РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

Клопов Н.В., Беднаж В.А.

Об интерполяционной последовательности для пространств Фока

Брянский Государственный Университет имени академика И.Г.Петровского
(Россия, Брянск)

doi: 10.18411/sr-10-12-2017-01

idsp: 000001:sr-10-12-2017-01

Аннотация

В данной работе производится изучение понятий последовательности выборки и интерполяции для пространств Фока F_α^p при условии $D^+(Z) < \frac{\alpha}{\pi}$.

Ключевые слова: комплексная плоскость, пространства Фока, комплексная интерполяция, интерполяционные последовательности, последовательность выборки.

Abstract

In this paper we study the concepts of sampling and interpolation for Fock spaces under the condition $D^+(Z) < \frac{\alpha}{\pi}$.

Keywords: complex plane, Fock spaces, complex interpolation, interpolation sequences, sampling sequence.

Изучив работы [1] и [2], нетрудно получить, что условие $D^+(Z) < \frac{\alpha}{\pi}$ достаточно для существования последовательности Z , интерполяционной для F_α^p . Рассмотрим следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть $0 < p \leq \infty$. В $\mathcal{C}$ нет последовательности, которая является как выборкой для F_α^p , так и интерполяцией для F_α^p .

Доказательство. Предположим противное и пусть Z – последовательность, которая является как выборкой, так и интерполяцией для F_α^p . Затем Z отделяем и отбираем для $F_{\alpha+\varepsilon}^p$ достаточно малый ε , поскольку мы характеризовали последовательности выборки для F_α^p , используя "открытое" условие $D^-(Z) > \frac{\alpha}{\pi}$.

Зафиксируем точку $\zeta \in Z$ и воспользуемся предположением, что Z интерполируется для F_α^p , чтобы найти функцию $g \in F_\alpha^p$ такую, что $g(\zeta) = 1$ и $g(z) = 0$ для всех $z \in Z - \{\zeta\}$. Заметим, что функция $f(z) = (z - \zeta)g(z)$ не тождественно равна нулю, принадлежит $F_{\alpha+\varepsilon}^p$, и обращается в нуль на Z . Таким образом, Z не может быть выборкой для $F_{\alpha+\varepsilon}^p$. Это противоречие показывает, что Z не может быть одновременно выборкой и интерполяцией для F_α^p .

Лемма 2. *Предположим, что $0 < p \leq \infty$ и Z интерполируется для F_α^p . Если Z – множество единственности для F_α^p , то должна быть последовательность выборки для F_α^p .*

Доказательство. Поскольку Z интерполируется для F_α^p , то оно должно быть разделено по [5]. Любая функция $f \in F_\alpha^p$ и последовательность $w_n = f(z_n)$ обладает тем свойством, что $\left\{ w_n e^{\frac{-\alpha|z_n|^2}{2}} \right\}$. По определению $N_p(Z)$ существует некоторая функция $g \in F_\alpha^p$ такая, что $g(z_k) = w_k$ для всех k и $\|g\|_{p,\alpha} \leq N_p(Z) \|g|Z\|_{p,\alpha}$.

Так как Z – множество единственности для F_α^p и $f(z_k) = w_k = g(z_k)$ для всех k , то есть $g = f$, и поэтому $\|f\|_{p,\alpha} \leq N_p(Z) \|f|Z\|_{p,\alpha}$ для всех $f \in F_\alpha^p$. Это говорит о том, что Z – выборка для F_α^p .

В качестве следствий двух доказанных выше лемм получим:

Следствие 1. *Пусть $0 < p \leq \infty$ и Z – интерполяционная последовательность для F_α^p . Затем, пусть существует функция $f \in F_\alpha^p$, не тождественно равная нулю, такая, что f обращается в нуль на Z .*

Заметим, что вышеприведенное следствие НЕ говорит о том, что каждая интерполяционная последовательность для F_α^p является F_α^p -нулем, потому что f может иметь дополнительные нули, отличные от других в Z . Фактически, существуют примеры F_α^p -интерполирующих последовательностей, которые не являются F_α^p -нулевыми множествами.

Следствие 2. *Пусть $0 < p \leq \infty$ и Z – последовательность выборки для F_α^p . Для любого $\zeta \in Z$, последовательность $Z - \{\zeta\}$ остается последовательностью выборки для F_α^p .*

Доказательство. Следует из характеристики последовательностей выборки для F_α^p в терминах меньшей плотности, поскольку удаление одной точки из последовательности не изменяет плотность последовательности.

Приведем еще одно доказательство, которое зависит только от того, что если Z – выборка для F_α^p , то это также выборка и для $F_{\alpha+\varepsilon}^p$ при достаточно малых ε .

Итак, пусть Z – выборка для F_α^p , но $Z' = Z - \{\zeta\}$ не выполняется, где $\zeta \in Z$. Без потери общности, можно также предположить, что Z отделен [3]. Тогда существует последовательность единичных векторов $\{f_n\}$ в F_α^p такая, что $\|f_n|Z'\|_{p,\alpha} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Нормальным аргументом можно также считать, что $f_n(z) \rightarrow f(z)$ равномерно на компактном наборе. По лемме Фату [4] имеем $f \in F_\alpha^p$. Из $\|f_n|Z'\|_{p,\alpha} \rightarrow 0$, выведем, что $f(z) = 0$ для всех $z \in Z'$. Поскольку

$$\|f_n|Z\|_{p,\alpha} \geq \frac{1}{M_p(Z)} > 0$$

для всех n мы видим, что $f(\zeta) \neq 0$. Функция $(z-\zeta)f(z)$ не равна тождественно нулю, обращается в нуль на Z и принадлежит $F_{\alpha+\varepsilon}^p$ для любого $\varepsilon > 0$. Это противоречит тому, что Z является последовательностью выборки для F_{α}^p .

Таким образом, последовательности выборки для F_{α}^p стабильны при следующих двух условиях: удаление конечного числа точек или добавление любого количества выделенных точек вне последовательности.

Следствие 3. Пусть $0 < p \leq \infty$. Если $Z = \{z_n\}$ – интерполяционная последовательность для F_{α}^p , то и $Z \cup \{\zeta\}$ для любого $\zeta \in Z$.

Доказательство. По следствию 1, получим что существует функция $g \in F_{\alpha}^p$, которая тождественно не равна нулю, но обращается в нуль на Z . Разделив при необходимости соответствующую степень на $z-\zeta$ (что сохраняет членство в F_{α}^p), можно считать, что $g(\zeta) \neq 0$. Умножая g на константу, если необходимо, можно считать, что $g(\zeta) = 1$.

Учитывая последовательность $\{v\} \cup \{v_n\}$ значений $s \left(\begin{matrix} -\alpha|z_n|^2 \\ v_n e^{\frac{-\alpha|z_n|^2}{2}} \end{matrix} \right) \in l^p$, можно найти функцию $f \in F_{\alpha}^p$ такую, что $f(z_n) = v_n$ для всех n . Функция

$$F(z) = f(z) + (v - f(\zeta))g(z)$$

принадлежит F_{α}^p и удовлетворяет

$$F(\zeta) = v, \quad F(z_n) = v_n, \quad n \geq 1.$$

Это показывает, что $Z \cup \{\zeta\}$ все еще является интерполяционной последовательностью для F_{α}^p .

Понятно, что интерполяционные последовательности для F_{α}^p стабильны при следующих двух условиях: удаление любого количества точек из последовательности или добавление конечного количества различных точек вне последовательности.

Ключевым инструментом для доказательства является следующее утверждение:

$$\rho_p(z, Z) = \sup_f |f(z)| e^{\frac{-\alpha|z|^2}{2}}, \quad 0 < p \leq \infty,$$

где $Z = \{z_n\}$ и верхняя грань берется по всем единичным векторам f в F_{α}^p такая, что $f(z_n) = 0$ для всех n . Мы считаем, что $\rho_p(z, Z)$ есть некоторая дистанция от z до последовательности Z . Нормальный аргумент показывает, что верхняя грань в определении из $\rho_p(z, Z)$ всегда достигается.

Из [5] мы имеем $0 \leq \rho_p(z, Z) \leq 1$. Очевидно, что $\rho_p(z, Z) = 0$ когда $z \in Z$. Мы покажем, что $\rho_p(z, Z) = 0$ только при $z \in Z$, когда Z – интерполяционная последовательность для F_α^p .

Лемма 3. Если Z интерполируется для F_α^p , где $0 < p \leq \infty$, то $\rho_p(z, Z) > 0$, когда $z \notin Z$.

Доказательство. На самом деле остается только предположить, что Z не является множеством единственности (мы уже знаем, что каждая интерполяционная последовательность для F_α^p не является множеством единственности для F_α^p). Действительно, если f – любая функция из F_α^p , которая тождественно не равна нулю и равна нулю на Z , то f не может иметь нуля в z бесконечного порядка. Поэтому, разделив из конечной и неотрицательной степени $w - z$, которая не разрушает членство в F_α^p , мы приходим к функции в F_α^p , которая обращается в нуль на Z , но имеет ненулевое значение в z .

Лемма 4. Пусть $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$ и $z_0 \notin Z$. Имеем

$$N_p(Z \cup \{z_0\}) \leq \frac{1 + 2N_p(Z)}{\rho_p(z_0, Z)} \quad \forall 0 < p \leq \infty.$$

Лемма 5. Предположим, что $0 < p \leq \infty$, а Z – интерполяционная последовательность для F_α^p . Затем, $D^+(Z) < \frac{\alpha}{\pi}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный большой квадрат Q с боковой длиной $R > 2$ и разделим его на квадраты $N = [R] \times [R]$ и $Q_j, 1 \leq j \leq N$, каждая из боковых длин $s = \frac{R}{[R]}$, где $[R]$ обозначает целую часть R . Известно, что $1 \leq s \leq 2$.

Поскольку Z интерполируется для F_α^p , он отделен. Таким образом, для каждого j можно найти некоторую точку $z_j \in Q_j$ такую, что $d(z_j, Z) \geq \delta_0$, где δ_0 – положительная постоянная, которая зависит от $N_p(Z)$ и α . Пусть $Z_j = Z \cup \{z_j\}$, воспользуемся [2] и [3], чтобы найти положительную постоянную l , не зависящую от j , такую, что $N_p(Z_j) \leq l$ для всех j . В [5] можно найти положительную постоянную $C = C(l, \alpha)$ такую, что

$$\int_{Q_j} \log \rho_p(z, Z_j) dA(z) \geq -C, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Для любого $z \in Q_j$ выберем функцию f такую, что f обращается в нуль на $Z_j - z$, $\|f\|_{p, \alpha} \leq 1$, и $f(0) = \rho_p(0, Z_j - z) = \rho_p(z, Z_j)$. По формуле Йенсена, примененной к кругу $|\zeta| < r$, где $2\sqrt{2} < r < \frac{R}{2}$ (формула Йенсена работает для $f(0) \neq 0$, но окончательная оценка ниже, очевидно, справедлива и для $f(0) = 0$,

$$\log \rho_p(z, Z_j) = \log |f(0)| \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_0^{2\pi} \log \left| f(re^{i\theta}) \right| \frac{d\theta}{2\pi} - \sum_{\zeta \in Z, |z-\zeta| < r} \log \frac{r}{|z-\zeta|} - \log \frac{r}{|z-z_j|} \leq \\
 &\leq \frac{\alpha r^2}{2} - \sum_{\zeta \in Z} \log^+ \frac{r}{|z-\zeta|} - \log \frac{r}{2\sqrt{2}} \leq \\
 &\leq \frac{\alpha r^2}{2} - \sum_{\zeta \in Z \cap Q^-} \log^+ \frac{r}{|z-\zeta|} - \log \frac{r}{2\sqrt{2}},
 \end{aligned}$$

где Q^- – квадрат длины стороны $R - 2r$ внутри Q , разделяющий один и тот же центр с Q и имеющий стороны, параллельные соответствующим Q . Другими словами, Q^- состоит из тех точек, расстояние которых до дополнения Q больше r . Проинтегрируем это неравенство по площади измерения на Q_j и получим

$$\begin{aligned}
 -C &\leq \int_{Q_j} \log \rho_p(z, Z_j) dA(z) \leq \\
 &\leq \frac{\alpha r^2}{2} |Q_j| - \sum_{\zeta \in Z \cap Q^-} \int_{Q_j} \log^+ \frac{r}{|z-\zeta|} dA(z) - |Q_j| \log \frac{r}{2\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Суммируя по j , получим

$$-CN^2 \leq \frac{\alpha r^2}{2} R^2 - \sum_{\zeta \in Z \cap Q^-} \int_Q \log^+ \frac{r}{|z-\zeta|} dA(z) - R^2 \log \frac{r}{2\sqrt{2}}.$$

Для любого $\zeta \in Q^-$ $|z-\zeta| < r$ содержится в Q так, что

$$\begin{aligned}
 \int_Q \log^+ \frac{r}{|z-\zeta|} dA(z) &= \int_{|z-\zeta| < r} \log \frac{r}{|z-\zeta|} dA(z) = \\
 &= \int_{|z| < r} \log \frac{r}{|z|} dA(z) = \frac{\pi r^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Так как $N^2 \leq R^2$, то

$$n(Z, Q^-) \frac{\pi r^2}{2} \leq \left(\frac{\alpha r^2}{2} - \log \frac{r}{2\sqrt{2}} + C \right) R^2,$$

где $n(Z, Q^-)$ обозначает число точек из Z , содержащихся в Q^- . Это можно записать как

$$\frac{n(Z, Q^-)}{(R-2r)^2} \leq \left(\frac{\alpha}{\pi} - \frac{2}{\pi r^2} \log \frac{r}{2\sqrt{2}} + \frac{2C}{\pi r^2} \right) \frac{R^2}{(R-2r)^2}.$$

Заменим r и пусть $R \rightarrow \infty$, тогда

$$D^+(Z) \leq \frac{\alpha}{\pi} - \frac{2}{\pi r^2} \log \frac{r}{2\sqrt{2}} + \frac{2C}{\pi r^2}.$$

Если r выберем достаточно большим, то

$$C - \log \frac{r}{2\sqrt{2}} < 0,$$

тогда $D^+(Z) < \frac{\alpha}{\pi}$.

Обобщив вышеизложенное, отметим следующие две теоремы:

Теорема 1. Пусть Z – последовательность в $\square$ и $0 < p \leq \infty$. Тогда Z является интерполяционной последовательностью для $F_\alpha^p \Leftrightarrow Z$ отделен и $D^+(Z) < \frac{\alpha}{\pi}$.

Теорема 2. Пусть Z – отделенная последовательность в $\square$ и $0 < p \leq \infty$. Тогда Z является интерполяционной последовательностью для $F_\alpha^p \Leftrightarrow Z$ и $D^+(Z) < \frac{\alpha}{\pi}$.

1. Клопов Н.В., Беднаж В.А. Рассмотрение понятия интерполяционных последовательностей // Актуальные вопросы в науке и практике. 2017. III. С. 14-20. URL: <https://yadi.sk/i/Z6DEgcBr3PXP2f> (дата обращения: 01.12.2017)
2. Клопов Н.В. Изучение понятия комплексной интерполяции // Современные проблемы физико-математических наук. 2017. III. С. 57-61. URL: <https://phys-math.ru/conf2017> (дата обращения: 03.12.2017)
3. Клопов Н.В., Беднаж В.А. Построение линейного оператора, решающего задачу кратной интерполяции в некоторых классах голоморфных в единичном круге функций // Актуальные вопросы и перспективы развития современной науки. 2017. II. С. 34-40. URL: <http://opensci.ru/wp-content/uploads/2017/07/СБОРНИК-02.pdf> (дата обращения: 24.11.2017)
4. A. Grishin, A. Russakovskii. Free interpolation by entire functions. J.Sov. Math. 1990. 267-275 с.
5. Kehe Zhu. Analysis on Fock Spaces. – Department of Mathematics and Statistics State University of New York Albany. NY USA. 2012. 355 с.