УДК 534.1

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В КЛАССЕ МЕТАМАТЕРИАЛОВ, ЗАДАВАЕМЫХ КАК ЦЕПОЧКА «МАССА-В-МАССЕ»

© Владимир Иванович Ерофеев, Даниил Александрович Колесов

Институт проблем машиностроения Российской академии наук,

Нижний Новгород, Россия

erof.vi@yandex.ru

Аннотация. Известная математическая модель, представляющая собой цепочку осцилляторов, состоящую из упругих элементов и масс, каждая из которых содержит внутренний осциллятор и описывающая класс акустических метаматериалов «масса-в-массе», обобщена путем учета нелинейности внешнего и (или) внутреннего упругих элементов. В результате анализа длинноволнового приближения полученной системы показано, что в метаматериале, при динамическом воздействии на него, могут формироваться пространственно-локализованные нелинейные волны деформации (солитоны). Определены зависимости, связывающие параметры локализованной волны: амплитуду, скорость и ширину с инерционными и упругими характеристиками метаматериала.

Ключевые слова: математическое моделирование, нелинейные волны, метаматериал, цепочка «масса-в-массе», одномерная система.

Работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Гранты № 16-38-00387 мол_а, № 16-08-00971-а, № 16-08-00776-а).

LOCALIZED NON-LINEAR WAVES OF DEFORMATION IN THE CLASS OF METAMATERIALS AS A CHAIN OF "MASS-V-MASS"

© V.I. Erofeev, D.A. Kolesov

Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences,

Nizhny Novgorod, Russia

erof.vi@yandex.ru

Abstract. A well-known mathematical model representing a chain of oscillators consisting of elastic elements and masses, each of which contains an internal oscillator and describing the class of acoustic metamaterials "mass-in-mass", is generalized by taking into account the nonlinearity of the external and (or) internal elastic elements. As a result of analysis of the long-wavelength approximation of the obtained system, it is shown that spatially localized nonlinear deformation waves (solitons) can be formed in a metamaterial, under dynamic influence on it. The dependencies connecting the parameters of a localized wave are determined: amplitude, velocity and width with inertial and elastic characteristics of the metamaterial.

Keywords: mathematical modeling, nonlinear waves, metamaterial, chain "mass-in-mass", one-dimensional system.

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grants No 16-38-00387 mol_a, No 16-08-00971-a, No 16-08-00776-a).

Акустические (или механические) метаматериалы, являясь, по сути дела, не материалами, а ячеистыми периодическими конструкциями, в длинноволновом диапазоне ведут себя подобно непрерывным материалам. Изучение особенностей дисперсии, диссипации и проявления нелинейности акустических волн в метаматериалах представляет интерес. Этот интерес обусловлен, как познавательной стороной вопроса, так и перспективами практических приложений метаматериалов [1–4], среди которых все чаще называют возможность создания на их основе суперпоглотителей звука [5 – 8].

Руководствуясь математической аналогией между акустическими и электромагнитными волнами, многие исследователи пытались построить континуальные модели механических метаматериалов. Однако большого успеха на этом пути добиться не удалось, поскольку механические аналоги реально существующих материалов с отрицательной диэлектрической проницаемостью представляют собой деформируемые твердые тела, обладающие отрицательной массой, плотностью или отрицательным модулем упругости [9 – 13]. А таких материалов в природе не существует.

Избежать этого недостатка удалось на пути структурного моделирования метаматериалов.

В работе [14] рассматривалась одномерная цепочка, содержащая одинаковые массы m_1 , связанные упругими элементами (пружинами), обладающими одинаковой жесткостью k_1 , при этом каждая масса внутри себя содержала еще одну массу m_2 и еще один упругий элемент – пружину с жесткостью k_2 (Рис.1). Такая модель, названная цепочкой «масса-в-массе», не дает упомянутых абсурдных результатов.

Обобщим модель [14] путем учета квадратичной нелинейности внешнего и внутреннего упругих элементов.

Рис. 1.

Потенциальная энергия элементарной ячейки цепочки «масса-в-массе» запишется в виде:

$$W^{(j)} = \frac{1}{2} \left[k_1 (u_1^{(j+1)} - u_1^{(j)})^2 + k_2 (u_2^{(j)} - u_1^{(j)})^2 + h_1 (u_1^{(j+1)} - u_1^{(j)})^3 + h_2 (u_2^{(j)} - u_1^{(j)})^3 \right], \quad (1)$$

а ее кинетическая энергия в виде:

$$T^{(j)} = \frac{1}{2} \left[m_1 (\dot{u}_1^{(j)})^2 + m_2 (\dot{u}_2^{(j)})^2 \right] \quad (2)$$

Позволим $u_1(x)$ и $u_2(x)$ быть непрерывными функциями, которые дают смещения всех m_1 и m_2 , соответственно. Используя разложение перемещений в ряд Тэйлора, и ограничиваясь с двумя слагаемыми, получим

$$u_1^{(j+1)} = u_1(x+L) = u_1(x) + \frac{\partial u_1}{\partial x} L = u_1^{(j)} + \frac{\partial u_1}{\partial x} L \quad (3)$$

Техника разложения перемещений в (3) эффективно применялась Куниным И.А. [15] при преобразовании многомассовых дискретных систем в квазиконтинуум.

Плотности потенциальной и кинетической энергий для эквивалентного континуума, полученные из (5) и (6), запишутся в виде:

$$W = \frac{1}{2L} \left[k_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} L \right)^2 + k_2 (u_2 - u_1)^2 + h_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} L \right)^3 + h_2 (u_2 - u_1)^3 \right] \quad (4)$$

$$T = \frac{1}{2L} \left[m_1 (\dot{u}_1)^2 + m_2 (\dot{u}_2)^2 \right] \quad (5)$$

Сформируем из (4) и (5) лагранжиан $\mathcal{L} = T - W = \mathcal{L}(\dot{u}_1, \dot{u}_2, u_{1x}, u_1, u_2)$ и воспользуемся уравнениями аналитической механики

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{u}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{1x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{u}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} = 0 \end{cases}$$

для получения системы уравнений в перемещениях уравнений (4), (5), получим:

$$\begin{cases} \frac{m_1}{L} \ddot{u}_1 - k_1 L \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - 3h_1 L^3 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{k_2}{L} (u_2 - u_1) - \frac{3h_2}{2L} (u_2 - u_1)^2 = 0 \\ \frac{m_2}{L} \ddot{u}_2 + \frac{k_2}{L} (u_2 - u_1) + \frac{3h_2}{2L} (u_2 - u_1)^2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

В дальнейшем будем рассматривать частный случай системы (6), где $h_1 \neq 0$, $h_2 = 0$, т.е.:

$$\begin{cases} \frac{m_1}{L} \ddot{u}_1 - k_1 L \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - 3h_1 L^3 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{k_2}{L} (u_2 - u_1) = 0 \\ \frac{m_2}{L} \ddot{u}_2 + \frac{k_2}{L} (u_2 - u_1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Систему (7) можно переписать в виде одного уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{k_1 L^2}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{m_1 m_2}{k_2 (m_1 + m_2)} \frac{\partial^4 u_2}{\partial t^4} - \frac{k_1 L^2 m_2}{k_2 (m_1 + m_2)} \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^2 \partial t^2} - \\ & - \frac{3h_1 L^4}{m_1 + m_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{m_2}{k_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \frac{\partial^3 u_2}{\partial t^2 \partial x} + \frac{m_2}{k_2} \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial^4 u_2}{\partial t^2 \partial x^2} + \left(\frac{m_2}{k_2} \right)^2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial t^2 \partial x} \frac{\partial^4 u_2}{\partial t^2 \partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Перейдем к безразмерным времени, координате и перемещению:

$$\tau = \frac{t}{T}; \quad y = \frac{x}{X}; \quad u_2 = u_0 u. \quad (9)$$

Преобразованное уравнение (8) с проведёнными заменами (9) примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{k_1 L^2}{m_1 + m_2} \frac{T^2}{X^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{m_1 m_2}{k_2 (m_1 + m_2)} \frac{1}{T^2} \frac{\partial^4 u}{\partial \tau^4} - \frac{k_1 L^2 m_2}{k_2 (m_1 + m_2)} \frac{1}{X^2} \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial \tau^2} - \\ & - \frac{3h_1 L^4}{m_1 + m_2} \frac{T^2 u_0}{X^3} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{m_2}{k_2} \frac{1}{T^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^2 \partial y} + \frac{m_2}{k_2} \frac{1}{T^2} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^4 u}{\partial \tau^2 \partial y^2} + \left(\frac{m_2}{k_2} \frac{1}{T^2} \right)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^2 \partial y} \frac{\partial^4 u}{\partial \tau^2 \partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Потребуем, чтобы все коэффициенты (10) были конечными или малыми величинами. Подберём их так, чтобы среди нелинейных слагаемых можно было выделить только одно, главное.

Все дальнейшие рассуждения справедливы при выполнении двух условий:

$$\frac{k_1 L^2}{m_1 + m_2} \frac{T^2}{X^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{m_1 m_2}{k_2 (m_1 + m_2)} \frac{1}{T^2} = \varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon \ll 1.$$

При выполнении этих условий в уравнении (10) часть слагаемых можно отбросить, т.к. они имеют больший порядок малости и не оказывают существенного влияния на динамические процессы. Таким образом, уравнение (10) примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = \delta \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (11)$$

$$\text{где } \frac{m_1 m_2}{k_2 (m_1 + m_2)} \frac{1}{T^2} = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{3h_1 L u_0 \sqrt{\varepsilon \alpha}}{k_1 \sqrt{\frac{k_1}{k_2} \frac{m_2}{m_1}}} = \delta \ll 1, \quad \alpha = \frac{m_1 + m_2}{m_1} > 1.$$

Возвращаясь в уравнении (11) к исходным размерным переменным, получим упрощенное уравнение (8) в виде:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{k_1 L^2}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{m_1 m_2}{k_2 (m_1 + m_2)} \frac{\partial^4 u_2}{\partial t^4} - \frac{k_1 L^2 m_2}{k_2 (m_1 + m_2)} \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{3h_1 L^4}{m_1 + m_2} \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

Будем искать его решение в классе бегущих стационарных волн: $u_2 = u_2(\xi)$, $(\xi = x - Vt)$, V – скорость стационарной волны (заранее неизвестна).

Для деформации $\frac{du_2}{d\xi} = U$ нелинейное уравнение в частных производных (12) сведется к уравнению ангармонического осциллятора:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 U}{d\xi^2} + aU + bU^2 = 0, \\ & a = \frac{k_2 (V^2 - c_1^2) (m_1 + m_2)}{V^2 m_1 m_2 (V^2 - c_2^2)}, \\ & b = -\frac{3h_1 L^4 k_2}{2V^2 m_1 m_2 (V^2 - c_2^2)} \\ & c_1^2 = \frac{k_1 L^2}{m_1 + m_2}, c_2^2 = \frac{k_1 L^2}{m_1} \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что $c_2 > c_1$.

В зависимости от величины скорости V имеются качественно различные волновые картины, поскольку при этом уравнение (13) имеет различные решения [16]. Физический смысл имеют те решения, которые на бесконечности не дают постоянной составляющей для волны деформации U .

Если скорость стационарной волны удовлетворяет неравенству: $c_2 > c_1 > V$, то уравнение (13) имеет периодическое решение, выражающееся через эллиптический синус:

$$U(\xi) = \frac{A}{3s^2} \left(1 + s^2 - \sqrt{1 - s^2 + s^4} \right) - A \cdot \operatorname{sn}^2(Q\xi, s), \quad (14)$$

где $A = -\frac{3a}{2b} \frac{s^2}{\sqrt{1 - s^2 + s^4}}$ – амплитуда стационарной волны, $Q = \sqrt{\frac{k_1}{4V^2 m_2 \sqrt{1 - s^2 + s^4}}}$ – нелинейный аналог волнового числа, s – модуль эллиптической функции.

Легко видеть, что $Q \sim \sqrt{k_1}$, $Q \sim \frac{1}{\sqrt{m_2}}$, $Q \sim \frac{1}{V}$ при фиксировании остальных переменных.

Рис.2.

На рис.2 отображена зависимость $Q \sim \sqrt{k_1}$: линия 1 – качественный вид этой зависимости при фиксированных скорости и внутренней массе элемента; линия 2 – тенденция поведения графика зависимости при увеличении массы и неизменной скорости; линия 3 – увеличение скорости на тот же порядок, что была увеличена масса в предыдущем случае; линия 4 – увеличение обоих параметров. Из кривых 2, 3 и из предположения, что масса в сравнении со скоростью гораздо более статичный параметр, можно сделать вывод, что наиболее значимое влияние на данную зависимость оказывает именно скорость.

$$Q \sim \frac{1}{\sqrt{m_2}}$$

На рис.3 отображена зависимость $Q \sim \frac{1}{\sqrt{m_2}}$: линия 1 – качественный вид этой зависимости при фиксированных скорости и жесткости внешней пружины элемента системы; линия 2 – тенденция поведения графика зависимости при увеличении скорости и неизменной жесткости; линия 3 – увеличение жесткости на тот же порядок, что была увеличена скорость

в предыдущем случае; линия 4 – увеличение обоих параметров. Из кривых 2 и 3 видно, что увеличение параметров приводит к сдвигу графика зависимости в разные стороны. А из кривой 4 видно, что изменение скорости «сильнее».

Рис.3.

Рис.4.

На рис.4 отображена зависимость $Q \sim \frac{1}{v}$: линия 1 – качественный вид зависимости при фиксированных внутренней массе и жесткости внешней пружины элемента системы; линия 2 – тенденция поведения графика зависимости при увеличении массы и неизменной жесткости; линия 3 – увеличение жесткости на тот же порядок, что была увеличена масса в предыдущем случае. При увеличении обоих параметров на один и тот же порядок график функции совпадает с линией 1. Из этого можно сделать вывод, что данные параметры имеют одинаковую силу воздействия на указанную зависимость.

Качественный вид периодической волны представлен на рис. 5, где через $K(s)$ обозначен эллиптический интеграл первого рода.

Рис. 5.

Если скорость стационарной волны удовлетворяет неравенству: $c_2 > V > c_1$, то уравнение (13) имеет аperiодическое решение, выражающееся через гиперболический косинус:

$$U(\xi) = A_c ch^{-2}\left(\frac{\xi}{\Delta}\right) \quad (15)$$

Это соотношение описывает уединенную стационарную волну (солитон) деформации.

Здесь $A_c = -\frac{3a}{2b}$ – амплитуда солитона, $\Delta = \frac{2}{\sqrt{-a}}$ – его ширина. Анализ последнего параметра

показывает, что $\Delta \sim V$, $\Delta \sim \frac{1}{\sqrt{k_2}}$, $\Delta \sim \sqrt{m_2}$.

На рис.6 отображена зависимость $\Delta \sim V$: линия 1 – качественный вид этой зависимости при фиксированных жесткости внутренней пружины и внутренней массе элемента системы; линия 2 – тенденция поведения графика зависимости при увеличении массы и неизменной жесткости; линия 3 – увеличение жесткости на тот же порядок, что была увеличена масса в предыдущем случае. При увеличении обоих параметров на один и тот же порядок график функции совпадает с линией 1. Из этого можно сделать вывод, что данные параметры имеют одинаковую силу воздействия на указанную зависимость.

Рис.6.

На рис.7 отображена зависимость $\Delta \sim \frac{1}{\sqrt{k_2}}$: линия 1 – качественный вид этой зависимости при фиксированных скорости и внутренней массе элемента системы; линия 2 – тенденция поведения графика зависимости при увеличении скорости и неизменной массе; линия 3 – увеличение массы на тот же порядок, что была увеличена скорость в предыдущем случае; линия 4 – увеличение обоих параметров. Из 2 и 3 видно, что увеличение скорости приводит к более сильному сдвигу графика зависимости вверх. Следовательно, изменение скорости «сильнее» влияет на ширину солитона.

На рис.8 отображена зависимость $\Delta \sim \sqrt{m_2}$: линия 1 – качественный вид этой зависимости при фиксированных скорости и жесткости внутренней пружины элемента; линия 2 – тенденция поведения графика зависимости при увеличении скорости и неизменной жесткости; линия 3 – увеличение жесткости на тот же порядок, что была увеличена скорость в предыдущем случае; линия 4 – увеличение обоих параметров. Из кривых 2, 3 и из предположения, что жесткость в сравнении со скоростью гораздо более статичный параметр,

можно сделать вывод, что наиболее значимое влияние на данную зависимость оказывает именно скорость.

Рис.7.

Рис.8.

Качественный вид солитона деформации представлен на рис. 9.

Если скорость стационарной волны удовлетворяет неравенству: $V > c_2 > c_1$, то уравнение (13) имеет периодическое решение, выражающееся через эллиптический синус:

$$U(\xi) = \frac{A}{3s^2} \left(\sqrt{1-s^2+s^4} - 1 - s^2 \right) + A \cdot \text{sn}^2(Q\xi, s) \quad (16)$$

где $A = -\frac{3a}{2b} \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2+s^4}}$, $Q^2 = \frac{a}{4\sqrt{1-s^2+s^4}}$.

Рис. 9.

Рис.10.

Качественный вид периодической волны представлен на рис.10. Зависимости, отображенные на рис.2-4, остаются справедливыми и для этого случая.

Отметим в заключение, что определенные обобщения рассматриваемой модели могут быть получены за счёт учёта соударений внешней и внутренней масс цепочки. Подобные задачи рассматривались в работах [17, 18].

Список литературы

1. Буров В.А., Волошинов В.Г., Дмитриев К.В., Поликарпова Н.В. Акустические волны в метаматериалах, кристаллах и структурах с аномальным преломлением // УФН. - 2011. - Т.181, № 11. - С.1205-1211.
2. Special issue on acoustic metamaterials // J. Acoust. Soc. Am. - 2012. - Vol. 132, No 4, Pt. 2. - P. 2783-2945.
3. Acoustic metamaterials and phononic crystals / Ed. Deymier P.A. - Berlin: Springer-Verlag, 2013. - 378 p.
4. Acoustic metamaterials: negative refraction, imaging, lensing and cloaking / Eds. Craster R.V., Guenneau S. Dordrecht: Springer, 2013. - 323 p.
5. Бобровницкий Ю.И. Эффективные параметры и энергия акустических метаматериалов и сред // Акуст. журн. - 2014. - Т. 60, № 2. - С.137-144.
6. Бобровницкий Ю.И. Модели и общие волновые свойства двумерных акустических метаматериалов и сред // Акуст. журн. - 2015. - Т. 61, № 3. - С.283-294.
7. Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М., Лактионов М.М. Дискретная модель акустических метаматериалов с потерями // Акуст. журн. - 2016. - Т. 62, № 1. - С.3-9.
8. Федотовский В.С. Поперечные волны в дисперсном метаматериале со сферическими включениями // Акуст. журн. - 2015. - Т. 61, № 3. - С.311-316.
9. Li J., Chan C.T. Double-negative acoustic metamaterial // Phys. Rev. - 2004. - E 70. - 055602.
10. Fang N., Xi D., Xu J., Ambati M., Srituravanich W., Sun C., Zhang X. Ultrasonic metamaterials with negative modulus // Nat. Mater. - 2006. - Vol. 5. - P. 452-456.
11. Ding Y., Liu Z., Qiu C., Shi J. Metamaterial with simultaneously negative bulk modulus and mass density // Phys. Rev. Lett. - 2007. - Vol. 99. - 093904.
12. Cheng Y., Xu J.Y., Liu X.J. One-dimensional structured ultrasonic metamaterials with simultaneously negative dynamic density and modulus // Phys. Rev. - 2008. - B 77. - 045134.
13. Chan C.T., Li J., Fung K.H. On extending the concept of double negativity to acoustic waves // JZUS. - 2006. - A 7. - P. 24-28.
14. Huang H.H., Sun C.T., Huang G.L. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials // Int. J. Eng. Sci. - 2009. - Vol. 47. - P.610-617.

15. Kunin I.A. Elastic Media with Microstructure I & II. - Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982–1983.
16. Ерофеев В. И., Кажаяев В.В., Семерикова Н. Т. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация Нелинейность. – М.: Физматлит, 2002. - 208с.
17. Крупенин В.Л. К описанию процессов прохождения нелинейных волн через машинные конструкции, моделируемые посредством сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры (части 1 и 2) // Вестник научно-технического развития. - 2011. - № 6. - С. 26–33; - № 7. - С. 3–16.
18. Крупенин В.Л. Об описании сильно нелинейных вибропроводящих и виброгенерирующих сред // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2016. - № 4. - С. 9-19.

Дата поступления статьи: 9 января 2018 года.