Так как дуги $\operatorname{arccotg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}\right)$ и $\frac{3\pi}{5}$ заключены на промежутке $]0;\pi[$ убывания котангенс и котангенс дуг равны: $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arccotg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}\right)\right) = \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}$, то равны и сами дуги: $\operatorname{arccotg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}\right) = \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}$.

б) Аргумент тригонометрической функции не принадлежит промежутку изменения её аркфункции.

В этом случае, принимая формулы приведения, или понятия перевода тригонометрических функций, или четность (нечетность) тригонометрических функций, сводим её аргумент к аргументу, заключённому на промежутке изменения её аркфункций, т.е. к предыдущему случаю.

Примеры. Вычислить:

$$1. \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right);$$

$$-\frac{\pi}{5} \notin [0;\pi], \text{ но } \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5}, \text{ а } \frac{\pi}{5} \in [0;\pi].$$

$$\text{Поэтому } \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}.$$

$$2. \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3,2\pi);$$

$$3,2\pi \notin \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ но } \operatorname{tg} 3,2\pi = \operatorname{tg}(3\pi + 0,2\pi) = \operatorname{tg} 0,2\pi.$$

$$0,2\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \text{ Поэтому } \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3,2\pi) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0,2\pi) = 0,2\pi.$$

$$3. \arcsin(\sin(-5));$$

$$-5 \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ но } \sin(-5) = \sin(2\pi - 5) \text{ и } 2\pi - 5 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{Поэтому } \arcsin(\sin(-5)) = \arcsin(\sin(2\pi - 5)) = 2\pi - 5.$$

Замечания. Если аргумент тригонометрической функции принимает «табличное» значение или сводится к нему, то вычисление можно производить непосредственно.

Леонова О.В.

Вероятностные характеристики продолжительности жизни

Байкальский государственный университет
(Россия, Иркутск)

doi: 10.18411/sr-10-08-2021-14

Аннотация

В статье рассматриваются вероятностные характеристики продолжительности жизни, которые являются основой построения таблиц смертности.

Ключевые слова: страховая математика, функция выживания, кривая смертей, интенсивность смертности, таблицы смертности.

Функция выживания

Пусть X означает продолжительность жизни, X_i — продолжительность жизни i — го индивидуума. В других видах страхования под X можно понимать, например:

- 1) Время до наступления заболевания;
- 2) Время безаварийной работы автомобиля;
- 3) Время до причинения ущерба и т.п.

Неопределенность или непредсказуемость момента смерти, заболевания аварии является основным источником случайности при страховании, что позволяет использовать случайные события, величины, процессы при математическом анализе различных аспектов страхования жизни, здоровья, имущества и т.п.

Относительно момента смерти конкретного человека трудно сказать что-то определенное. Однако, если рассматривается достаточно большая *однородная* группа людей, то для нее уже будут справедливы закономерности, присущие массовым случайным явлениям, например, устойчивость частот, сходимость к нормальному или пуассоновскому законам распределения и т.д. Поэтому, привлекая терминологию теории вероятностей, можно говорить о продолжительности жизни как о случайной величине X , причем $X \geq 0$.

Исчерпывающей характеристикой случайной величины X является функция распределения $F(x) = P\{X \leq x\}$. В актуарной математике вместо функции распределения обычно используют *функцию выживания* [1]

$$s(x) = P\{X > x\} = 1 - F(x), \quad (1)$$

которая есть вероятность того, что человек доживет до возраста x лет. Индивидуума в возрасте x лет в актуарной математике обозначают (x) . Функция выживания $s(x)$ является основным из терминов в актуарной математике и обладает следующими свойствами:

- 1) $s(x)$ убывает;
- 2) $s(0) = 1, s(\infty) = 0$;
- 3) $s(x)$ непрерывна справа.

В какой-то степени о характере реальных зависимостей функции выживания от возраста x можно судить по таблицам:

Мужчины (СССР, 1984-1985)

x	0	14	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
$s(x)$	1	0,954	0,947	0,922	0,878	0,795	0,651	0,434	0,188	0,003	0	0

Женщины (СССР, 1984-1985)

x	0	14	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
$s(x)$	1	0,964	0,961	0,953	0,939	0,908	0,841	0,7	0,417	0,008	0	0

Так как реальная продолжительность жизни X ограничена *предельным возрастом* (limiting age) $\omega = 100 - 120$ лет, то $s(x) = 0, x > \omega$. В связи с этим ТПЖ составляются обычно для целых $x \leq \omega$. Однако для функций $s(x)$, задаваемых аналитически, время жизни, как правило, неограниченно, причем параметры для $s(x)$ подбирают так, чтобы вероятность $P\{X > x\}$ была достаточно малой.

Выясним, как функция выживания $s(x)$ связана с одной из основных характеристик l_x общих таблиц смертности. Рассмотрим достаточно большую группу из l_0 новорожденных ($l_0 = 10000$) и будем фиксировать их продолжительности жизни или моменты смерти $X_1, X_2, \dots, X_{l_0}$. Введем для события A индикатор $I(A) = \begin{cases} 1, & A \\ 0, & \bar{A} \end{cases}$.

Тогда число представителей этой группы, доживших до возраста x лет, есть случайная величина

$$L(x) = \sum_{i=1}^{l_0} I(X_i > x),$$

математическое ожидание которой и определяет величина

$$l_x = ML(x) = \sum_{i=1}^{l_0} MI(X_i > x) = \sum_{i=1}^{l_0} P(X_i > x) = \sum_{i=1}^{l_0} s(x) = l_0 s(x),$$

то есть

$$l_x = l_0 s(x). \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что:

- 1) Кривая l_x изменяется в зависимости от возраста x аналогично функции выживания $s(x)$ с точностью до множителя-константы l_0 ;
- 2) $s(x) = \frac{l_x}{l_0}$ – это средняя доля доживших до возраста x из рассматриваемой группы новорожденных.

Кривая смертей

Рассмотрим данные ТПЖ для населения США

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
$s(x)$	1	0,983	0,977	0,965	0,949	0,915	0,837	0,682	0,432	0,142	0,012	0

Если взять $l_0 = 1000$, то в первые 10 лет жизни умрет в среднем 17 человек, от 10 до 20 лет – 6 человек, от 20 до 30 лет – 12 человек, от 30 до 40 лет – 16 человек, от 40 до 50 – 34 человека и т.д. Очевидно, что эти данные, разбитые на интервалы, более наглядно характеризуют смертность, чем данные из таблицы. Например, в первом десятилетии смертность втрое выше, чем во втором, самом безопасном, или период от 70 до 90 лет, за который умирает 540 человек, что составляет более половины исходной группы $l_0 = 1000$ человек.

Введем для интервала возрастов $(x, x+t)$ случайную величину

$${}_t D_x = L(x) - L(x+t) = \sum_{i=1}^{l_0} I(x < X_i \leq x+t), \quad (3)$$

которая равна числу умерших в возрасте от x до $x+t$ лет из фиксированной группы l_0 новорожденных. Математическое ожидание этой случайной величины определяет еще одну из основных характеристик ${}_t d_x$ ТПЖ

$${}_t d_x = M {}_t D_x. \quad (4)$$

Очевидно, что

$${}_t d_x = M {}_t D_x = M(L(x) - L(x+t)) = l_x - l_{x+t} = l_0(s(x) - s(x+t)),$$

где $s(x) - s(x+t) = P(x < X_i \leq x+t)$ – вероятность смерти в промежутке $(x, x+t]$.

Отметим, что индекс $t=1$ обычно опускается, поэтому $d_x = l_x - l_{x+1}$, т.е. d_x выражается через l_x и l_{x+1} , имеющиеся в таблицах смертности. Тем не менее, величина d_x также приводится в таблицах смертности в качестве основной характеристики.

Функция $f(x) = F'(x) = -s'(x)$ называется плотностью распределения случайной величины X и за ней в актуарной математике закреплен термин *кривая смертей* (the curve of deaths). Кривая d_x от переменной возраста x изменяется приближенно как кривая смертей $f(x)$ с точностью до множителя-константы l_0 , т.е.

$d_x \approx l_0 f(x)$. Резюмируя, можно сказать, что кривая смертей в каком-то смысле является более тонкой характеристикой по сравнению с функцией выживания.

Функция интенсивности смертности

В свою очередь, по сравнению с кривой смертей более тонкой характеристикой является функция интенсивности смертности [2]. Найдем вероятность смерти человека, дожившего до x лет, в течение ближайших t лет, то есть в промежутке $(x, x+t]$:

$$\begin{aligned} P(x < X \leq x+t / X > x) &= \frac{P(x < X \leq x+t \cap X > x)}{P(X > x)} = \frac{P(x < X \leq x+t)}{P(X > x)} = \\ &= \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Применяя формулу Тейлора к функции $F(x+t)$, получим $F(x+t) - F(x) = F(x) + F'(\xi) \cdot t - F(x) = f(\xi) \cdot t$, $\xi \in (x, x+t)$. Если величина t мала или функция $f(\xi)$ слабо изменяется в промежутке $(x, x+t)$, то из (5) получается равенство

$$P(x < X \leq x+t / X > x) \approx \frac{f(x)}{1 - F(x)} \cdot t. \quad (6)$$

Отношение в правой части (6)

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{s(x)} \quad (7)$$

называется *функцией интенсивности смертности* и является важной характеристикой страховой математики. Согласно (6) и (7) величина $\mu_x \cdot t$ приближенно равна вероятности смерти человека возраста x лет в интервале $(x, x+t)$.

Важность функции μ_x подтверждается и тем, что ее приближенное значение q_x приводится в таблицах смертности также в качестве основной

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \approx \frac{l_0 f(x)}{l_0 s(x)} = \mu_x.$$

Функция интенсивности смертности обладает следующими свойствами:

- 1) $\mu_x \geq 0$;
- 2) $\int_0^{+\infty} \mu_u du = +\infty$;
- 3) $s(x) = e^{-\int_0^x \mu_u du}$;
- 4) $F(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu_u du}$.

Из этих свойств следует, что функция интенсивности смертности может быть использована как основная характеристика продолжительности жизни наряду с функцией распределения, функцией выживания и плотностью распределения.

1. Архипов, А.П. Андеррайтинг в страховании: Теоретический курс и практикум: учебное пособие / А.П. Архипов. - М.: Юнити-Дана, 2015. - 240 с.
 2. Никулина, Н.Н. Страховой маркетинг: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Финансы и кредит» / Н.Н. Никулина, Л.Ф. Суходоева, Н.Д. Эриашвили. - М.: Юнити-Дана, 2015. - 503 с.
-