РАЗДЕЛ IX. МАШИНОСТРОЕНИЕ

Горбатовский А.А.

Потеря устойчивости вращающегося диска при нагреве по наружному контуру

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана
(Россия, Москва)

doi: 10.18411/trnio-10-2021-58

Аннотация

В статье представлены результаты исследования устойчивости вращающегося диска, который нагревается по наружному контуру. Найдено стационарное температурное поле диска, и получены критические зависимости скорости вращения от температуры, при которых возникают новые формы равновесия.

Ключевые слова: критическая нагрузка, формы равновесия, вращающийся диск.

Abstract

The paper present the decision of problem stability revolving thin disk, which heat in external contour. Recived decision the critical temperature external contour as function rotation disk.

Keywords: critical load, forms of equilibrium, rotating disk.

Вопрос об устойчивости вращающихся дисков возникает при изучении коробления дисковых пил, которые работают при больших скоростях вращения и значительного нагрева на внешнем зубчатом контуре, возникающего при распиловке брёвен. В этом случае, задача исследования коробления дисковых пил становится актуальной.

Целью настоящего исследования является определение температуры наружного контура диска, при котором возможна потеря устойчивости плоской формы его равновесия. Поскольку напряжения, возникающие в диске при работе, зависят от центробежных сил и температуры нагрева наружного контура, то первой частью исследования была задача определения поля температур в диске при его нагреве по наружному контуру.

Определение поля температур диска.

Считается, что диск имеет постоянную толщину и известна температура нагрева наружного контура T_0 . Боковая поверхность охлаждается окружающим воздухом. Температурное поле считается стационарным. Коэффициент теплоотдачи a известен, рис.1.

Рисунок 1. Система координат для расчёта поля температур

Стационарное температурное поле диска является функцией радиуса r ($0 \leq r \leq R$) и толщины h ($0 \leq z \leq h/2$). Дифференциальное уравнение, описывающее распределение температур в полярной системе координат, имеет вид [1]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

Решение разыскиваем по методу Фурье разделением переменных:

$$T(r, z) = E(r)F(z)$$

где: $E(r)$ – функция, зависящая только от r ,

$F(z)$ – функция, зависящая только от z .

Подстановка $T(r, z)$ в дифференциальное уравнение (1) позволяет получить два дифференциальных уравнения для определения функций $E(r)$ и $F(z)$:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} - k^2 E = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + k^2 F = 0 \quad (3)$$

где k – некоторая постоянная.

Дифференциальное уравнение (2) представляет собой модифицированное уравнение Бесселя, решение которого имеет вид:

$$E(r) = C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr)$$

где: $I_0(kr)$ и $K_0(kr)$ функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка.

Общее решение дифференциального уравнения (3) имеет вид:

$$F(z) = C_3 \sin(kz) + C_4 \cos(kz);$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения теплопроводности имеет вид:

$$T = (C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr))(C_3 \sin(kz) + C_4 \cos(kz))$$

Выполнив замену переменных: $\vartheta = T - T_0$, сформулируем граничные условия:

$$z = 0 \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0,$$

$$z = \frac{h}{2} \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = -\frac{a\vartheta}{\lambda}$$

$$r = 0 \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = 0$$

$$r = R \quad \vartheta = T_e - T_0 = \vartheta^*$$

где: T_0 – температура окружающей среды у боковой поверхности диска,

a – коэффициент теплоотдачи,

λ – коэффициент теплопроводности диска.

$\vartheta^* = T_e - T_0$ – температура внешнего радиуса диска.

Первое условие следует из симметрии поля температур относительно срединной поверхности пластины, а второе – условие теплоотдачи на боковой поверхности.

Третье условие выражает осевую симметрию температурного поля.

Используя граничные условия, находим: $C_3 = 0$.

Поскольку температура на оси пластины должна быть конечной, то решение $E(r) = C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr)$ не должно содержать функцию K_0 , которая стремится к бесконечности при $r \rightarrow 0$.

Поэтому $C_2 = 0$. Тогда общее решение можно представить в виде:

$$\mathcal{G} = CI_0(kr) \cos(kz).$$

Используя граничное условие (условие теплоотдачи на боковой поверхности):

$$\left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} \right|_{z=\frac{h}{2}} = -\frac{a}{\lambda} \mathcal{G} \Big|_{z=\frac{h}{2}};$$

Приходим к трансцендентному уравнению:

$$n = Bi^* \operatorname{ctg}(n), \quad (4)$$

где обозначено:

$$n = k \frac{h}{2},$$

$$Bi = \frac{ah}{2\lambda} \text{ - критерий Био.}$$

Из решения трансцендентного уравнения находим собственные числа задачи.

Окончательно, решение тепловой задачи для средней (по толщине) температуры диска имеет вид:

$$\theta = \frac{2 \sin n_1}{(n_1 + \sin n_1 \cos n_1)} \exp \left(2n_1 \frac{R}{h} \left(\frac{r}{R} - 1 \right) \right) \sqrt{\frac{R}{r}} \quad (5)$$

n_1 – наименьшее значение числа n , найденного из трансцендентного уравнения (4), поскольку решениями для более высоких чисел n , можно пренебречь. Значение n_1 принимает значения от 0 (для $Bi \rightarrow 0$) до $\pi/2$ (для $Bi \rightarrow \infty$).

В формуле (5) функции Бесселя аппроксимированы экспонентой, поскольку при больших значениях аргумента, который зависит от отношения R/h , вычислить значения этих функций невозможно [2].

Исследование устойчивости вращающегося диска

Начальные усилия в срединной поверхности диска постоянной толщины определяются по следующим формулам [3]:

Радиальные усилия

$$T_1 = Eh \left[t(1) - \left(\frac{R}{r} \right)^2 t \left(\frac{r}{R} \right) \right] + R^2 \frac{3+\nu}{8} \rho h \omega^2 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right);$$

Окружные усилия

$$T_2 = Eh \left[t(1) + \left(\frac{R}{r} \right) t \left(\frac{r}{R} \right) - \alpha \theta \left(\frac{r}{R} \right) \right] + R^2 \rho h \omega^2 \left[\frac{3+\nu}{8} - \frac{1+3\nu}{8} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

$$\text{где: } t \left(\frac{r}{R} \right) = \int \alpha \frac{r}{R} \theta \left(\frac{r}{R} \right) d \left(\frac{r}{R} \right)$$

α – коэффициент линейного расширения материала диска,

ν – коэффициент Пуассона материала диска,

E – модуль упругости,

ρ – плотность материала диска.

Дифференциальное уравнение устойчивости для диска в полярной системе координат имеет вид [4]:

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - T_1^0 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - T_2^0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = 0$$

В это уравнение входят только чётные производные по углу φ , поэтому решение данного уравнения можно найти в виде ряда:

$$w(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(r) \cos(n\varphi) \quad (5)$$

где: $w_n(r)$ – функции координаты r .

Подставляя это выражение в уравнение устойчивости, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2 w_n}{r^2} \right) - T_1^0 \frac{d^2 w_n}{dr^2} - T_2^0 \left(\frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2 w_n}{r^2} \right) = 0$$

$$n = 0, 1, 2 \dots$$

Решения этих уравнений, удовлетворяющих заданным граничным условиям, дают собственные значения. Наименьшее из собственных значений параметра нагрузки является критическим.

Граничные условия, которым должны удовлетворять решения дифференциальных уравнений имеют вид:

$$\begin{array}{lll} r=0 & w=0 & \frac{dw}{dr}=0 \\ r=R & M_1=0 & Q_1^*=0 \end{array}$$

где: M_1 – радиальный момент,

Q_1^* – поперечная радиальная приведённая сила [5].

Выражение для радиального момента M_1 после подстановки решения (5) приобретает вид:

$$\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{\nu n^2}{r^2} w_n = 0$$

Для приведённой поперечной силы Q_1^* используя разложение вида (5) получим:

$$Q_1^* = Q_1 + D(1-\nu) \frac{n^2}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{w_n}{r} \right)$$

$$Q_1 = -\frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right)$$

где:

Окончательно, второе граничное условие имеет вид:

$$\frac{d^3 w_n}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w_n}{dr^2} - \left[\frac{1+(2-\nu)n^2}{r^2} \right] \frac{dw_n}{dr} + \frac{(3-\nu)n^2}{r^3} w_n = 0$$

Переходя к безразмерной форме, получим следующее уравнение:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{2}{x} \frac{d^3 y}{dx^3} - \left[\frac{2n^2+1}{x^2} + \frac{T_r^0 R^2}{D} \right] \frac{d^2 y}{dx^2} + \left[\frac{2n^2+1}{x^3} - \frac{T_\phi^0 R^2}{Dx} \right] \frac{dy}{dx} + \left[\frac{n^4-4n^2}{x^4} + \frac{n^2 T_\phi^0 R^2}{Dx^2} \right] y = 0$$

$$x = \frac{1}{R} r \quad y = \frac{1}{R} w_n$$

Где обозначено:

Граничные условия в безразмерной форме имеют вид:

$$\begin{array}{lll} x=0 & y=0 & \frac{dy}{dx}=0 \end{array}$$

$$x=1 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \nu \frac{dy}{dx} - \nu n^2 y = 0 \quad \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} - \left[1 + (2-\nu)n^2 \right] \frac{dy}{dx} + (3-\nu)n^2 y = 0$$

Далее, используя метод начальных параметров, находятся зависимости температуры диска на внешнем краю в зависимости от скорости вращения диска при которых возможны ненулевые решения дифференциального уравнения при заданных граничных условиях.

Для примера, были рассчитаны критические зависимости температуры диска от его скорости вращения для конкретного случая:

$R=250$ мм – радиус диска,

$h=2,5$ мм – толщина диска,

$\alpha=500$ Вт/м²К – коэффициент теплоотдачи,

$\lambda=50$ Вт/м К – коэффициент теплопроводности материала диска,

$\alpha=12 \cdot 10^{-6}$ 1/°К – коэффициент линейного расширения материала диска.

Графики критических температур, в зависимости от скорости вращения, приведены на рис.2.

Рисунок 2. Графики критических температур, в зависимости от скорости вращения диска

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
2. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – Долгопрудный: Интеллект, 2007. – 247с.
3. Биргер И.А., Демьянушко И.В. Расчёт вращающихся дисков. – М.: Машиностроение, 1999. – 385с.
4. Алфутов Н.А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1991. – 336с.
5. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. М., «Машиностроение», 1977. – 488с.

Трусова Е.В.

Особенности использования высокопроизводительного оборудования и роботизированных модулей для обработки и контроля поверхности отверстий

*ФГБОУ ВО Курский государственный университет
(Россия, Курск)*

doi: 10.18411/trnio-10-2021-59

Аннотация

В статье описывается современное высокопроизводительное сверлильное оборудование для машиностроительного производства и осуществление проверки качества поверхности отверстий при помощи роботизированных модулей осуществляющих автоматическую проверку.

Ключевые слова: обработка отверстий, металлообработка, станок.

Abstract

The article describes modern high-performance drilling equipment for machine-building production and the implementation of checking the surface quality of holes using robotic modules that carry out automatic testing.

Keywords: hole machining, metalworking, machine tool.

Сегодня невозможно представить многие отрасли народного хозяйства без использования одного из самых распространенных материалов – металла. Его обработка требует использования специального оборудования. Например, если требуется проделать