостями, характерными для жестко анизохронных систем [5, 6]. Частота срыва ω^* определяется знаком равенства в условии (27) и зависит от сопротивления движению, зависящему от величин R , c и m_1 . Вблизи частоты $\omega = 0$ режимы рассматриваемого вида не существуют.

Слева от частоты ω^* соударения интенсивны; вибровод находится в резонансном состоянии. После прохождения этой частоты ($\omega > \omega^*$) процессы с интенсивными соударениями невозможны. Для рассмотренного стержня с ударной парой имеют место свойственные традиционным виброударным системам нелинейные эффекты: затягивания по частоте и амплитуде, срыв виброударного процесса, возможность жесткого запуска и другие [5, 10]. Процесс распространения волны вдоль стержня дается операторным представлением:

$$u_*(x, t) = P_1 |L(x, 0, i\omega)| \cos[\omega t + \psi(x) + \Psi] - J_1 \chi^*(t, x),$$
(28)

где учитываются (18), (19), (24) и тот факт, что $\psi(x) = \arg L(x, 0, i\omega)$, J_1 – большее значение импульса удара (знак «плюс» перед радикалом в формуле (23)). Записав ряд (24) в действительной форме, получим из (28) выражение для волны, распространяющейся вдоль стержня:

$$u_*(x, t) = P_1 |L(x, 0, i\omega)| \cos[\omega t + \psi(x) - \Psi] - 4J_1 T^{-1} |L(x, 0, i\omega)| \cos[\omega t + \psi(x)] - \\ - 4J_1 T^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} |L[x, 0, (2k+1)i\omega]| \cos[\omega t + \psi_{2k+1}(x)], \quad \psi_{2k+1}(x) \equiv \psi_{2k+1}(|x|). \quad (29)$$

Заметим, что все члены исходного уравнения движения были отнесены к плотности материала стержня.

Представление (29) показывает, что в данной системе по вибропроводящему стержню в обе стороны от точечного массивного включения, в котором находится ударная пара и приложено синусоидальное возбуждение распространяется продольная волна. При этом, возможно такое сочетание параметров системы что два первых члена в формуле (29) будут близки к взаимной компенсации и распространяться смогут лишь высшие гармонические составляющие процесса.

При введении в модель диссипативных факторов, помимо рассеяния энергии при ударах, каждая из гармонических составляющих волны будет экспоненциально затухать (как $\exp(-\gamma x)$, $\gamma > 0$).

Значение коэффициента γ зависит от параметров и модели гипотезы диссипации. Если, например, определяющий полином исходного уравнения (1) $B_v(p, q) = p^2 - q^2 + pq^2$ и внутренние

потери энергии описывает диссипативная сила $2b \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}$, $b > 0$, то величина γ пропорциональна частоте ω [10]. Тогда высокочастотные составляющие будут затухать достаточно близко от точки включения. Возможны гипотезы трения, для которых $\gamma = \text{const}(x)$.

6. Заключительные замечания.

6.1. При отказе от предположения о мгновенности соударений и учете конечной продолжительности времени соударения, можно воспользоваться методом сингуляризации и учесть свойства материала соударяющихся подсистем [9].

6.2. Совершенно аналогично осуществляется анализ субгармонических, ультрагармонических и комбинационных резонансных режимов, возникающих, например, при периодическом полигармоническом внешнем воздействии [5, 12].

Любые усложнения влекут, в свою очередь, усложнение необходимых вычислений и, достаточно часто, утрате возможности получить «прикидочные» аналитические выражения, подобные полученным выше. В то же время предложенная методика, разумеется, легко сочетается с компьютерными методами [13, 14].

6.3. Указанные усложнения касаются и структур рассматриваемых объектов. Использованный метод частотно-временного анализа виброударных процессов позволяет рассмотреть, например, составные стержни или многомерные стержневые и балочные конструкции, а также подробно рассмотреть модели, показанные выше см. [(5) и (6) при $Q > 1$] и др. Здесь принципиально знание соответствующих операторов динамической податливости, определяющих соответствующие периодические функции Грина.

6.4. Коротко рассмотрим модель, данную на рис. 2, а.

В общем случае большого числа ударных пар системе отвечают уравнения движения (6). Ограничиваясь случаем одной ударной пары, предполагая, что включение расположено в точке $x=0$, найдем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \{P_1 \cos(\omega t + \varphi) - m_1 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}\} \delta(x) - \Phi_1[u_0(t), \dot{u}_0(t)],$$

$$\mu_1[\ddot{u}(0, t) + \ddot{u}_0(0, t)] = \Phi_1[u_0(t), \dot{u}_0(t)]$$
(30)

Все члены первого уравнения (30) отнесены к плотности ρ ; μ_1 и $u_0(t)$ – масса и относительное смещение ударника в полости; удары происходят при $u_0(0, t) = \pm \Delta_q$.

Плотность силы удара в предположении Т-периодичности и симметрии разыскиваемого процесса даётся формулой типа (20), где фигурирует относительное смещение: $\Phi_1[u_0(t), \dot{u}_0(t)] = J \delta^{\frac{T}{2}}(t - t_0)$.

Условия удара, следующие из (15), будут выглядеть так: $J = m(1 + R) / \dot{u}_0(t - 0) |$; $u_0(0) = \Delta$. При этом снова проведено совмещение момента соударения с началом отсчета времени. Величина $m = m_1 \mu_1 (m_1 + \mu)^{-1}$ – приведенная масса полости и ударника. Уравнение (30) приводит к операторным соотношениям вида:

$$u(x, t) = L(x, 0, p)[P_1 \cos \omega t + \Phi_1[u_0(t), p u_0(t)]];$$

$$u_0(t) = -u(0, t) - (m_1 p)^{-2} \Phi_1[u_0(t), p u_0(t)].$$

Отсюда легко прийти к операторному представлению для относительной координаты и соответствующему двухпараметрическому представлению виброударного процесса:

$$u_0(t) = -P_1 \cos \omega t [\sqrt{m_1^2 \omega^4 + 4 \omega^2 c^2}]^{-1} [L(0, 0, p) + (m_1 p)^{-2}] \Phi_1[u_0(t), p u_0(t)];$$

$$u_0(t) = -P_1 \cos(\omega t + \Psi) [\sqrt{m_1^2 \omega^4 + 4 \omega^2 c^2}]^{-1} J \chi_0^*(t),$$

где симметричная ПФГ χ_0^* дается рядом (13) и отвечает оператору $[L(0, 0, p) + (m_1 p)^{-2}]$. В конечной форме при $t \in [0, \frac{T}{2}]$, пользуясь формулами, данными в [2], можно записать

$$\chi_0^*(t) = \frac{1}{4cT} - \frac{T}{8\mu} + \frac{t}{2\mu} - \frac{1}{4cT} - \frac{1}{2c} \frac{\exp(-2ctm_1^{-1})}{1 + \exp(-cTm_1^{-1})}.$$

Параметры движения импульс и фаза (J, Ψ) определяются из соотношений аналогичных (22) и (23). Процесс распространения волны вдоль стержня описывается формулой подобной (29). Качественные отличия здесь практически отсутствуют.

В частности, сохраняют свою силу замечания, сделанные в п. 5 о свойствах резонансного состояния вибровода. В данном случае при $\Delta > 0$ система жестко анизохронна, при $\Delta < 0$ – мягко анизохронна [5, 6].

Список литературы

1. Крупенин В.Л. Модель сильно нелинейной вибропроводящей среды с распределенным ударным элементом// ДАН. - 1995. - Т. 343, №6. - С. 759-763.
2. Крупенин В.Л. К описанию процессов прохождения нелинейных волн через машинные конструкции, моделируемые посредством сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры (часть 1 и 2)// Вестник научно-технического развития. – 2011. - №№6, 7. - С.26-33; С.3-16.
3. Крупенин В.Л. Об описании сильно нелинейных вибропроводящих и виброгенерирующих сред // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2016. - №4. - С.9-19.
4. Артоболовский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. - М.: Наука, 1979. - 296 с.
5. Бабицкий В. И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. - М.: Наука, 1985. - 320 с.
6. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Нелинейная динамика ультразвуковых технологических процессов. - М.: МГУП им. Ивана Федорова, 2016. - 372 с.
7. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. - М.: Наука, 1979. - 224 с.
8. Бурд В.Ш., Крупенин В.Л. Усреднение в квазиконсервативных системах. Библиотека ВНТР. - М.: «Белый Ветер», 2016. - 172 с.
9. Крупенин В.Л. Анализ сингуляризованных уравнений движения решетчатых виброударных 2D-систем при отказе от гипотезы Ньютона // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2016. - №2. - С. 20-26.
10. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 1998.- №5. - С.13-30.
11. Крупенин В. Л. О представлении периодических виброударных процессов через параметры движения "импульс-фаза" // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2010. - № 1. - С. 34-42.
12. Крупенин В. Л. О качественном анализе нелинейных резонансных режимов в многомерных конструкциях // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2017. - № 4. - С. 31-38.
13. Stefano Lepri, Arkady Pikovsky Nonreciprocal wave scattering on nonlinear string-coupled oscillators //CHAOS 24, 043119, 2014. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4899205>
14. Ibrahim R.A. Vibro-Impact Dynamics. - Berlin: Springer-Verlag, 2009. -297 p.

Дата поступления статьи: 1 февраля 2018 года.