Маслак О.Н., Кузнецова М.В.

Решение двумерного нестационарного уравнения влагопереноса с использованием системы неявных конечно-разностных уравненийФГБОУ ВОНИМИ Донской ГАУ
(Россия, Новочеркасск)

doi: 10.18411/sr-10-12-2018-22

idsp: sciencerussia-10-12-2018-22

Аннотация

В настоящее время для проведения капельных поливов, позволяющих экономить воду, требуется рассчитывать влагозапас современными способами, используя методы математического моделирования. В данной статье рассматривается двумерное уравнение влагопереноса, которое невозможно решить с использованием аппарата математического анализа. Для этого воспользовались методом прогонки, с использованием неявных конечно-разностных уравнений.

Ключевые слова: уравнение влагопереноса, коэффициент влагопроводности, конечно-разностные уравнения, цикл итераций.

Развивающееся сельское хозяйство невозможно без использования современных способов полива. Капельное орошение, мелкодисперсионное дождевание не получили еще достаточно широкого применения в нашей стране в том числе из-за недостающих достоверных количественных оценок влагозапасов в приповерхностном слое земли, несовершенных методических подходов к математическому описанию различных взаимосвязанных факторов орошения.

Решение одномерных задач, основанных на градиентах влажностей не вызывает особых вычислительных затруднений, поэтому рассмотрим один из методов численной реализации задачи влагопереноса на примере двумерного нестационарного уравнения влагопереноса в насыщенной и ненасыщенной среде.

Запишем уравнение :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(r_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r_z \frac{\partial H}{\partial z} \right) + Q(W, x, y, z, t); \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(r_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0, \quad 0 \leq t \leq \infty, \quad -l \leq z \leq 0, \quad 0 \leq x \leq a \cdot l, \end{cases}$$

Где r – коэффициент влагопроводности, зависящий от координат (x, y, z) – пространственных прямоугольных координат по правилу левой руки (вертикальная – вверх);

t – время; H – напор (специальная гидрофизическая функция)

$Q(W, x, y, z, t)$ – интенсивность внутригрунтового влагообмена.

Для обобщенного коэффициента влагопроводности r , формулы определения (в том числе их математическая интерпретация) нелинейных параметров чрезвычайно сложны и малопригодны для вычислительных операций. Поэтому воспользуемся их дискретными значениями, предусмотрев в диапазоне ожидаемых значений разбику известных кривых на $N \geq 10 (j = 1, 2, 3, \dots, N_j)$ равномерных или неравномерных частей, в пределах каждой из которых допустима с требуемой точностью линейная интерполяция значений параметров. Для решения указанного выше двумерного уравнения (значит, и одномерного) предлагается использовать систему $(N_{расч} = N_z \times N_i)$ неявных их конечно-разностных уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{(W_{z,i}^{\tau+1} - W_{z,i}^{\tau}) \cdot \Delta x \cdot \Delta z}{t^{\tau+1} - t^{\tau}} = \gamma_p \left(\frac{\partial W_p}{\partial p_{\text{вс}}} \right)_{z,i}^{\tau+1} \frac{(H_{z,i}^{\tau+1} - H_{z,i}^{\tau}) \cdot \Delta x \cdot \Delta z}{t^{\tau+1} - t^{\tau}} = \\
& = r_{z+\frac{1}{2},i}^{\tau+1} \frac{(H_{z+1,i}^{\tau+1} - H_{z,i}^{\tau+1}) \cdot \Delta x}{\Delta z} + r_{z-\frac{1}{2},i}^{\tau+1} \frac{(H_{z,i}^{\tau+1} - H_{z-1,i}^{\tau+1}) \cdot \Delta x}{\Delta z} + \\
& + r_{z,i+\frac{1}{2}}^{\tau+1} \frac{(H_{z,i+1}^{\tau+1} - H_{z,i}^{\tau+1}) \cdot \Delta z}{\Delta x} - r_{z,i-\frac{1}{2}}^{\tau+1} \frac{(H_{z,i}^{\tau+1} - H_{z,i-1}^{\tau+1}) \cdot \Delta z}{\Delta x} + Q_{z,i} \cdot \Delta x \cdot \Delta z, \\
& t^{\tau+1} - t^{\tau} = \Delta t, \quad x_{i+1} - x_i = \Delta x, \quad z_{i+1} - z_i = \Delta z, \quad \gamma_p = \text{const}, \\
& \gamma_p \left(\frac{\partial W_p}{\partial p_{\text{вс}}} \right)_{z,i}^{\tau+1} \approx D_{z,i}^{\tau+1}(p_{\text{вс}}) = \gamma_p \frac{(W_j^{\tau+1} - W_{j+1}^{\tau+1})}{(p_{\text{вс}})_j^{\tau+1} - (p_{\text{вс}})_{j+1}^{\tau}},
\end{aligned}$$

где $\tau+1$, τ , z , i – дискретные временные и пространственные координаты;

$z \pm 1/2$, $i \pm 1/2$ – индексы, указывающие на значение величин посередине между расчетными точками;

$N_{\text{расч}}$ – количество расчетных точек;

$j+1$, j – индексы, указывающие на дискретность исходных параметров влагопереноса,

$p_{\text{вс}}$ – всасывающее поровое избыточное давление влаги (подземной воды)

γ_p – объемный (удельный) вес влаги.

Удобней при исследовании погрешностей использовать одинаковые пространственные шаги ($\Delta z = \Delta x = \text{const}$), где $i \pm 1$, i , $z \pm 1$, z – дискретные пространственные координаты расчетных точек. При этом пространственные шаги должны быть увязаны с так называемыми компетентными элементарными объемами исследуемой среды и быть больше 0,1 м, так как $\delta V \approx \text{дм}^3$. Также целесообразно увязать границу с соответствующими граничными условиями на половинном расстоянии $\left(\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta z}{2} \right)$ от крайних расчетных точек. Исключить источник в правой

части приведенного конечноразностного уравнения можно путем несложного его преобразования, заменив в левых частях соответственно $W_{j,i}^{\tau}$ и $H_{j,i}^{\tau}$ на

$$\bar{W}_{j,i} = W_{z,i}^{\tau} + \Delta t \cdot Q_{z,i} \quad \text{и} \quad \bar{H}_{j,i} = H_{z,i}^{\tau} + \Delta t \cdot Q_{z,i}.$$

Из предыдущего конечноразностного уравнения следует, если

$$\begin{aligned}
C^{\tau+1} &= r_{z+1/2,i}^{\tau+1} \cdot H_{z+1,i}^{\tau+1} + r_{z-1/2,i}^{\tau+1} \cdot H_{z-1,i}^{\tau+1} + r_{z,i+1/2}^{\tau+1} \cdot H_{z,i+1}^{\tau+1} + r_{z,i-1/2}^{\tau+1} \cdot H_{z,i-1}^{\tau+1}, \\
E^{\tau+1} &= r_{z+1/2,i}^{\tau+1} + r_{z-1/2,i}^{\tau+1} + r_{z,i+1/2}^{\tau+1} + r_{z,i-1/2}^{\tau+1},
\end{aligned}$$

$$U^{\tau+1} = \frac{D_{j+1}^{\tau+1}(p_{\text{BC}}) \cdot H^{\tau} \cdot \Delta z^2}{\Delta t}, \quad L^{\tau+1} = \frac{W_{z,1}^{\tau+1} \cdot \Delta z^2}{\Delta t},$$

$$M^{\tau+1} = \frac{D_{z,i}^{\tau+1}(p_{\text{BC}}) \cdot \Delta z^2}{\Delta t}, \quad A = \frac{W_{z,1}^{\tau} \cdot \Delta z^2}{\Delta t} = \text{const},$$

$$B = Q_{z,i} \cdot \Delta z^2 = \text{const},$$

То

$$H_{z,i}^{\tau+1} = \frac{C^{\tau+1} - L^{\tau+1} + A + B}{E^{\tau+1}} \quad \text{или} \quad H_{z,i}^{\tau+1} = \frac{C^{\tau+1} + U^{\tau+1} + B}{E^{\tau+1} + M^{\tau+1}}.$$

Первое равенство при определенных условиях может быть отрицательным, второе – всегда положительное или равное нулю.

Существует некоторое отличие указанных типовых расчетных схем для приграничных расчетных точек, связанное с половинным пространственным шагом $\left(\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta z}{2}\right)$.

Для решения описанных выше конечноразностных уравнений схемы воспользуемся методом последовательных приближений, методом прогонки явной вычислительной схемой, взяв за основу следующие равенства при $n = 1, 2, 3, \dots, N$:

$$\text{1-го вида: } H_{z,i}^n = \frac{C^{n-1} + L^{n-1} + A + B}{E^{n-1}}$$

$$\text{2-го вида: } H_{z,i}^n = \frac{C^{n-1} + U^{n-1} + B}{E^{n-1} + M^{n-1}},$$

В качестве условия остановки выберем

$$H_{z,i}^{\tau+1} \approx H_{z,i}^N, \text{ а } \frac{H_{z,i}^N - H_{z,i}^{N-1}}{H_{z,i}^N} \leq \sigma, \quad \sigma = \left| H_{z,i}^N - H_{z,i}^{N-1} \right|,$$

где σ – заданная погрешность решений.

Полученные условно конечно-итерационные значения становятся начальными для последующих итерационных циклов решения в следующие моменты времени

Рассматривая цикл итераций (n) , в конце каждого мы получаем в каждой расчетной точке значения $H_{z,i}^n$, затем определяем дискретное поле значений:

$$\left(\frac{p_{\text{BC}}}{\gamma}\right)_{z,i}^n, \left(\frac{p_{\text{BC}}}{\gamma}\right)_{z\pm 1/2,i}^n = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{p_{\text{BC}}}{\gamma}\right)_{z\pm 1,i}^n + \left(\frac{p_{\text{BC}}}{\gamma}\right)_{z,i}^n \right], \left(\frac{p_{\text{BC}}}{\gamma}\right)_{z,i\pm 1/2}^n,$$

по которым согласно известным табличным значениям определяются величины $W_{z,i}^n, r_{z\pm 1/2,i}^n, r_{z,i\pm 1/2}^n, D_{z,i}^n$.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность σ требуемых функций и параметров.

Указанная математическая модель была реализована в виде программы для ЭВМ на языке программирования Microsoft Visual C#. Разработанная программа позволяет

варьировать количеством расчетных точек с разного рода граничными, начальными условиями и нелинейными параметрами влагопереноса (капиллярный потенциал, давление почвенной влаги, коэффициент влагопроводности). Адекватность математической модели и ее программной реализации проверялась решением тестовой задачи.

1. Мелихова, Е.В. Математическое моделирование процессов влагопереноса при капельном и внутрипочвенном орошении [Текст]/ Е.В. Мелихова // Известия нижеволжского агроуниверситетского комплекса: наука и высшее профессиональное образование. – № 1 (41). – 2016. – С. 77–85.
2. Ахмедов, А.Д. Экологические аспекты капельного орошения / А.Д. Ахмедов, А.А. Темерев, Е.Ю. Галиуллина // Проблемы и перспективы инновационного развития мирового сельского хозяйства: материалы междунар. науч.-практ. конф. Саратовского ГАУ.- Саратов, 2010.- С.156-158.
3. Григоров, М.С. Современные перспективные водосберегающие способы полива в Нижнем Поволжье /М.С. Григоров, А.С. Овчинников, Е.П. Боровой, А.Д. Ахмедов // Волгоград: ВГСХА «Нива», 2010. – 244 с.