Гацаева Р.С.-А.
Преобразования плоскости

*ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет имени А.А. Кадырова»
(Россия, Грозный)*

doi: 10.18411/trnio-01-2022-59

Аннотация

В статье рассматриваются определение и формулы преобразования плоскости. На основании определения формул, отражаются свойства аффинных преобразований плоскости, их доказательства.

Ключевые слова: аффинные преобразования; плоскость; отображение; преобразование; вектор.

Abstract

The article discusses the definition and formulas for transforming a plane. Based on the definition of formulas, the properties of affine transformations of the plane and their proofs are reflected.

Keywords: affine transformations; plane; display; transformation; vector.

Будем рассматривать плоскость как множество своих точек.

Отображение $T: M \rightarrow M' = TM$ этого множества на себя называется преобразованием плоскости, если оно обладает свойством взаимной однозначности. Пусть плоскость отнесена к декартовой системе координат. Тогда преобразование плоскости можно задавать, выражая координаты (x', y') преобразованной точки M' (образа точки M) в виде функций от координат (x, y) исходной точки M (прообраза точки M'):

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

Эти уравнения должны быть однозначно разрешимы относительно x, y .

Неподвижной(или инвариантной) точкой преобразования T называется всякая точка M плоскости, для которой $TM = M$. Если преобразование T задано уравнениями (1), то ее неподвижными точками являются те и только те точки плоскости, координаты которых удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} f(x, y) = x, \\ g(x, y) = y. \end{cases} \quad (2)$$

Линия L на плоскости называется неподвижной (или инвариантной) относительно преобразования T , если $M \in L \Rightarrow TM \in L$.

Пусть линия L задана уравнением $F(x, y) = 0$. (3)

Найдем уравнение ее образа TL при преобразовании T , заданном уравнениями (1). Для этого выразим из (1) x, y через x', y' : $x = p(x', y')$, $y = q(x', y')$ и подставим в (3): $F(p(x', y'), q(x', y')) = 0$. В итоге получаем уравнение относительно x', y' : $\Phi(x', y') = 0$, (4) а штрихи можно убрать. Очевидно, линия L неподвижна при преобразовании T , если уравнения (3) и (4) эквивалентны. Рассмотрим несколько примеров простейших преобразований плоскости.

Пример 1. Пусть $\vec{p}$ – произвольный вектор. Преобразование T_1 , которое переводит всякую точку M плоскости в точку M' такую, что

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{p}, \quad (5)$$

называется параллельным переносом или трансляцией плоскости на вектор $\vec{p}$ (рис.1). Пусть на плоскости дана система координат.

Если $M(x, y)$, $M'(x', y')$ и $\vec{p} = (a, b)$, то из равенства (5) легко получить уравнения преобразования T_1 $\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases}$ Иногда удобно пользоваться такой записью уравнений (6):
 $T_1: (x, y) \mapsto (x + a, y + b).$

Рисунок 1.

Если $\vec{p} \neq \vec{0}$, то очевидно трансляция T_1 не имеет неподвижных точек. Трансляция переводит всякую прямую плоскости в параллельную прямую. Это ясно из геометрического смысла трансляции, но можно доказать и алгебраически. Действительно, если не которая прямая l имеет уравнение

$$Ax + By + C = 0,$$

то ее образ l' при преобразовании (6) определяется уравнением

$$Ax' + By' - (Aa + Bb - C) = 0,$$

т.е. $l \parallel l'$. В частности, если $\vec{p} \parallel l$, т.е.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -B & A \end{vmatrix} = Aa + Bb = 0,$$

то уравнение l' принимает вид $Ax' + By' + C = 0$,

Следовательно, l' совпадает с l . Таким образом, прямая l неподвижна при трансляции, если вектор трансляции $\vec{p}$ параллелен прямой l .

Пример 2. Поворотом или вращением плоскости вокруг точки M_0 на угол θ называется преобразование T_2 , которое переводит каждую точку M в точку M' такую, что $|M_0M| = |M_0M'|$ и $(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'}) = \theta$

Пусть в некотором ортонормированном репере $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ имеем $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$, $M'(x', y')$. Введем обозначения

$$(\vec{i}, \overrightarrow{M_0M}) = \varphi, \quad (\vec{i}, \overrightarrow{M_0M'}) = \varphi'$$

Рисунок 2.

$$\begin{cases} x - x_0 = |M_0M| \cos \varphi, \\ y - y_0 = |M_0M| \sin \varphi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' - x_0 = |M_0M'| \cos \varphi', \\ y' - y_0 = |M_0M'| \sin \varphi'. \end{cases}$$

Но $|M_0M| = |M_0M'|$ и $\varphi' = \varphi + \theta$.

Следовательно,

$$\begin{cases} x' - x_0 = (|M_0M| \cos \varphi) \cos \theta - (|M_0M| \sin \varphi) \sin \theta, \\ y' - y_0 = (|M_0M| \cos \varphi) \sin \theta + (|M_0M| \sin \varphi) \cos \theta, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} x' - x_0 = (x - x_0) \cos \theta - (y - y_0) \sin \theta, \\ y' - y_0 = (x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta - (x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta - x_0) \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta - (x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta - y_0). \end{cases} \quad (7)$$

В частности, если точка M_0 (центр поворота) совпадает с началом координат O , то формулы (7) принимают более простой вид:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta, \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (8)$$

или

$$T_2: (x, y) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

Ясно, что если угол поворота $\theta = 2k\pi$, то $T_2M = M$, т.е. все точки плоскости неподвижны. При $\theta \neq 2k\pi$ единственной неподвижной точкой преобразования T_2 является центр поворота.

Пример 3. Преобразование T_3 , переводящее каждую точку M плоскости в точку M' , симметричную ей относительно фиксированной прямой

l называется симметрией относительно прямой l (рис.3); прямая l называется осью симметрии

Рисунок 3.

Пусть в некотором ортонормированном репере точки M и M' имеют соответственно координаты (x, y) и (x', y') , а прямая l имеет уравнение $Ax + By + C = 0$. Из определения следует, что векторы

$$\overrightarrow{MM'} = (x' - x, y' - y), \vec{v} = (B, -A)$$

Ортогональны, а точка

$$P \left(\frac{x' + x}{2}, \frac{y' + y}{2} \right)$$

лежит на прямой l . Следовательно, $B(x' - x) - A(y' - y) = 0$ и

$$A \frac{x' + x}{2} + B \frac{y' + y}{2} + C = 0$$

Выражая отсюда x', y' , получим:

$$\begin{cases} x' = x - 2A \frac{Ax + By + C}{A^2 + B^2} \\ y' = y - 2B \frac{Ax + By + C}{A^2 + B^2} \end{cases} \quad (9)$$

В частном случае (Рис.4), когда осью симметрии служит одна из координатных осей, например Oy (т. е. $B = C = 0, A = 1$), уравнения (9) сильно упрощаются: $\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y \end{cases}$ (10) или

$$T_3: (x, y) \mapsto (-x, y).$$

Рисунок 4.

Неподвижными точками преобразования T_3 , очевидно, являются те и только те точки плоскости, которые лежат на оси симметрии. неподвижными прямыми являются ось симметрии и любая прямая, ей принадлежащая.

Пример 4. Гомотетией с центром M_0 и коэффициентов $k \neq 0$ называется такое преобразование плоскости, которое каждой точке M ставит в соответствие такую точку M' , что $\overrightarrow{M_0 M'} = k * \overrightarrow{M_0 M}$ (Рис. 5).

Рисунок 5.

Пусть в некотором репере имеем $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$ и $M'(x', y')$. Тогда

$$\begin{cases} x' - x_0 = k(x - x_0), \\ y' - y_0 = k(y - y_0) \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} x' = kx + (1 - k)x_0, \\ y' = ky + (1 - k)y_0. \end{cases} \quad (11)$$

Если начало репера совпадает с центром гомотетии, то $x_0 = y_0 = 0$ и формулы (11) принимают очень простой вид:

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = ky \end{cases} \quad (12)$$

или $T_4: (x, y) \mapsto (kx, ky)$. Очевидно, что при $k > 0$ точка M и ее образ M' лежат по одну сторону от центра гомотетии, а при $k < 0$ по разные стороны от него. Центр гомотетии является неподвижной точкой. Если $k \neq 1$, то других неподвижных точек нет. Если $k = 1$, то все точки плоскости неподвижны. Неподвижными прямыми гомотетии являются все прямые, проходящие через центр гомотетии. Частный случай гомотетии, получающийся при $k = -1$, называется центральной симметрией. Образом каждой точки M при каком преобразовании является точка M' , симметричная ей относительно центра гомотетии, который в этом случае называется центром симметрии. Если точка M_0 совпадает с началом координат, центральная симметрия записывается в виде: $T_5: (x, y) \mapsto (-x, -y)$.

1. Энциклопедия электронной математики. Том 1, арифметика, М.2007 г.
2. Бюшгенс С.С. Дифференциальная геометрия – М.:Наука, 2008 г.
3. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия – М.:Наука, 2009 г.

Гацаева Р.С.-А.

Семейство кривых. Огибающая

ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет имени А.А. Кадырова»
(Россия, Грозный)

doi: 10.18411/trnio-01-2022-60

Аннотация

В статье рассматриваются кривые, исследование плоской кривой по ее уравнению, соприкосновение плоских кривых и кривизна кривой, пространственные кривые.

Ключевые слова: кривая, координаты, параметры, семейство кривых, плоская кривая.

Abstract

The article deals with curves, the study of a plane curve by its equation, the contact of plane curves and the curvature of a curve, spatial curves.

Keywords: curve, coordinates, parameters, family of curves, flat curve.

Допустим, что уравнение между координатами x и y содержит некоторый параметр a и пишется в виде $F(x, y, a) = 0$; (1) тогда для каждого определенного значения a предыдущее уравнение будет изображать некоторую кривую. Меняя значение a , мы будем получать разные кривые, совокупность которых, как мы скажем, образуют семейство кривых (однопараметрическое); для краткости условимся говорить, что уравнение (1) изображает семейство кривых в том именно смысле, что это уравнение для каждого выбранного значения a будет изображать одну из кривых семейства.

Рассмотрим две близкие кривые семейства, изображаемые соответственно уравнениями $F(x, y, a) = 0$, $F(x, y, a + \Delta a) = 0$; (2) координаты точек пересечения этих двух кривых будут удовлетворять уравнениям, равносильным предыдущим: $F(x, y, a) = 0$, $\frac{F(x, y, a + \Delta a) - F(x, y, a)}{\Delta a} = 0$. Допустим теперь, что $a\Delta$ стремится к нулю, т.е. что вторая из выбранных кривых стремится к совпадению с первой кривой; в таком случае предыдущие уравнения в пределе перейдут в уравнения $F(x, y, a) = 0$, $\frac{\partial F(x, y, a)}{\partial a} = 0$. (3) Те точки кривой семейства (1), координаты которой удовлетворяют этим уравнениям, назовем характеристическими точками этой кривой (1). Если выбранная кривая (a) пересекается всякой сколь угодно близкой к ней кривой ($a + \Delta a$) того же семейства в действительных точках, то мы назовем предельными точками те точки, к которым в пределе стремятся точки пересечения этих близких кривых; если для выбранного a и для всяких значений ($a +$