Свойства функций $P(x,t)$ и $Q(x,t)$ полностью определяются свойствами функций $k(x,t,u)$ и $\gamma(u), \lambda(u)$.

Запишем следующие уравнения:

$$V(x) = f(x) + \int_0^x P(x,t)\lambda[v(x)]dt, x > 0, x \in R^n, v = A_1 u + f \quad (6)$$

$$\omega(x) = f(x) + \int_0^x Q(x,t)\lambda[\omega(x)]dt, x > 0, x \in R^n, v = A_2 u + f \quad (7)$$

где $P(x,t)$ и $Q(x,t)$ функции из неравенств (2) и (3), $\gamma(u)$ и $\lambda(u)$ монотонны.

Теорема 2. Пусть $v_0(x)$ и $\omega_0(x)$ нижнее и верхнее решения уравнений (6) и (7) соответственно; функция

$f(x) \in K_+ \subset X (0 \leq t \leq L < \infty, |u| < \delta, |\delta| \leq \infty)$; вектор-функция $k(x, t, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, и по аргументу u принадлежит классу для $A_{\lambda(u)}^{\gamma(u)}$ при всех x почти при всех t . Тогда все решения исходного уравнения (1) один принадлежат конусному отрезку $< v_0, \omega_0 >$

Доказательство.

На основании леммы 1, используя неравенства (2), из исходного уравнения (1) получаем нестрогие интегральные неравенства.

$$u(x) \geq f(x) + \int_0^x P(x,t)\lambda[u(x)]dt, \quad (8)$$

$$u(x) \leq f(x) + Q \int_0^x (x,t)\gamma[u(x)]dt \quad (9)$$

На основании теоремы об интегральных неравенствах из неравенств (8) и (9) получаем, что нижнее решение $v_0(x)$ уравнения (6) с монотонным оператором A_1 , и верхнее решение $\omega_0(x)$ уравнения (7) с монотонным оператором A_2 , являются априорными оценками искомых решений $u(x)$ уравнения (1), удовлетворяют неравенствам $v_0(x) \leq u(x) \leq \omega_0(x)$

и задают конусный отрезок $< v_0, \omega_0 >$ в котором исследуются решения исходного уравнения известными классическими методами.

Замечание 1. Если в теореме 2 вместо класса $A_{\lambda(u)}^{\gamma(u)}$ взять класс $P_{\lambda(u)}^{\gamma(u)}$, то в конусном отрезке $< v_0, \omega_0 >$ функция $v_0(x)$ -любое решение уравнения (6), $\omega_0(x)$ -любое решение уравнения (7).

Нахождение конусного отрезка $< v_0, \omega_0 >$ - один из важных этапов исследования нелинейных интегральных уравнений Вольтера. Чтобы получить оценки решений, тем более явные оценки решений приходится решать интегральные уравнения Вольтера, что не всегда удаётся, даже случае, когда они линейны. Поэтому для нас является важным то, что этот метод дает возможность определить эти оценки через решения более простых уравнений и неравенств, к которым удаётся свести их в случае псевдогогнутой нелинейности типа (A) или (П).

1. Барин Н.К., Стечкин С.Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. Тр. Матем. общ-ва., 1956. Т.5. С. 483- 522.
2. Целюк З.Б. Нелинейные уравнения Вольтера с неубывающим ядром. Изв. вузов. Математика 1995 8(399). С.74- 77.
3. О некоторых многомерных интегральных неравенствах. Дифференц. уравнения 1983. Т.19. 10 С. 1828 -1830.
4. Азбелев Н.В., Цалюк З.Б. Об интегральных неравенствах. 1. Матем. сб. 1962. Т. 56. 3. С.325-342

Гацаева Р.С.-А.

Методы решения алгебраических, нелинейных и трансцендентных уравнений

ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет имени А.А. Кадырова»

(Россия, Грозный)

doi: 10.18411/trnio-01-2022-58

Аннотация

Данная статья посвящена приближенным методам решения различного рода уравнений, теоретическим основам приближенных методов, разработанных для решения алгебраических и трансцендентных уравнений. Часто применяющихся на практике приближенных методов: метод дихотомии, метод простых итераций, метод секущих и метод Ньютона.

Ключевые слова: дихотомия; непрерывные функция итерация, функция.

Abstract

This article is devoted to approximate methods for solving various kinds of equations, theoretical foundations of approximate methods developed for solving algebraic and transcendental equations. Approximate methods that are often used in practice: the dichotomy method, the simple iteration method, the secant method and the Newton method.

Keywords: dichotomy; continuous function iteration, function.

Решение алгебраических, нелинейных и трансцендентных уравнений. Метод половинного деления (дихотомия).

Задана непрерывная функция $f(x)$ и нам требуется найти всё или некоторые корни данного уравнения $f(x) = 0$. (1) Чтобы решить эту задачу нам нужно решить несколько задач. Например, начнем с исследования количества, характера и расположения корней. Во-вторых, мы должны найти приближенные значения корней. В-третьих, мы выбираем из них корни и вычисляем их с точностью, которая требуется от нас. Мы решим графическим и аналитическим методами первую и вторую задачу. Если мы ищем действительные корни уравнения, то нам нужно составить таблицу значений $f(x)$. Если в двух соседних узлах таблицы функция имеет разные знаки, то тогда между этими узлами лежит нечётное число корней уравнения (по меньшей мере, один). Если узлы близки, то корень между ними будет только один. По таблице выявить корни чётной кратности очень сложно. И по таблице можно построить график данной функции $y = f(x)$ и графически мы можем найти точки его пересечения с осью абсцисс. Этот способ нам даёт весьма неплохие приближенные значения корней, наглядный способ. Во многих задачах техники такая точность уже достаточна. Графические методы популярны в технике решения уравнений (так называемые, номография). Построение графика позволяет нам выявить корни чётной кратности. Мы иногда заменяем уравнение (1) эквивалентным ему уравнением $\varphi(x) = \psi(x)$, в котором функции $y_1 = \varphi(x)$ и $y_2 = \psi(x)$ имеют несложные графики.

Например: Мы рассмотрим следующее уравнение вида $x \sin x - 1 = 0$ удобно преобразовать это уравнение и привести к следующему виду $\sin x = 1/x$.

И данные абсциссы точек пересечения данных графиков будут корнями исходного уравнения. Приближенные значения корней уточняют различными итерационными методами. Наиболее эффективные методы мы сейчас рассмотрим. Допустим, мы нашли такие точки a и b , такие, что $f(a)f(b) \leq 0$,

на отрезке $[a, b]$ лежит не менее одного уравнения. Находим середину отрезка $x_c = \frac{a+b}{2}$ и вычисляем $f(x_c)$. Из двух половин отрезка выберем ту, для которой у нас $f(x_c)f(a)$ или $f(x_c)f(b) \leq 0$. На этом отрезке функция меняет знак. Тогда наш новый отрезок снова делим пополам, и выберем ту половину, на концах которой функция имеет разные знаки, продолжим далее (рисунок 1).

Рисунок 1.

Когда нам необходимо найти корень с точностью ε , то мы продолжаем деление пополам до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2ε . И тогда середина последнего отрезка даст значение корня с необходимой нам точностью.

Дихотомия – это очень простой и очень надежный способ: к простому корню она сходится для любых непрерывных функций $f(x)$, в том числе недифференцируемых; при этом она устойчива к ошибкам при округлении. Скорость сходимости невелика: и за одну итерацию точность у нас увеличивается примерно вдвое, значит, уточнение трех цифр требует 10 итераций. Значит, длина отрезка, на котором лежит корень, после 10 итераций равна $1/2^{10} = \frac{1}{1024} \approx 10^{-3}$.

Нужно отметить самое главное для нас – это то, что точность ответа нам гарантированно. Перечислим недостатки этого метода.

2. Для начала расчета надо найти отрезок, на котором функция меняет знак.
3. Если в этом отрезке несколько корней, то заранее неизвестно, к какому из них сойдется процесс (хотя к одному из них обязательно сойдется).
4. Но этот метод неприменим к корням чётной кратности.
5. Для корней высокой нечётной кратности он сходится, но менее точен и хуже устойчив к ошибкам округления, возникающим при вычислении $f(x)$.
6. Наконец, нужно отметить, что на системы уравнений дихотомия не обобщается.

Утверждение 1: С помощью данного метода невозможно найти корни чётной кратности.

Доказательство утверждения 1: Чётно - кратный корень, это корень уравнения следующего вида $(x + a)^{2n} = 0$, где n – целое, $n \in [0, \infty]$. (2)

Решением данного уравнения у нас будет корень $x = -a$ кратности $2n$. Данное уравнение может иметь как чётно, так и нечётно кратные корни. Мы записываем общий вид данного уравнения имеющего $(k + m)$ только действительных корней в следующем виде:

$$(x + x_1)^{2n_1}(x + x_2)^{2n_2} \dots (x + x_k)^{2n_k}(x + x_{k+1})^{2n(k+1)+1}(x + x_{k+2})^{2n(k+2)+1} \dots \quad (3)$$

$\dots (x + x_{k+m})^{2n(k+m)+1} = 0$ Где можем записать $n_1, \dots, n(k + m) \in [0, \infty]$ целые числа; $x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_{k+m}$. В уравнении (3) k чётно - кратных и нечётно - кратных корней. Оно раскладывается на $(k + m)$ уравнений, из которых легко получаются корни. Рассмотрим начальный отрезок $[-x_1 - r, -x_1 + r]$,

где r - мало, и проверить условие смены знака функции на его границах, то мы видим, что знак не меняется в силу чётности степени. А если точно таким же методом проверить нечётно - кратные корни, то получаем обратную ситуацию.

Следствие 1.

Если корень имеет чётную кратность, то на границах бесконечно малого отрезка с центром в этом корне функция имеет одинаковые знаки.

Следствие 2. Если корень имеет нечётную кратность, то на границах бесконечно малого отрезка с центром в этом корне функция имеет разные знаки.

На некотором заданном отрезке $[a, b]$ лежит один корень чётной кратности, тогда в силу следствия 1 на границах отрезка знак меняться не будет, это означает остановку выполнения итераций и не достижение необходимой точности.

Пусть у нас на отрезке $[a, b]$ лежит один чётно - кратный корень и один нечётно - кратный корень, то чётно - кратный корень игнорируется методом, значит, условие смены знака являющееся основным условием, с помощью которого определяется корень на текущем полуотрезке, в силу следствия 1 у нас не выполнится. Следовательно, мы можем утверждать, что чётно - кратный корень не может быть найден с помощью данного метода.

Утверждение 2: Если на концах начального отрезка значения функции имеют один знак, то метод может не сойтись, то есть, возможно, ни один из корней не будет найден с заданной точностью.

Доказательство утверждения 2.

Первым условием (вариантом) постоянства знака функции на границах отрезка является отсутствие корня на нём, поэтому исключаем случай как тривиальный, посчитаем, что на отрезке хотя бы один корень у нас существует. А второй вариант - это существование чётного количества корней. Если $f(a)f(b) \geq 0$, то продолжать итерации невозможно, так как условие смены знака у нас не подтверждается. Если же, не смотря на это, на первом шаге не проверять условие смены знака и разделить отрезок пополам, то возникает следующая ситуация, что корни распределятся по чётному количеству в каждой половине отрезка. А чётное количество корней у нас означает чётное количество пересечений оси Ox , даже при том, что если там есть условие существования кратных корней.

Следовательно, это условие смены знака вновь не подтвердится для обеих половинок исходного отрезка. Следовательно, у нас дальнейшие итерации не будут выполнены, и не будет достигнута заданная точность.

Утверждение 3. Если на концах начального отрезка значения функции имеют разные знаки, то будет найден с заданной точностью один из корней, лежащих на нём.

Доказательство утверждения 3.

В силу утверждения 1 можем рассмотреть только корни нечётной кратности. Так как функция меняет знак на концах отрезка, мы предположим, что $f(a) \geq 0, f(b) \leq 0$. Тогда мы можем записать $f(x_c) \geq 0$, то для дальнейшего приближения мы выбираем отрезок $[x_c, b]$, зная, что $f(b)f(x_c) \leq 0$. Если же у нас $f(x_c) \leq 0$, то для дальнейшего приближения выбираем отрезок. Для дальнейшего приближения выбираем отрезок $[a, x_c]$, мы знаем, что $f(a)f(x_c) \leq 0$.

Теперь рассмотрим второй случай, когда $f(a) \leq 0, f(b) \geq 0$. Мы доказываем существование одного из полуотрезков, на котором функция у нас меняет знак. Из чего следует, что после каждой итерации для одного из полуотрезков условие смены знака обязательно будет выполнено. Следовательно, нет причин для остановки итерационного процесса, который завершается по достижении заданной точности. Строим блок-схему алгоритма вычисления корня уравнения вида (1) с помощью метода дихотомии. И пусть на начальном отрезке $[a, b]$ функция у нас будет менять знак, а это значит, что на этом отрезке существует нечётное количество нечётно - кратных корней. Пример такой функции изображён на следующем рисунке 1. Наша задача найти корень x_T с точностью ϵ . Посчитаем, x_T - точное значение корня, x_q - это есть значение корня полученное данным методом, то данная задача считаем выполненной, и если $x_q \in [x_T - \epsilon, x_T + \epsilon]$.

Рисунок 2.

Дихотомия мы применяем тогда, когда требуется высокая надёжность счета, и скорость сходимости малосущественна.

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. 512с.
2. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1982. 272с.
3. Хемминг Р.В. Численные методы/ Пер. с англ. М.: Наука, 1968. 400с.
4. Численные методы анализа Б.П. Демидович, И. А. Марон и Э.З. Шувалова. – М.: Наука, 1967. 128с.