3. Акимов А.А., Агафонова А.А. Решение начально-граничной задачи для нелинейного уравнения балки // В сборнике: Математическое моделирование процессов и систем. Материалы VI Международной научной конференции. 2017. С. 5-7.
4. Акимов А.А., Агафонова А.А. О существовании решения начально-граничной задачи для нелинейного уравнения балки // В сборнике: Современная математика и ее приложения. Материалы Международной научно-практической конференции. Ответственный редактор С.А. Мустафина. 2017. С. 107-109.
5. Сорокина Т.С. История медицины. Академия, Academia; Москва; 2008.
6. Математика в медицине. <https://www.bibliofond.ru/view.aspx?id=536378>

Полякова И.С.

Ограничения в математике: деление на ноль, логарифмы и показательные основания

*Кубанский государственный технологический университет
(Россия, Краснодар)*

doi: 10.18411/trnio-12-2021-129

Аннотация

В статье изучена возможность деления на ноль на множестве совокупных чисел, возможность вычисления показательной функции при отрицательном основании и возможность вычисления логарифма при отрицательном основании и подлогарифмическом выражении. На множестве совокупных чисел возможно, что $\frac{a}{0} = a_s$ и $a_s \cdot 0 = a$, $\frac{a}{a_s} = 0$. На этом множестве действуют все законы вещественных чисел. Также можно определить логарифм и показательное выражение так: $\log_a x = b$; $a^x = c$, где $a \neq 1$. Другие ограничения не нужны. А положительное ограничение на основание оставить только для функций и их графиков, тем самым расширив область вычислений логарифмов и показательных выражений.

Ключевые слова: деление, ноль, ограничение, логарифм, показательная функция, ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность, совокупные числа, комплексные числа, вещественные числа.

Abstract

The article examines the possibility of dividing by zero on a set of aggregate numbers, the possibility of calculating an indicative function with a negative base, and the possibility of calculating a logarithm with a negative base and a sub-logarithmic expression. On a set of aggregate numbers, it is possible that $\frac{a}{0} = a_s$, $a_s \cdot 0 = a$. On this set, all laws of real numbers apply. You can also define the logarithm and the indicative expression as: $\log_a x = b$; $a^x = c$, where $a \neq 1$. No other restrictions are needed. A positive restriction on the basis should be left only for functions and their graphs, thereby expanding the area of calculations of logarithms and indicative expressions.

Keywords: division, zero, constraint, logarithm, indicative function, associativity, commutativity, distribution, aggregate numbers, complex numbers, real numbers.

Все знают основные ограничения в математике – деление на ноль, извлечение корня из отрицательного числа, положительные логарифмические основания и подлогарифмические выражения, положительное основание показательного выражения, деление на ноль в тригонометрии у тангенса и котангенса.

Рассмотрим сначала подробнее деление на ноль. Делить на ноль нельзя, потому что это приводит к логическим ошибкам: если $\frac{a}{0} = x$, тогда $x \cdot 0 = a$, что невозможно на множестве вещественных чисел, потому что для любого x , $x \cdot 0 = 0$. Это парадокс деления на ноль [1, 2, 3, 4].

Допустим, возможно делить на ноль на множестве так называемых «совокупных» чисел. И $\frac{a}{0} = a_s$, где a_s – это некоторое число множества совокупных чисел. Тогда $a_s \cdot 0 = a$, $\frac{a}{a_s} = 0$. То есть каждому числу, кроме нуля, на множестве совокупных чисел ставится в соответствие некоторое число из множества вещественных чисел. Тем самым можно расширить границы математики, обогатив ее числами, которые получаются при делении на ноль.

На множестве совокупных чисел действуют те же самые законы, что и на множестве действительных чисел: сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корня, возведение в степень. Рассмотрим это на примерах:

Пусть $\frac{7}{0} = 7s$ и $\frac{4}{0} = 4s$, при этом $7s \cdot 0 = 7$ и $4s \cdot 0 = 4$, тогда

$$7s + 4s = 11s;$$

$$7s - 4s = 3s;$$

$$7s \cdot 4s = 28s^2;$$

$$7s \div 4s = 1\frac{3}{4}s$$

$$(4s)^2 = 16s^2$$

$$\sqrt{49s^2} = 7s.$$

На этом множестве действуют законы коммутативности, ассоциативности (сочетательности) и дистрибутивности.

$1s$ выполняет роль совокупной единицы. $1s \cdot 7s = 7s$.

Остановимся на нуле на множестве совокупных чисел. Если мы определим $\frac{0}{0} = 0s$.

При этом возможно и на множестве совокупных чисел опять натолкнуться на противоречие деления на 0, от которого мы сейчас так стремимся уйти, тогда $T_1 \cdot 0 = T$, где T – в множестве вещественных чисел. $T_1 \cdot 0 = 0$.

Тогда мы определяем два нуля $0s$ и 0 . при этом $\frac{0}{0} = 0s$.

Рассмотрим это на примере $5s \cdot 0 = 5$, что решает все проблемы деления на ноль, $\frac{5}{0} = 5s$.

Тогда $5s + 0 = 5s$.

Может быть, тогда не определять на множестве совокупных чисел $0s$, как $\frac{0}{0} = 0s$.

Оставить в этом множестве ноль из множества вещественных чисел. Ноль очень абстрактная

величина и отношение $\frac{0}{0}$ может пробегать множество вещественных чисел, поэтому $0s$ лучше не определять, как $\frac{0}{0}$, чтобы не плодить бесконечности и неопределенности. На множестве совокупных чисел определить 0 , как и на всех остальных множествах, а $0s$ – такого понятия не вводить. То есть на всех множествах чисел ноль 0 неизменен, как на множестве целых чисел, так и на множестве совокупных. В данном множестве ноль переопределять не нужно, да и ошибочно.

Таким образом, ноль остается нулем и переопределять его не надо в любом множестве, а отношение $\frac{0}{0}$ может пробегать множество вещественных чисел.

Рассмотрим применение теории множества совокупных чисел применительно к тригонометрии.

Если мы делим на ноль, то попадаем во множество совокупных чисел. $\operatorname{tg}(x) = \sin(x)/\cos(x)$, если $\cos(x)=0$, то на множестве совокупных чисел получим $\sin(x)/0 = \sin_s(x)$. Значит, можно утверждать, что $\operatorname{tg}(x) = \sin_s(x)$, при $\cos(x)=0$.

Тогда если $\sin(x)=0$, то $\operatorname{ctg}(x) = \cos(x)/\sin(x)$, $\cos(x)/0 = \cos_s(x)$. Значит, в данном случае $\operatorname{ctg}(x) = \cos_s(x)$ при $\sin(x)=0$.

Также, как, например, 1 в любой степени является 1 , где x пробегает множество совокупных чисел, то есть $1^x = 1, \forall x$.

При вычислениях хотелось бы избегать бесконечности, порождающей неопределенность вычислений.

2. По определению $\log_a x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, основание логарифма и подлогарифмическое выражение должны быть положительными, основание логарифма также не должно равняться единице. Вспомним показательную выражение a^x , на него также наложено ограничение $a > 0$. Данное ограничение накладывают, потому что функция вида $y = a^x$ при отрицательном основании будет кусочной: положительной при x – четных, и отрицательной при x – нечетных. Мы же можем возводить отрицательные числа в степени. Но применять такие уравнения вида $a^x = b$ принято только на множестве положительных чисел.

Если логарифм – это степень, в которую возводят числа, то в степень можно возводить как отрицательные, так и положительные числа, ведь возможны и случаи, когда $\log_{-2}(-8)=3$, потому что $(-2)^3 = -8$. Основание и подлогарифмическое выражение не обязательно должны быть положительными.

Логарифм не определяют с отрицательным основанием и подлогарифмическим выражением, потому что тогда функция вида $y = \log_a x$ также будет кусочной. Но ведь можно определить только функцию при $a > 0$ и $x > 0$. А для вычисления логарифма оставить только ограничение $a \neq 1$.

Та же проблем с показательными уравнениями. Ограничения $a > 0$ резко сужается применимость таких уравнений, хотя возводить в степень можно и отрицательные числа. Это ограничение введено как раз, чтобы показательная функция не была кусочной. Но данное ограничение можно применить только к графику функции. Сказать, что функция определена

для $a > 0$. Тем самым, расширив область применения уравнений вида $a^x = b$ и для целочисленных оснований.

Значит, можно определять и вычислять логарифм при логарифмическом основании и подлогарифмическом выражении меньше нуля. Значит, можно определить логарифм и показательное выражение так: $\log_a x = b$; $a^x = c$, где $a \neq 1$. Другие ограничения не нужны.

1. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. – М.: АСТ, 2006. – 509 с.
2. Глазков Ю. А., Варшавский И. К., Гаиашвили М. Я. Комплексные числа. 9–11 классы. – М.: Экзамен, 2012. – 157 с.
3. Евграфов М. А. Аналитические функции. – 2-е изд., перераб. и дополн. – М.: Наука, 1968. – 472 с.
4. Кириллов А. А. Что такое число?. – М., 1993. – 80 с.