Гацаева Р.С.-А.

Соприкосновение плоских кривых

ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет имени А.А. Кадырова»
(Россия, Грозный)

doi: 10.18411/trnio-01-2022-61

Аннотация

В статье исследуется расположение кривых, выделив таким образом те или иные особенности кривой в отдельных их замечательных точках.

Ключевые слова: функция; параметрическое изображение; соприкосновение кривых; кривая.

Abstract

The article examines the location of curves or surfaces, thus highlighting certain features of a curve or surface at some of their remarkable points.

Keywords: function; parametric image; contact of curves; curve.

Соприкосновение кривых в общей точке. Пусть даны две линии своими уравнениями $y = y(x), Y = Y(x)$ (1) и предположим, что они имеют общую точку, т.е. для некоторого значения абсциссы этих линий равны между собой $y(x) = Y(x)$ (2). Сравним ординаты обеих линий для некоторого наращенного значения абсциссы $x+h$. С этой целью разложим функции (1) для значения аргумента $x+h$ по формуле Тейлора: $y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''(x) + \dots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} y^{(n)}(x) + \dots$, $Y(x+h) = Y(x) + hY'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} Y''(x) + \dots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} Y^{(n)}(x) + \dots$, откуда

$$PP' = Y(x+h) - y(x+h) = \frac{h}{1} [Y'(x) - y'(x)] + \frac{h^2}{1 \cdot 2} [Y''(x) - y''(x)] + \dots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} [Y^{(n)}(x) - y^{(n)}(x)] \quad (3)$$

Из равенства (3) заключаем, что, вообще говоря, разность ординат наших линий в точке, близких к общей их точке и имеющих одинаковую абсциссу $x+h$, будет 1-го порядка малости относительно h . Пусть теперь для точки M имеет место соотношение $Y'(x) = y'(x)$ (4) это указывает на то, что в данной точке кривые имеют общую касательную (кривые касаются в обычном смысле слова). Разность ординат (3) будет уже 2-го порядка малости относительно h . Касание кривых в этом случае мы назовем соприкосновением 1-го порядка. В том случае, когда для выбранной общей точки данных двух линий выполняются сверх условия (2) еще и условия

$$Y'(x) = y'(x), \quad Y''(x) = y''(x), \quad Y^n(x) = y^n(x), \quad Y^{(n+1)}(x) \neq y^{(n+1)}(x) \quad (5)$$

Рисунок 1.

Т. е., когда разность ординат кривых в точках, близких к их общей точке, будет порядка $(n+1)$, мы скажем, что две данные линии в их общей точке имеют соприкосновение порядка n . Итак, для двух кривых, данных своими уравнениями в форме (1), условие

соприкосновение порядка n состоит из соблюдения $(n+1)$ равенств (2) и (5) и $(n+2)$ -го условия в виде неравенства. Формула (3) для рассматриваемого случая имеет вид $PP' = \frac{h^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} [Y^{(n+1)}(x) - y^{(n+1)}(x)] + \dots$. Заметим, что если число n нечетное, то знак PP' вблизи точки M такой же, как и у разности $Y^{(n+1)}(x) - y^{(n+1)}(x) = u_{n+1}$, независимо от знака h ; в этом случае кривые, касаясь, объемлют одна другую (рис. 2а и 2б).

Рисунок 2а.

Рисунок 2б.

Если же n - число четное, то знак PP' вблизи точки M при $h > 0$ такой же, как и знак разности u_{n+1} , но он меняется при перемене знака у приращения h ; кривые, касаясь между собой, в то же время переходят одна через другую (Рис 2а. и 2б).

Порядок соприкосновения не зависит от расположения координатных осей, потому что при изменении направлений осей и переноса начала координаты и производные координаты одной кривой преобразуются линейно так же, как координаты и производные ординаты другой кривой (если те и другие остаются конечными). Пусть одна линия определяется уравнением $F(x, y) = 0$, (6)

Другая $x = x(t)$, $y = y(t)$; (7) они будут иметь общую точку, если для некоторого t удовлетворяется условие $F(x(t), y(t)) = 0$. В дальнейшем мы должны использовать условия (5); эти последние, если предположить, что обе кривые заданы параметрическими уравнениями, могут быть написаны в виде $\frac{Y'}{X'} = \frac{y'}{x'}$, $\frac{X'Y'' - X''Y'}{X'^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^2}$. Так как в нашем случае первая кривая определяется уравнением (6), то, имея в виду перевести ее на параметрическое изображение.

Рисунок 3а.

Рисунок 3б.

Мы можем предположить, что абсцисса X какой-либо ее точки изображается функцией $x(t)$, именно той, которая входит в параметрическое изображение второй кривой. Тогда при $X(t)=x(t)$ условия (5) примут вид $Y'(t) = y'(t)$, $Y''(t) = y''(t)$, ..., где $y(t)$ – ордината второй кривой, а $Y(t)$ – та функция, которая определяется из уравнения (6) при $x=x(t)$. Отсюда мы убеждаемся, что при некотором значении параметра t должно иметь место не только соотношение (2), но и все те, которые получаются его дифференцированием по t , если только x , y , x' , y' , x'' , y'' , ... мы заменяем их выражениями по формулам (7). Итак, к условию $F(x(t), y(t)) = 0$ присоединяются условия $\frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} x'^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} x' y' +$

$y^{(p)}(x_0) = Y^{(p)}(x_0, c_1, c_2, \dots, c_p)$. Это уравнение и уравнения системы (10) определяют параметры $c_1, c_2, c_3, \dots, c_p$ и абсциссу x_0 , т.е. определяют точку кривой (1), в которой имеется соприкосновение уже порядка p . Для кривой (1) прикосновение порядка p с одной из линий семейства (9) возможно лишь в исключительных точках первой кривой. Рассмотрим в качестве примера семейство прямых на плоскости. Уравнение этого семейства можно записать в виде $Y = c_1x + c_2$. Возьмем теперь кривую $y=f(x)$. На основании сказанного выше заключаем, что в произвольно заданной точке данной кривой возможно касание 1-го порядка с прямой. Действительно, для этого необходимо соблюдение двух условий: $f(x_0) = (c_1x_0 + c_2)$, $f'(x_0) = c_1$, откуда находим c_1 и c_2 : $c_1 = f'(x_0)$, $c_2 = f(x_0) - x_0f'(x_0)$, и уравнение искомой прямой примет вид $Y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0f'(x_0)$, или, полагая $f(x_0) = y_0$ и $f'(x_0) = y'_0$, получим $Y - y_0 = y'_0(x - x_0)$, т.е. касательную в точке (x_0, y_0) к данной кривой $y=f(x)$. Для того чтобы касание прямой с кривой было 2-го порядка, необходимо выполнение дополнительного условия $f''(x_0) = 0$, которое характеризует точки перегиба. Итак, в точках перегиба соприкосновение касательной с кривой будет 2-го порядка. Рассмотрим теперь семейство всех окружностей плоскости. Любая окружность плоскости изобразится уравнением $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$; (11) следовательно, рассматриваемое семейство окружностей зависит от трех параметров a, b и r . На основании предыдущего мы скажем, что из числа всех окружностей плоскости можно выбрать окружность, имеющую с данной кривой (7) соприкосновение 2-го порядка в какой-либо произвольно заданной точке кривой. Для этого необходимо выполнение условий

$$\left. \begin{aligned} (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 &= 0, \\ (x_0 - a)x'_0 + (y_0 - b)y'_0 &= 0, \\ (x_0 - a)x''_0 + (y_0 - b)y''_0 + x_0'^2 + y_0'^2 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Эти условия мы получим, дифференцируя левую часть уравнения окружности по t и полагая затем $t = t_0$, определяя отсюда a, b и r , получим

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad a &= x_0 - \frac{x_0'^2 + y_0'^2}{x_0'y_0'' - x_0''y_0'} y_0', \\ 2) \quad b &= y_0 + \frac{x_0'^2 + y_0'^2}{x_0'y_0'' - x_0''y_0'} x_0', \\ 3) \quad r &= \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)^{3/2}}{x_0'y_0'' - x_0''y_0'}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Окружность, имеющая с заданной кривой в какой-либо ее точке $(x_0; y_0)$ соприкосновение 2-го порядка, называется соприкасающейся окружностью кривой для ее точки $(x_0; y_0)$. Мы видим, что для каждой данной точки кривой будет своя соприкасающаяся окружность, координаты центра которой и радиус определяется соотношениями (13). Соприкасающаяся окружность может быть определена так же, как предельное положение окружности, проходящей через три достаточно близкие точки кривой, как это следует из общего замечания, сделанного выше относительно соприкосновения 2-го порядка. Если в какой-либо точке $(x_0; y_0)$ данной кривой наряду с условиями (12) выполняется еще условие $(x_0 - a)x_0''' + (y_0 - b)y_0''' + 3(x_0'x_0'' + y_0'y_0'') = 0$, (14) то окружность, координаты центра и радиус которой определяется соотношениями (13), равносильными условиям (12), будет в этой точке иметь с кривой соприкосновение 3-го порядка. Исключив из уравнений (13) и (14) координаты центра a и b , получим $-\frac{(x_0'^2 + y_0'^2)(x_0'y_0''' - x_0'''y_0')}{x_0'y_0'' - x_0''y_0'} + 3(x_0'x_0'' + y_0'y_0'') = 0$, или $-(x_0'^2 + y_0'^2)(x_0'y_0''' - x_0'''y_0') + 3(x_0'x_0'' + y_0'y_0'')(x_0'y_0'' - x_0''y_0') = 0$; (15) по значению t_0 (одному или нескольким), удовлетворяющему этому уравнению, мы найдем такую точку $(x_0; y_0)$, в которой соприкасающаяся окружность и кривая будут иметь касание 3-го порядка. Поскольку наши выводы относятся к произвольно заданной точке $(x; y)$ кривой (7), удобнее формулы (13), определяющие координаты центра и радиус соприкасающейся окружности, писать просто в виде

$$\left. \begin{aligned} a &= x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} y', \\ b &= y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} x', \\ r &= \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

В этом случае правые части этих соотношений будут функциями параметра t . Если хотим найти такое значение t , для которого радиус соприкасающейся окружности будет наибольшим или наименьшим, то мы должны приравнять нулю производную $\frac{dr}{dt}$. Нетрудно проверить, что это последнее условие будет тождественно с условием (15); вот почему иногда говорят, что соприкасающаяся окружность имеет с кривой соприкосновение 3-го порядка в тех точках, где радиус соприкасающейся окружности имеет наибольшее или наименьшее значение. Если кривая дается своим уравнением вида $y=y(x)$, (1) то для точки с абсциссой x координаты центра и радиус соприкасающейся окружности определяется по формулам $a = x - \frac{1+y'^2}{y''} y'$, $b = y + \frac{1+y'^2}{y''}$, $r = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$. (13) Радиус соприкасающейся окружности обращается в бесконечность, если при параметрическом изображении кривой в исследуемой точке выполняется условие $x'y'' - x''y' = 0$, или при задании ее уравнением (11) $y'' = 0$, т.е. в точках перегиба, в этом случае соприкасающаяся окружность обращается в соприкасающуюся прямую (т.е. в прямую, имеющую с кривой соприкосновение 2-го порядка). x

1. Энциклопедия электронной математики. Том 1, арифметика, М.2007 г.
2. Бюшгенс С.С. Дифференциальная геометрия – М.:Наука, 2008 г.
3. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия – М.:Наука, 2009 г.

Гацаева Р.С.-А.

Характеристика интегральных пространств Блоха в терминах разности высшего порядка

*ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет имени А.А. Кадырова»
(Россия, Грозный)*

doi: 10.18411/trnio-01-2022-62

Аннотация

В статье доказывается теорема о функции $f \in \alpha_{\rho,1}$, $1 \leq \rho < \infty$, необходимое и достаточное условие.

Ключевые слова: свертка, оператор, несобственный интеграл, функция, интегродифференциальный оператор.

Abstract

The article proves a theorem on the function $f \in \alpha_{\rho,1}$, $1 \leq \rho < \infty$, a necessary and sufficient condition.

Keywords: convolution, operator, improper integral, function, integro-differential operator.

Любая функция $f(z)$ аналитическая в единичном круге V представима в виде свертки

$$f(z) = \int f(\zeta) I(\bar{\zeta}) d(\zeta), \text{ где } I(z) = \frac{1}{\pi(1-z)^2} \text{ (ядро Коши),}$$

а интеграл понимается как несобственный.