На занятиях математики мы решаем задачи, которые будут решаться бакалаврами направления технология машиностроения в будущей профессиональной жизни. Данный вид работы позволяет наилучшим образом подготовить будущего бакалавра к профессиональной деятельности. При изучении материала с использованием прикладной задачи, у студентов повышается эффективность обучения. Данный вид обучения помогает становлению будущего специалиста.

Рассмотренная задача режима резания детали позволила студентам не только проводить расчеты, но и искать новые методы решения поставленных задач. Для механической обработки можно назначить любой режим резания для любого вида механической обработки. Рассмотренный табличный метод назначения режимов резания является весьма громоздким, так как требует анализа большого количества справочной информации. Поэтому следующий этап решения данной задачи – использование других методов.

1. Методы и средства измерений и контроля. Лабораторный практикум [Электронный ресурс]: учебное пособие / Г.В. Попов [и др.]. - Электрон.дан. - Воронеж: ВГУИТ, 2015. - 75 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/76252>. - Загл. с экрана.
2. Любимова, Г.А. Метрология, стандартизация и подтверждение качества [Электронный ресурс]: учебное пособие / Г.А. Любимова. - Электрон.дан. - Волгоград: Волгоградский ГАУ, 2016. - 88 с. (ЭБС Лань). - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/76671>. - Загл. с экрана.
3. Косилова, А. Г. Справочник технолога машиностроителя: в 2-х т. / А. Г. Косилова, Р. К. Мещеряков. – перераб. и доп. - Москва : Машиностроение, 2017. - Т.1. - 655 с.; Т. 2. - 495с.
4. Общемашиностроительные нормативы времени и режимов резания для нормирования работ, выполняемых на универсальных и многоцелевых станках с числовым программным управлением: нормативы режимов резания. - М.: Бюро нормативов по труду, 2017. – 465с.
5. Кравцов, А.Г. Современные многофункциональные и многоцелевые металлорежущие станки с ЧПУ и обеспечение точности и стабильности реализации на них технологических процессов [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.Г. Кравцов, А.А. Серегин, А.И. Сердюк. - Электрон.дан. - Оренбург: ОГУ, 2017. - 113 с. (ЭБС Лань). - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/110625>. - Загл. с экрана

Гацаева Р.С.-А.

Гиперповерхности второго порядка в аффинном пространстве

*ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет имени А.А. Кадырова»
(Россия, Грозный)*

doi: 10.18411/trnio-01-2022-56

Аннотация

В статье содержатся основные сведения из многомерной аналитической геометрии, включая аффинную классификацию гиперповерхностей второго порядка.

Ключевые слова: аффинная система, преобразование координат, квадратичная форма, поверхности второго порядка, плоскость.

Abstract

The article contains basic information on multidimensional analytic geometry, including the affine classification of second-order hypersurfaces.

Keywords: affine system, coordinate transformation, quadratic form, surfaces of the second order, plane.

Ранг и детерминант малой и большой матрицы многочлена второй степени. Рассматриваем общее уравнение поверхности второго порядка в произвольной аффинной системе координат $Oxyz$:

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0 \quad (1)$$

Как всегда, полагаем

$$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 \quad (2)$$

Вводим еще следующие обозначения:

$$A_F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}, \quad A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A_F называем большой матрицей уравнения (1), матрицу A_φ – малой матрицей. Ранги этих матриц называем соответственно большим и малым рангом поверхности, задаваемой уравнением (1), и обозначаем их соответственно через R и r . Мы сейчас увидим, что эти ранги не зависят от выбора системы координат, в которой задается уравнение поверхности. Детерминанты матрицы A_F и A_φ обозначаются соответственно через Δ и δ .

Мы знаем, что при сдвиге начала координат малая матрица, а значит, и ее детерминант не меняются. При линейном однородном преобразовании

$$\left. \begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z', \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z', \\ z &= c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z', \end{aligned} \right\} \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = c \neq 0,$$

ранг r матрицы A_φ не меняется, а детерминант δ (как дискриминант квадратичной формы $\varphi(x, y, z)$) умножается на c^2 . Так как всякое преобразование координат сводится к сдвигу начала координат и к однородному преобразованию вида (3), то при переходе от системы координат O к xyz к произвольной новой системе координат $O'x'y'z'$ ранг r матрицы A_φ не меняется, а ее детерминант δ умножается на квадрат детерминанта преобразования. Докажем аналогичное утверждение для большого ранга R и детерминанта Δ . Возьмем общие формулы преобразования координат:

$$\left. \begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + d_1, \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + d_2, \\ z &= c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + d_3, \end{aligned} \right\} \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = c \neq 0. \quad (4)$$

Наряду с многочленом $F(x, y, z)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\Phi(x, y, z, t) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_1xt + 2a_2yt + 2a_3zt + a_0t^2$$

и преобразование

$$\left. \begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + d_1t', \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + d_2t', \\ z &= c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + d_3t', \\ t &= t'. \end{aligned} \right\}$$

Тогда A_F есть матрица формы $\Phi(x, y, z, t)$, а Δ – ее дискриминант. При преобразовании (4') ранг R формы Φ остается неизменным, а ее дискриминант умножается на квадрат детерминанта преобразования (4'), т.е. на

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Замечание 1. Так как детерминант δ есть детерминант второго порядка, то при умножении всех его элементов на -1 знак δ меняется на обратный. Зато знак детерминанта Δ не меняется при умножении его элементов (т.е. всех коэффициентов уравнения (1)) на -1, значит, и на любой вообще множитель $\lambda \neq 0$.

Пересечение поверхности второго порядка с плоскостью.

Пусть даны поверхность второго порядка и плоскость. Перейдем к такой системе координат $Oxyz$, в которой данная плоскость была бы плоскостью Oxy , т.е. имела бы уравнение $z = 0$. Запишем в этой системе координат уравнение нашей поверхности:

$$F(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0, \quad (1)$$

и будем решать его совместно с уравнением $z = 0$ (2) Получим уравнение

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \quad (3)$$

Этому уравнению и удовлетворяют точки, одновременно лежащие на поверхности (1) и на плоскости (2). Мы видим, что, вообще говоря (т.е. за исключением особого случая $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, который мы сейчас отдельно разберем), уравнение (3) есть уравнение второй степени, определяющее некоторую (лежащую в плоскости $z = 0$) кривую второго порядка, которая и является пересечением данной поверхности второго порядка с данной плоскостью. Переходим к случаю $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$. Предположим, что по крайней мере один из коэффициентов a_1, a_2 отличен от нуля. В этом случае пересечение поверхности (1) с плоскостью $z = 0$ есть прямая $2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$. Пусть теперь не только $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, но и $a_1 = a_2 = 0$. Если при этом и $a_0 = 0$, то уравнение поверхности (1) имеет вид

$$z(2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z + 2a_3) = 0 - \text{поверхность распадается на пару плоскостей:}$$

$z = 0, 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z + 2a_3 = 0$, одной, из которых является данная плоскость $z = 0$. Наконец последняя возможность состоит в том, что

$a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_1 = a_2 = 0$, но $a_0 \neq 0$. Тогда уравнение (3) приводит к противоречию: $a_0 = 0$ (тогда как дано, что $a_0 \neq 0$), означающему, что нет ни одной точки (ни вещественной, ни мнимой), которая лежала бы одновременно на данной плоскости и на данной поверхности второго порядка.

Итак, доказана.

Теорема 1. При пересечении поверхности второго порядка с плоскостью могут представляться лишь следующие случаи:

- (а) поверхность пересекается с плоскостью по кривой второго порядка;
- (б) поверхность пересекается с плоскостью по (вещественной) прямой линии;
- (в) поверхность распадается на пару плоскостей, одной из которых является данная плоскость (входящая, таким образом, в состав рассматриваемой поверхности); (г) поверхность не имеет с плоскостью ни одной общей точки (ни вещественной, ни мнимой)

Замечание. В случае (а) кривой второй порядка, являющейся пересечением данной поверхности второго порядка с данной плоскостью, может быть:

- (a_1) не распадающаяся действительная или мнимая кривая, т.е. эллипс (действительный или мнимый), гипербола или парабола;
- (a_2) пара пересекающихся вещественных прямых;

- (a_3) пара мнимых сопряженных прямых, имеющих единственную вещественную (общую) точку, которая и является единственной вещественной точкой, лежащей одновременно на данной поверхности второго порядка и в плоскости; (a_4) пара параллельных в собственном смысле вещественных или мнимых сопряженных прямых; (a_5) пара совпадающих вещественных прямых.

Рисунок 1.

Как мы увидим ниже, возможности (a_2), (a_3), (a_5) характеризуют различные случаи касания данной поверхности второго порядка с плоскостью (рис.1). Пересечение поверхности второго порядка с прямой. Асимптотические направления. Касательные прямые и касательная плоскость. Особые точки поверхности второго порядка.

То, что говорилось в главе VI о пересечении алгебраической кривой с прямой, можно было бы – с несущественными и очевидными изменениями – повторить и о пересечении алгебраической поверхности

$$F(x, y, z) = 0$$

$$\text{с прямой } \left. \begin{aligned} x &= x_0 + \alpha t \\ y &= y_0 + \beta t \\ z &= z_0 + \gamma t \end{aligned} \right\}$$

Как всегда, мы будем предполагать, что и поверхность (1) прямая (2) являются вещественными; в соответствии с этим коэффициенты в уравнениях (1_A) и (2) всегда предполагают вещественными.

Мы ограничимся случаем, когда данная поверхность (1_A)- второго порядка, т.е. когда ее уравнение есть

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0.$$

Старшие члены многочлена $F(x, y, z)$ образуют квадратичную форму

$$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2.$$

Мы будем пользоваться еще следующими обозначениями, которых будем постоянно придерживаться в этой главе:

$$F_k(x, y, z) = a_{k1}x + a_{k2}y + a_{k3}z + a_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Для нахождения точек пересечения поверхности (1) с прямой подставим (2) в (1); после приведения подобных членов получим уравнение второй степени относительно t , а именно: $At^2 + 2Bt + C = 0$,

где, как легко проверить,

$$\left. \begin{aligned} A &= \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \equiv a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + 2a_{13}\alpha\gamma + \\ &\quad + 2a_{23}\beta\gamma + a_{33}\gamma^2. \\ B &= F_1(x_0, y_0, z_0)\alpha + F_2(x_0, y_0, z_0)\beta + F_3(x_0, y_0, z_0)\gamma, \\ C &= F(x_0, y_0, z_0). \end{aligned} \right\}$$

Уравнение (5) есть квадратное уравнение, за исключением случая, когда $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Вектор $u = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, удовлетворяющий условию (7), называется вектором асимптотического направления или просто асимптотическим вектором поверхности (1); прямая, направляющий вектор которой является асимптотическим, называется прямой асимптотического направления для данной поверхности. Замечание. Вопрос о том, что является ли данное направление асимптотическим или нет для данной поверхности второго порядка, зависит только от этой поверхности и от данного направления и не зависит от системы координат, в которой задано уравнение этой поверхности.

Если прямая (2) имеет неасимптотическое направление, то уравнение (5) квадратное и имеет два корня t_1, t_2 – вещественные различные, или мнимые сопряженные, или совпадающие (вещественные). Подставляя эти значения t_1, t_2 в равенства (2), получим две точки пересечения (вещественные или мнимые, быть может, совпадающие) прямой (2) и поверхности (1). Итак:

Если прямая (2) имеет неасимптотическое направление, то она пересекает поверхность (1) в двух точках – различных (действительных или мнимых сопряженных) или совпадающих (действительных) получающихся, если подставить в (2) любой из двух корней $t = t_1$ или $t = t_2$ квадратного уравнения (5). Если обе точки пересечения прямой (2) с поверхностью (1) сливаются в одну, т.е. уравнение (5) имеет совпадающие корни, то прямая (2) называется касательной к поверхности. В этом случае за точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ прямой (2) возьмем точку, лежащую на поверхности (эта точка и будет точкой прикосновения прямой к поверхности). Тогда $C = F(x_0, y_0, z_0) = 0$ и уравнение (5) принимает вид

$At^2 + 2Bt + C = 0$, т.е. $t(At + 2B) = 0$. Один его корень есть $t_1 = 0$, второй $t_2 = -\frac{2B}{A}$; для того чтобы он тоже был равен нулю, надо, чтобы было $B = 0$, т.е. $F_1(x_0, y_0, z_0)\alpha + F_2(x_0, y_0, z_0)\beta + F_3(x_0, y_0, z_0)\gamma = 0$ (8) Это и есть условие, которому должен удовлетворять направляющий вектор $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ прямой (2), проходящий через точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ поверхности (1), чтобы эта прямая была касательной (и тогда она будет касательной в точке M_0).

Имеется бесконечное множество прямых, проходящих через точку M_0 , с направляющими векторами, удовлетворяющими условию (8), т.е. бесконечное множество

касательных к поверхности (1) в данной ее точке M_0 . Пусть $M = (x, y, z)$ – произвольная точка любой из этих прямых. Тогда $\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ есть направляющий вектор этой прямой, и он удовлетворяет

$$F_1(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_2(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_3(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \quad (9)$$

Итак, все точки $M = (x, y, z)$ всех касательных проведенных к поверхности (1) в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, удовлетворяют уравнению (9); уравнение (9) – первой степени, следовательно, это уравнение некоторой плоскости, проходящей через точку M_0 . Плоскость эта называется *касательной плоскостью* к поверхности (1) в точке M_0 : она несет на себе все прямые, касающиеся поверхности (1) в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Уравнение (9) и есть уравнение касательной плоскости к поверхности (1) в ее точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. В развернутом виде это уравнение записывается так:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1)x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2)y + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_3)z + (a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_0) = 0 \quad (9')$$

Уравнение (9) может быть переписано в виде:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0,$$

где через $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0$ и т.д. обозначены значения соответствующих частных производных функции

$F(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. В этом виде в курсе анализа записывается уравнение плоскости к поверхностям, значительно более ... поверхности второго порядка (и алгебраические поверхности вообще). Особые точки поверхности второго порядка. Возникает вопрос: когда уравнение (9) касательной плоскости является неопределенным?

Очевидно, это происходит лишь тогда, когда одновременно

$$F_k(x_0, y_0, z_0) = a_{k1}x_0 + a_{k2}y_0 + a_{k3}z_0 + a_k = 0 \quad (10)$$

причем в то же время $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Но

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0, z_0) &\equiv (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1)x_0 + \\ &+ (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2)y_0 + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_3)z_0 + \\ &+ a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_0 \end{aligned} \quad (11)$$

Если выполнено (10), то тождество (11) превращается в

$$F(x_0, y_0, z_0) \equiv a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_0,$$

в (1_0) – в $a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_0 = 0$. Это равенство вместе с равенствами (10) показывает, что четверка чисел $(x_0, y_0, z_0, 1)$ образует ненулевое решение системы уравнений

$$\begin{cases} a_{k1}x + a_{k2}y + a_{k3}z + a_k t = 0, & k = 1, 2, 3 \\ a_1x + a_2y + a_3z + a_0 t = 0. \end{cases}$$

Значит,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Поверхности второго порядка, данные уравнением (1), коэффициенты которого удовлетворяют условию (13), называются *вырождающимися*, а точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, удовлетворяющая уравнениям (1_0) и (10), называется *особой точкой поверхности (1)*.

Из доказанного следует, что только у вырождающихся поверхностей могут быть особые точки. Итак, только в случае вырождающейся поверхности второго порядка и только в ее особой точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ касательная плоскость к поверхности (1) оказывается неопределенной. Попутно мы доказали, что при выполнении условий (10) условия (1₀) и (12) эквивалентны между собой.

1. Энциклопедия электронной математики. Том1, арифметика, М.2007
2. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. 1979
3. Энциклопедия электронной математики. Том 1, арифметика, М.2007 г.
4. Бюшгенс С.С. Дифференциальная геометрия – М.:Наука,2008 г.
5. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия – М.:Наука,2009 г.

Гацаева Р.С.-А.

**Методы псевдогогнутого анализа в теории нелинейных уравнений и неравенств
Вольтера**

*ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет имени А.А. Кадырова»
(Россия, Грозный)*

doi: 10.18411/trnio-01-2022-57

Аннотация

В статье реализуется применение, так называемого, метода псевдогогнутого анализа к многомерным нелинейным интегральным уравнениям Вольтера с нелинейностью псевдогогнутого вида.

Ключевые слова: псевдогогнутый, многомерный, нелинейный, интегральный, уравнение, аргумент.

Abstract

The article implements the application of the so-called method of pseudo-concave analysis to multidimensional nonlinear Voltaire integral equations with nonlinearity of pseudo-concave form.

Keywords: pseudo-concave, multidimensional, nonlinear, integral, equation, argument.

В работе реализуется применение, так называемого, метода псевдогогнутого анализа к многомерным нелинейным интегральным уравнениям Вольтера с нелинейностью псевдогогнутого вида.

Рассмотрим многомерное нелинейное интегральное уравнение Вольтера

$$u(x) = \int_0^x k[x, t, u(t)]dt + f(x) \quad (1)$$

Всюду в дальнейшем полагаем:

$$x = (x_1, \dots, x_n), t = (t_1, \dots, t_n) \in (0,1), l = (l_1, \dots, l_n), l_1 > 0$$

$$u(x) = \{u_1(x), \dots, u_n(x)\} \in K_+,$$

$$f(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\} \in K_+,$$

где K_+ -конус положительных при $x > 0$ функций, частично упорядоченного этим конусом векторного В-пространства $X = C$ или $L_p, 1 \leq p \leq \infty$,

$$K_+ = \{u(x): u(x) \in X, u(x) > 0, x > 0\}$$

Запись $u, f \in (0, L], L = (L_1, \dots, L_n), L_1 > 0$, означает, что значения u или f при фиксированных аргументах принадлежат параллелепипеду $(0, L]$ евклидова пространства E^n . Все операции и соотношения между векторами или матрицами понимаются покомпонентно. Например, $u^\gamma = \{u_1^\gamma, \dots, u_n^\gamma\}, \gamma(u) = \{\gamma(u_1), \dots, \gamma(u_n)\}$ и т.д.