$$C_2(\alpha, p) \|f\|_{p,1}^\alpha \|f(\cdot) - f(e^{it} \cdot)\|_{p,1}^{1-\alpha} |1 - e^{it}|^\alpha$$

$$|1 - e^{it}| \leq |t|$$

Для достаточно малых t , а величина

$$\|f(\cdot) - f(e^{it} \cdot)\|_{p,1} \rightarrow 0, t \rightarrow 0.$$

Поэтому в рассматриваемом случае, когда $m = 1$, условие (3) выполняется.

Общий случай для m натурального доказывается методом индукции.

Обратное утверждение можно доказывать, пользуясь, например, отношением [2].

$$C\omega(1-rf)_{H_p} \|f(re^{i\varphi}) - f(re^{i\psi})\|_{H_p} \leq C\omega(1-r, f)_{H_p}$$

$0 < r < 1$, где функция $f \in H_p$ (пространства Хорди),

$f(e^{i\varphi})$ -граничная функция, $\omega(1-rf)_{H_p}$, является соответствующим модулем непрерывности.

Теорема доказана.

1. Стороженко Э.А. Об одной теореме Хорди-Литтлвуда // Мат. сб. 1982. Т.119(161). С.564-584.
2. Забуленис А. О дифференциальном операторе в пространствах аналитических функций. Liet. matem. rink., 1984. Т. 24(1).

Полякова И.С.

Ограничения в математике при делении на ноль. Отрицательные основания логарифмов и показательных выражений

*Кубанский государственный технологический университет
(Россия, Краснодар)*

doi: 10.18411/trnio-01-2022-63

Аннотация

В статье изучена возможность делить на ноль на множестве так называемых совокупных чисел, а также возможность вычисления логарифмов и показательных выражений по отрицательному основанию. Можно определить, что $\frac{a}{0} = a_s$, поставив в соответствие каждому числу из R число из S . Также можно вычислять показательные выражения и логарифмы при отрицательном основании, оставив ограничение положительности только для функций.

Ключевые слова: деление, ноль, ограничение, логарифм, показательное выражение, совокупные числа, вещественные числа.

Abstract

The article examines the possibility of dividing by zero on a set of so-called aggregate numbers, as well as the possibility of calculating logarithms and indicative expressions at a negative basis. It can be determined that $\frac{a}{0} = a_s$ by matching each number from R with a number from S . It is also possible to calculate indicative expressions and logarithms at a negative base, leaving the positive constraint only for functions.

Keywords: division, zero, constraint, logarithm, indicative expression, aggregate numbers, real numbers.

В математике существуют определенные ограничения: нельзя делить на ноль, нельзя считать логарифмы и показательные выражения по отрицательному основанию, вычислять тангенс и котангенс соответственно при косинусе и синусе равным нулю.

Остановимся подробнее на делении на ноль: мы знаем, что делить на ноль нельзя, потому что при этом возможны логические ошибки: если $\frac{c}{0} = x$, тогда $x \cdot 0 = c$, что противоречит $x \cdot 0 = 0$ [1, 2].

Пусть возможно деление на ноль на множестве так называемых «совокупных чисел» S и $\frac{a}{0} = a_s$, где a_s – некоторое число из множества S . Тогда $a_s \cdot 0 = a$ и $\frac{a}{a_s} = 0$. Значит,

каждому числу из множеств вещественных чисел (R) ставится в соответствие некоторое число из множества S . При этом обогатить математику числами, получающимися при делении на нуль.

При этом и на множестве совокупных чисел, и на множестве вещественных 0 неизменен. На множестве вещественных чисел, $\frac{0}{0} = x$, тогда $0 \cdot x = 0$, что выполняется

для любого x , и любое x может быть частным $\frac{0}{0}$. Поэтому на множестве совокупных чисел

частное $\frac{0}{0}$ не надо переопределять как $\frac{0}{0} = 0_s$. Потому что и на множестве совокупных чисел и на множестве вещественных действуют те же самые законы. Ноль на всех множествах неизменен. Множество вещественных чисел является подмножеством совокупных [3, 4].

Отношение $\frac{0}{0}$ порождает бесконечное множество решений.

Необходимо отметить, что на множестве совокупных чисел $T_1 \cdot 0 = T$, где T – в множестве вещественных чисел. Но не $T_1 \cdot 0 = 0$, что привычно, но в данном случае неправильно, ведь $T_1 \cdot 0 = T$. Так как $5s \cdot 0 = 5$, тогда $\frac{5}{0} = 5s$, $\frac{5}{5s} = 0$. При этом $5s + 0 = 5s$. Хотя

$5s \cdot 0 = 5$. А на множестве R : $5 \cdot 0 = 0$, $\frac{0}{0} = \forall x$, то есть неопределенность. $\frac{0}{5} = 0$.

На множестве S выполняются те же самые законы, что и на множестве R : сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корня, возведение в степень. Рассмотрим это на следующих примерах: Представим $1s$ как «пусто». Пусть $\frac{8}{0} = 8s$ и $\frac{3}{0} = 3s$, при этом

$8s \cdot 0 = 8$ и $3s \cdot 0 = 3$, тогда

$8s + 3s = 11s$; Восемь «пусто» плюс три «пусто» равно одиннадцать «пусто».

$8s - 3s = 5s$; Восемь «пусто» минус три «пусто» равно пять «пусто».

$8s \cdot 3s = 24s^2$; Восемь «пусто» умножить на три «пусто» равно двадцать четыре «пусто» в квадрате.

$8s \div 3s = 2\frac{2}{3}$; Восемь «пусто» делить на три «пусто» равно две целых две трети – и

мы возвращаемся в множество вещественных чисел.

$(3s)^2 = 9s^2$ Три «пусто» в квадрате равно девять «пусто» в квадрате.

$\sqrt{49s^2} = 7s$. Корень из сорока девяти «пусто» в квадрате равно семь «пусто».

Возникают вопросы – накапливаются ли s как мера неопределенности, мера пустоты? При делении возвращаемся ли мы в множество вещественных чисел, или s – это просто символ принадлежности к множеству чисел, которое получается при делении на ноль. Если мы интерпретируем s как некоторую «пустоту», то она должна накапливаться и сокращаться. Но это еще темы для дальнейших исследований...

При этом при сложении совокупных и вещественных чисел:

$$\begin{aligned} 7s+4 &= \frac{7}{0} + 4; \\ 7s-4 &= \frac{7}{0} - 4 \\ 7s \cdot 4 &= \frac{7}{0} \cdot 4 = \frac{28}{s} = 28s; \\ 7s \div 4 &= \frac{7}{0} \div 4 = \frac{7}{4 \cdot 0} = \frac{7}{4} s. \\ 5^{2s} &= 5^{\frac{2}{0}} = (5^2)^{\frac{1}{0}} = 25^s. \end{aligned}$$

То есть возможно выполнять математические операции совместно с совокупными числами и вещественными числами. Каждое число можно представить в виде: $x=a + bi + cs$, где a – действительная часть, b – мнимая, c – совокупная.

По сути $s = \frac{1}{0}$, если мы накапливаем «пустоту», то s имеет значение, важно для вычислений, и «пустота» может накапливаться. Тогда:

$$\begin{aligned} 5s+3s &= 8s; \text{ или } \frac{5}{0} + \frac{3}{0} = \frac{8}{0}, \\ 5s-3s &= 2s; \quad \frac{5}{0} - \frac{3}{0} = \frac{2}{0}, \\ 5s \cdot 3s &= 15s^2; \quad \frac{5}{0} \cdot \frac{3}{0} = \frac{15}{0^2}, \\ 5s \div 3s &= 1\frac{2}{3}, \end{aligned}$$

и мы возвращаемся в множество вещественных чисел. Докажем это:

$$\begin{aligned} \frac{5}{0} = 5s, \quad \frac{3}{0} = 3s, \text{ тогда } \frac{5}{0} \div \frac{3}{0} &= \frac{5 \cdot 0}{0 \cdot 3} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} \text{ ч.т.д.} \\ (5s)^2 &= 25s^2, \quad \frac{5}{0} \cdot \frac{5}{0} = \frac{25}{0^2} \\ \sqrt{36s} &= 6\sqrt{s}; \quad \sqrt{\frac{36}{0}} = \frac{6}{\frac{1}{0^2}} = \frac{6}{\sqrt{0}}. \end{aligned}$$

$1s$ выполняет роль совокупной единицы. $1s \cdot 7s = 7s^2$

Но проблема нуля может появиться и во множестве совокупных чисел. Если мы представляем 0 как меру неопределенности, то $\sqrt{0}$ или $0^{\frac{1}{2}}$ - это меньшая мера. Значит, для вычислений на множестве совокупных чисел необходимо считать порядки 0. Тогда

$$\frac{5}{0^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{\sqrt{0}} = 5s^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{s}.$$

0 как мера неопределенности, «пустоты», которую можно накапливать.

Проблемы 0.

$0+0 = 2 \cdot 0$ – «пустота» плюс «пустота» равно две «пустоты».

$0-3 \cdot 0 = -2 \cdot 0$

$0-0 = \phi$ («пустое множество» из теории чисел).

$0 \cdot 0 = 0^2$

$0 : 0 = 1$ или $\frac{0}{0} = x$; в частом случае $\frac{0}{0} = 1$.

Теперь вспомним о проблеме 1:

$$1+1 = 2;$$

$$1-1 = 0;$$

$$1 \cdot 1 = 1^2 = 1$$

$$1 : 1 = 1$$

$$1 + \sqrt{1} = 2$$

$$1 \cdot \sqrt{1} = 1^{\frac{3}{2}}$$

$$1^{\infty} = 1$$

1 в любой степени является 1, то есть $1^x = 1, \forall x$. где x пробегает множество совокупных чисел.

На множестве совокупных чисел можно также определить многочлены и выполняются правила работы с многочленами. $\frac{x}{0} = xs$ $\frac{y}{0} = ys$.

$$xs+ys=(x+y)s \text{ или } \frac{x}{0} + \frac{y}{0} = \frac{x+y}{0}$$

$$\frac{x}{0} - \frac{y}{0} = \frac{x-y}{0}$$

$$\frac{x}{0} \cdot \frac{y}{0} = \frac{x \cdot y}{0^2} = xys^2$$

$$\frac{x}{0} \div \frac{y}{0} = \frac{x \cdot 0}{0 \cdot y} = \frac{x}{y}$$

$$\left(\frac{x}{0}\right)^2 = \frac{x^2}{0^2} = x^2s^2$$

$$\sqrt{\frac{-4}{0}} = \frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{0}} = \sqrt{-4s} = 2i\sqrt{s}.$$

Рассмотрим применение теории деления на ноль применительно к тригонометрии. Мы знаем, что $\operatorname{tg}(x) = \sin(x)/\cos(x)$, если $\cos(x)=0$, $x=90^\circ$, то на множестве совокупных чисел получим $\operatorname{tg} 90^\circ = \sin(90^\circ)/0 = \sin_s(90^\circ) = 1s$. Значит, $\operatorname{tg} 90^\circ = \sin_s 90^\circ = 1s$.

Тогда если $\sin(x)=0$, то $\operatorname{ctg} 0^\circ = \cos 0^\circ / \sin 0^\circ = 1/0 = 1s$. Значит, в данном случае $\operatorname{ctg} 0^\circ = \cos_s 0^\circ = 1s$.

Угол переопределять не надо. Рассмотрим это численно. Котангенсу нуля градусов мы ставим в соответствие косинус нуля градусов на множестве совокупных чисел, а тангенсу девяносто градусов соответственно синус девяносто градусов.

При вычислениях хотелось бы избегать бесконечностей, порождающих неопределенность вычислений.

2. По определению $\log_a x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, и a^x , где $a > 0$. То есть основание и подлогарифмическое выражение логарифма, как и основание показательного выражения должны быть положительными. Ограничение на положительность оснований накладывают из-за необходимости непрерывности логарифмической и показательной функций. Но функции можно рассматривать при положительных основаниях, а вычисления проводить и для отрицательных чисел, расширив область применения логарифмических и показательных оснований до вещественных оснований. Для основания логарифма оставить только ограничение $a \neq 1$. Так как возведение в степень – это многократное умножение, $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$, а мы можем многократно умножать отрицательные числа, то и возводить в степень отрицательные числа возможно.

В математике возведение в степень связано с большими противоречиями. Например,

рассмотрим выражения $\sqrt[3]{-27}$ и $(-27)^{\frac{1}{3}}$. Первое выражение равно $\sqrt[3]{-27} = -3$, а второе выражение $(-27)^{\frac{1}{3}}$ не имеет смысла. Но эти выражения по сути одинаковые

согласно формуле: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Но решения первого выражения существуют, а решения второго согласно теории показательных выражений нет. Расширение области применения показательных оснований до вещественных, в частности отрицательных, решит эту проблему.

Рассмотрим решение показательных выражений:

$$\begin{aligned} (-4)^{\frac{1}{2}} &= 2i \text{ или } \sqrt{-4} = 2i \\ (-8)^{\frac{2}{3}} &= ((-8)^{\frac{1}{3}})^2 = (-2)^2 = 4 \text{ или } \sqrt[3]{(-8)^2} = 4. \end{aligned}$$

При возведении числа, по модулю меньшего единицы в положительную степень, число по модулю уменьшается, приближается к 0. Если возводить число по модулю меньшее единицы в отрицательную степень, число увеличивается, при увеличении степени приближается к бесконечности.

При возведении числа, по модулю большего единицы в положительную степень, число по модулю число увеличивается, при увеличении степени приближается к бесконечности. Если возводить число по модулю большего единицы в отрицательную степень, число уменьшается, приближается к 0. Также возможно, что $\log_{-3}(-27)=3$, потому что $(-3)^3 = -27$. Основание и подлогарифмическое выражение не обязательно должны быть положительными.

Рассмотрим $\log_a x = b$. Если $a > 0$, то и $x > 0$. Если $a < 0$, то знак x не определен, $x > 0$ при b четных, $x < 0$ при b нечетных.

$$a^x = c.$$

Если $a > 0$, то и $c > 0$. Если $a < 0$, то знак c не определен, $c > 0$ при x четных, $c < 0$ при x нечетных.

Значит, можно определять и вычислять логарифмы и показательные выражения при основании меньше нуля. Тогда можно определить логарифм и показательное выражение так:

$\log_a x = b$; $a^x = c$, где $a \neq 1$. Без других ограничений.

1. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. – М.: АСТ, 2006. – 509 с.
2. Евграфов М. А. Аналитические функции. – 2-е изд., перераб. и дополн. – М.: Наука, 1968. – 472 с.
3. Полякова И.С. Деление на ноль на множестве совокупных чисел. Сборник трудов: XXIX Международная научно-практическая конференция «Наука России: Цели и задачи». – Екатеринбург, 2021, ч.1, С.41-44.
4. Полякова И.С. Ограничения в математике: деление на ноль, логарифмы и показательные основания // Тенденции развития науки и образования, №80, Самара, 2021.