или $T_4: (x, y) \mapsto (kx, ky)$. Очевидно, что при $k > 0$ точка M и ее образ M' лежат по одну сторону от центра гомотетии, а при $k < 0$ по разные стороны от него. Центр гомотетии является неподвижной точкой. Если $k \neq 1$, то других неподвижных точек нет. Если $k = 1$, то все точки плоскости неподвижны. Неподвижными прямыми гомотетии являются все прямые, проходящие через центр гомотетии. Частный случай гомотетии, получающийся при $k = -1$, называется центральной симметрией. Образом каждой точки M при каком преобразовании является точка M' , симметричная ей относительно центра гомотетии, который в этом случае называется центром симметрии. Если точка M_0 совпадает с началом координат, центральная симметрия записывается в виде: $T_5: (x, y) \mapsto (-x, -y)$.

1. Энциклопедия электронной математики. Том 1, арифметика, М.2007 г.
2. Бюшгенс С.С. Дифференциальная геометрия – М.:Наука, 2008 г.
3. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия – М.:Наука, 2009 г.

Гацаева Р.С.-А.

Семейство кривых. Огибающая

ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет имени А.А. Кадырова»
(Россия, Грозный)

doi: 10.18411/trnio-01-2022-60

Аннотация

В статье рассматриваются кривые, исследование плоской кривой по ее уравнению, соприкосновение плоских кривых и кривизна кривой, пространственные кривые.

Ключевые слова: кривая, координаты, параметры, семейство кривых, плоская кривая.

Abstract

The article deals with curves, the study of a plane curve by its equation, the contact of plane curves and the curvature of a curve, spatial curves.

Keywords: curve, coordinates, parameters, family of curves, flat curve.

Допустим, что уравнение между координатами x и y содержит некоторый параметр a и пишется в виде $F(x, y, a) = 0$; (1) тогда для каждого определенного значения a предыдущее уравнение будет изображать некоторую кривую. Меняя значение a , мы будем получать разные кривые, совокупность которых, как мы скажем, образуют семейство кривых (однопараметрическое); для краткости условимся говорить, что уравнение (1) изображает семейство кривых в том именно смысле, что это уравнение для каждого выбранного значения a будет изображать одну из кривых семейства.

Рассмотрим две близкие кривые семейства, изображаемые соответственно уравнениями $F(x, y, a) = 0$, $F(x, y, a + \Delta a) = 0$; (2) координаты точек пересечения этих двух кривых будут удовлетворять уравнениям, равносильным предыдущим: $F(x, y, a) = 0$, $\frac{F(x, y, a + \Delta a) - F(x, y, a)}{\Delta a} = 0$. Допустим теперь, что $a\Delta$ стремится к нулю, т.е. что вторая из выбранных кривых стремится к совпадению с первой кривой; в таком случае предыдущие уравнения в пределе перейдут в уравнения $F(x, y, a) = 0$, $\frac{\partial F(x, y, a)}{\partial a} = 0$. (3) Те точки кривой семейства (1), координаты которой удовлетворяют этим уравнениям, назовем характеристическими точками этой кривой (1). Если выбранная кривая (a) пересекается всякой сколь угодно близкой к ней кривой ($a + \Delta a$) того же семейства в действительных точках, то мы назовем предельными точками те точки, к которым в пределе стремятся точки пересечения этих близких кривых; если для выбранного a и для всяких значений ($a +$

Δа)уравнения (2) не будут иметь действительных решений для x и y , то уравнения (3) могут не иметь действительных решений для x и y , но могут иногда таковые и иметь; в последнем случае они определяют такие характеристические точки, которые не будут являться в строгом (геометрическом) смысле предельными точками. Итак, на каждой кривой (a) семейства (1) существует свои характеристические точки, именно те, координаты которых определяются уравнениями (18). Рассмотрим семейство прямых, изображаемых уравнением $F \equiv -x \cos a - y \sin a + p = 0$, в котором a будем считать переменным параметром, а p заданным постоянным; это будет, очевидно, семейство прямых, отстоящих от начала координат на расстоянии p и, следовательно, касающихся окружности радиуса p с центром в начале координат. Две близкие прямые семейства будут всегда пересекаться в одной точке; координаты предельной точки для каждой из прямых семейства определяются уравнениями $F \equiv -x \cos a - y \sin a + p = 0, \frac{\partial F}{\partial a} \equiv x \sin a - y \cos a = 0$, откуда $x = p \cos a, y = p \sin a$ т.е. предельной точкой на каждой прямой будет конец перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую. Возьмем теперь семейство линий, изображаемых уравнением $U(x, y) + aV(x, y) = 0$; это будет собственно пучок линий, проходящих через точки пересечения двух основных линий $U=0$ и $V=0$. Поэтому две близкие линии семейства будут пресекаться в тех же точках, что и две основные линии; эти же точки будут и предельными точками для каждой линии семейства; действительно, по нашему общему правилу характеристические точки определяются уравнениями $F \equiv U + aV = 0, \frac{\partial F}{\partial a} \equiv V = 0$, совокупность которых равносильна уравнения $U=0, V=0$; они определяют точки, общие всем кривым пучка, т.е. точки предельные. Наконец, исследуем семейство окружностей, определяемых уравнением в однородных координатах $F \equiv x^2 + y^2 - 2a \cos a xz - 2a \sin a yx = 0$; все эти окружности радиуса a проходят через начало координат, и их центры имеют координаты $a \cos a, a \sin a$. Характеристические точки одной из окружностей семейства найдутся из уравнений $F \equiv x^2 + y^2 - 2a \cos a xz - 2a \sin a yx = 0, \frac{\partial F}{\partial a} \equiv 2a \sin a xz - 2a \cos a yx = 0$. Определяя x, y, z из этих уравнений, мы получим следующие решения: $x^2 + y^2 = 0, z = 0$, т.е. пару циклических точек, через которые проходят вообще окружности плоскости; $x = 0, y = 0$, т.е. начало координат, через которое проходят все окружности данного семейства, и $x = 2a \cos a, y = 2a \sin a$, т.е. предельную точку, соответствующую выбранной окружности семейства и отличную от предыдущих предельных точек (общих им всем). Для каждого заданного значения a уравнения (3) определяют координаты характеристических точек определенной кривой (a) семейства (1); таким образом, исключая a из уравнений (3) (в предположении, что параметр a действительно входит во второе из этих уравнений), мы получим соотношение между x и y вида $D(x, y) = 0$, (4) которое будет уравнением геометрического места всех характеристических точек кривых данного семейства. Уравнение (4), полученное в результате исключения параметра a из соотношений (3), мы будем называть уравнением дискриминантной кривой для данного семейства (1). Уравнение (4) может быть получено, если мы определим a в зависимости от x и y , из условия $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$, (5) и это найденное значение $a(x, y)$ подставим в первое из уравнений (3); таким образом, можно сказать, что дискриминантная кривая изображается уравнением $F(x, y, a(x, y)) = 0$, (6) в котором a является функцией от x и y , найденной из уравнений (5); это замечание позволит нам исследовать дискриминантную кривую. Для какой-нибудь кривой $(a = \text{const})$ семейства (1) направление касательной $\frac{dy}{dx}$ определится из условия $\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$. (7) Чтобы найти направление касательной к дискриминантной кривой в какой-либо ее точке (x, y) , мы должны приравнять нулю полный дифференциал от левой части ее уравнения (19) или, как было указано,

уравнения (6); тогда получим $\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial a} \left(\frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy \right) = 0$; но a есть такая функция от x, y , которая удовлетворяет условию (20), поэтому направление касательной к дискриминантной кривой определится соотношением $\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$, (7') в котором, повторяем, a есть функция от x, y , найденная из уравнения (5). Возьмем теперь какую-нибудь точку $(x_0; y_0)$ на дискриминантной кривой; для этой точки $a(x, y)$ будет иметь некоторое определенное значение $a_0 = a(x_0, y_0)$; значения x_0, y_0, a_0 будут удовлетворять обоим уравнениям (3), но тогда первое из них $F(x_0, y_0, a_0) = 0$ обозначает, что кривая (a_0) семейства (1) проходит через точку (x_0, y_0) . Итак, какая-либо точка (x_0, y_0) дискриминантной кривой принадлежит некоторой кривой (a_0) семейства (1); теперь уравнения (7) и (7') показывают нам, что в этой точке $(x_0; y_0)$ касательная к кривой (a_0) семейства и касательная к дискриминантной кривой имеют одинаковые направления, т.е. совпадают. Таким образом, дискриминантная кривая в точках, общих с кривыми семейства, касается последних; она является, как говорят, огибающей кривых семейства. Однако, предыдущее заключение становится сомнительным, если для рассматриваемых значений x_0, y_0, a_0 выполняются соотношения $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, (8) т.е. выбранная точка является особой точкой для кривой семейства, ибо в последнем случае уравнения (7) и (7') пропадают, и из них мы уже не можем сделать вывод, что касательные к дискриминантной кривой и к кривой семейства совпадают. Нетрудно видеть, что особые (кратные) точки кривых семейства принадлежат дискриминантной кривой. В самом деле, если некоторая точка является особой точкой для каждой из кривых семейства, она будет точкой, общей всем кривым семейства, и тогда дискриминантная кривая должна через нее проходить; если некоторая точка – особая для той или другой из кривых семейства, ее координаты x и y определятся из уравнений (1) и (8) как функции параметра a : $x = x(a)$; $y = y(a)$; эти последние должны тождественно удовлетворять уравнению (1), поэтому $\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{da} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{da} + \frac{\partial F}{\partial a} = 0$; но при условиях (8) отсюда следует, что координаты x и y удовлетворяют также соотношению $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$, т.е. особая точка кривой семейства принадлежит дискриминантной кривой. Будет ли дискриминантная кривая касаться кривой семейства в ее особой точке или нет, этот вопрос может быть решен дальнейшим, более подробным исследованием; для этого придется левые части уравнений (7) и (8) дифференцировать еще раз (или больше) и исследовать, будут ли новые соотношения, полученные из них, определять одинаковые или разные значения для $\frac{dy}{dx}$. Пока этого исследования не сделано, мы вправе ожидать любого из двух возможных случаев, т.е. или того, что дискриминантная кривая касается кривой семейства в ее особой точке, или того, что дискриминантная кривая не касается кривой семейства в ее особой точке. Мы доказали, что геометрическое место предельных точек кривых семейства принадлежит дискриминантной кривой, равным образом и особые (кратные) точки кривых семейства принадлежит дискриминантной кривой; но было бы поспешно последние точки отождествлять с первыми. В зависимости от характера кривых семейства их кратные точки могут быть вместе с тем и их предельными точками, но могут и не быть таковыми.

1. Энциклопедия электронной математики. Том 1, арифметика, М.2007 г.
2. Бюшгенс С.С. Дифференциальная геометрия – М.:Наука, 2008 г.
3. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия – М.:Наука, 2009 г.