Из второго уравнения системы видим, что x и y отличны от нуля и имеют одинаковые знаки. Поэтому $x + y \neq 0$ и, следовательно, полученная система равносильна такой:

$$\begin{cases} xy - 1 = x + y, \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ x = 3, \\ y = 2 \end{cases}$$

Проверка показывает, что обе пары $(2; 3)$ и $(3; 2)$ удовлетворяют данной системе уравнений.

Ответ: $\{(2; 3), (3; 2)\}$.

Есикова И.В., Козлов В.А.

Доказательство тождеств, содержащих обратные тригонометрические функции

*Армавирский государственный педагогический университет
(Россия, Армавир)*

doi: 10.18411/sr-10-08-2021-13

Аннотация

В статье изучаются тождества, содержащие обратные тригонометрические функции. Подробно описаны свойства таких функций и методы доказательства тождеств их содержащих. Приведено также большое количество примеров.

Ключевые слова: тригонометрические функции, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, тригонометрическое тождество.

1. Аркфункции, их свойства, графики.

1.1. Арксинус.

На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin$ непрерывна и возрастает, а поэтому имеет себе обратную функцию. Её называют арксинус и обозначают $\arcsin$.

Свойства функции, заданной формулой $y = \arcsin x$.

1. Область определения: $D(\arcsin) = [-1; 1]$
2. Множество значений: $E(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
3. Функция $\arcsin$ – непрерывна на $[-1; 1]$
4. Функция $\arcsin$ – нечетная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

1.2. Арккосинус.

На отрезке $[0; \pi]$ функция $\cos$ непрерывна и убывает, а поэтому имеет в себе обратное. Её называют арккосинус и обозначают $\arccos$.

Свойства функции, заданной формулой $y = \arccos x$

1. Область определения: $D(\arccos) = [-1; 1]$
2. Множество значений: $E(\arccos) = [0; \pi]$
3. Функция $\arccos$ непрерывна на $[-1; 1]$
4. Имеет место равенство: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

1.3. Арктангенс.

В интервале $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ функция $\tan$ непрерывна возрастает, а поэтому имеет себе обратную функцию. Её называют арктангенс и обозначают $\arctg$

Свойства функции, заданной формулой $y = \arctg x$

1. Область определения: $D(\arctg) =]-\infty; \infty[$
2. Множество значений: $E(\arctg) = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
3. Функция $\arctg$ непрерывна на $]-\infty; \infty[$
4. Функция $\arctg$ – нечетная: $\arctg(-x) = -\arctg x$

1.4. Арккотангенс

В интервале $[0; \pi]$ функция ctg непрерывна и убывает, а поэтому имеет себе обратную. Её называют арккотангенс и обозначают $arcctg$

Свойства функции, заданной формулой $y = arcctg x$

1. Область определения: $D(arcctg) =]-\infty; \infty[$
2. Множество значений: $E(arcctg) =]0; \pi[$
3. Функция $arcctg$ непрерывна на $]-\infty; +\infty[$
4. Имеет место равенства: $arcctg(-x) = \pi - arcctg x$

1.5. Графики обратных тригонометрических функций.

2. Операции над аркфункциями.

- 2.1. Вычисление значений тригонометрических функций от обратных одноимённых тригонометрических функций.

Непосредственно из определения аркфункции следует равенство:

1. $\sin(\arcsin x) = x$, на $[-1; 1]$
2. $\cos(\arccos x) = x$, на $[-1; 1]$
3. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, на $]-\infty; +\infty[$
4. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$, на $]-\infty; +\infty[$

- 2.2. Вычисление значений тригонометрических функций от обратных другим тригонометрическим функциям.

- а) Аркфункции принимает табличное значение.

Примеры. Вычислить:

1. $\sin\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$

Так как $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, то $\sin\left(\arccos \frac{1}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2. $\cos(\operatorname{arctg} 1)$

Так как $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, то $\cos(\operatorname{arctg} 1) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(-1))$

Так как $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, то $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(-1)) = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -1$;

4. $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

5. Так как $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, то $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

- б) Аркфункции принимают произвольные допустимые значения.

В общем случае надо использовать формулы, выражающие значение тригонометрических функций данного аргумента через значение любой другой тригонометрические функции того же аргумента.

Примеры. Вычислить:

1. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} \sqrt{2})$

В формуле $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ положим $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

Тогда $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} \sqrt{2}) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2. $\cos\left(\arcsin \frac{1}{3}\right)$

В формуле $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ положим $\alpha = \arcsin \frac{1}{3}$.

Так как при этом $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$, где $\cos \alpha > 0$, то перед квадратным корнем берём знак «+».

Поэтому $\cos\left(\arcsin \frac{1}{3}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin \frac{1}{3}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$;

$$3. \sin\left(\operatorname{arccctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

В формуле $\sin \alpha = 1/\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$ положим $\alpha = \operatorname{arccctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Так как при этом $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, где $\sin \alpha > 0$, то

$$\sin\left(\operatorname{arccctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\left(\operatorname{arccctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5};$$

$$4. \operatorname{tg}(\arccos(-0,8))$$

В формуле $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos \alpha}$ положим $\alpha = \arccos(-0,8)$.

Так как при этом $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, где $\operatorname{tg} \alpha$ и $\cos \alpha$ имеют одинаковые знаки, то перед квадратным корнем берём знак «+».

$$\operatorname{tg}(\arccos(-0,8)) = \frac{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(-0,8))}}{\cos(\arccos(-0,8))} = \frac{\sqrt{1-(-0,8)^2}}{-0,8} = -0,75;$$

$$5. \sin\left(\operatorname{arccctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$$

В формуле $\sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}$ положим $\alpha = \operatorname{arccctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$. Так как при этом $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, где $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ имеют одинаковые значения, то

$$\sin\left(\operatorname{arccctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arccctg}\left(-\frac{3}{4}\right))}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2(\operatorname{arccctg}\left(-\frac{3}{4}\right))}} = \frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = -\frac{3}{5}.$$

3. Соотношения между аркфункциями.

1.1. Соотношения первого рода.

Соотношениями первого рода называются соотношения между аркфункциями, вытекающие из выражения зависимости между тригонометрическими функциями дополнительных дуг.

Доказать:

$$а) \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \text{ на } [-1; 1]$$

$$б) \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2}, \text{ на }]-\infty; +\infty[$$

При доказательстве каждого из этих соотношений достаточно показать, что, во-первых, дуги $\arcsin x$ и $\frac{\pi}{2} - \arccos x$ ($\operatorname{arctg} x$ и $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg} x$) заключены на одном и том же промежутке монотонного изменения в синуса (тангенса) и, во-вторых, что синусы (тангенсы) этих дуг равны. Тогда и рассматриваемые дуги будут равны.

Докажем первое соотношение.

$$1. -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} - \text{ по определению арксинуса.}$$

$$0 \leq \arccos x \leq \pi, \text{ по определению арккосинуса.}$$

$$\text{Поэтому } 0 \leq \arccos x \leq \pi, \text{ а } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \arccos x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Теперь видим, что дуги $\arcsin x$ и $\frac{\pi}{2} - \arccos x$ заключены на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастания синуса.

$$2. \sin(\arcsin x) = x \text{ и } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x \text{ т.е. синус этих дуг равны.}$$

$$\text{Поэтому } \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x, \text{ т.е. } \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Второе соотношение доказывается аналогично.

1.2. Соотношения второго рода.

Соотношениями второго рода называются соотношения между аркфункциями, вытекающие из соотношений между значениями тригонометрических функций одного

и того же аргумента. Они преобразуют одну аркфункцию в другую. При выводе таких соотношений могут представиться два случая:

а) Аргумент, данный от функции не отрицателен.

В этом случае значение аркфункций расположена на промежутке $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ или совпадают с одним из его концов, и каждая из аркфункций может быть выражена через любую другую аркфункцию (если её значение принадлежит множество значений данной аркфункции).

Примеры.

1. Выразить $\arcsin \frac{1}{3}$ через другие аркфункции.

$$\text{Вычислим } \cos \left(\arcsin \frac{1}{3} \right) = \sqrt{1 - \sin^2 \left(\arcsin \frac{1}{3} \right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Так как дуги $\arcsin \frac{1}{3}$ и $\arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}$ заключены на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ убывания косинуса и косинусы их равны, то равны и сами дуги: $\arcsin \frac{1}{3} = \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Аналогично рассуждая, найдём, что из равенства:

$$\operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{1}{3} \right) = \frac{\sin \left(\arcsin \frac{1}{3} \right)}{\sqrt{1 - \sin^2 \left(\arcsin \frac{1}{3} \right)}} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

следует: $\arcsin \frac{1}{3} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Из равенства:

$$\operatorname{ctg} \left(\arcsin \frac{1}{3} \right) = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \left(\arcsin \frac{1}{3} \right)}}{\sin \left(\arcsin \frac{1}{3} \right)} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^2}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

следует: $\arcsin \frac{1}{3} = \operatorname{arcctg} 2\sqrt{2}$.

2. Выразить $\arccos 0$ через другие аркфункции.

$\arccos 0 = \frac{\pi}{2} = \arcsin 1 = \operatorname{arcctg} 0$, но через арктангенс это дуга не выражается, так как $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$.

С помощью известных свойств аркфункций сведём аркфункцию от отрицательного аргумента к той же аркфункции от положительного аргумента и придём к предыдущему случаю.

4. Выполнение обратных тригонометрических операций над тригонометрическими функциями.

Вычисления выражения вида:

$$\arcsin(\sin x); \arccos(\cos x); \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x); \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x);$$

Рассмотрим два возникших случая:

а) Аргумент тригонометрической функции заключен на промежутке изменения её аркфункции.

Примеры. Вычислить:

$$1. \arcsin \left(\sin \frac{\pi}{8} \right);$$

Так как дуги $\arcsin \left(\sin \frac{\pi}{8} \right)$ и $\frac{\pi}{8}$ заключены на промежутки возрастания синуса и синусы дуг равны: $\sin \left(\arcsin \left(\sin \frac{\pi}{8} \right) \right) = \sin \frac{\pi}{8}$, то равны и сами дуги:

$$\arcsin \left(\sin \frac{\pi}{8} \right) = \sin \frac{\pi}{8}$$

$$2. \operatorname{arcctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{5} \right);$$

Так как дуги $\operatorname{arccotg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}\right)$ и $\frac{3\pi}{5}$ заключены на промежутке $]0;\pi[$ убывания котангенс и котангенс дуг равны: $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arccotg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}\right)\right) = \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}$, то равны и сами дуги: $\operatorname{arccotg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}\right) = \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}$.

б) Аргумент тригонометрической функции не принадлежит промежутку изменения её аркфункции.

В этом случае, принимая формулы приведения, или понятия перевода тригонометрических функций, или четность (нечетность) тригонометрических функций, сводим её аргумент к аргументу, заключённому на промежутке изменения её аркфункций, т.е. к предыдущему случаю.

Примеры. Вычислить:

$$1. \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right);$$

$$-\frac{\pi}{5} \notin [0;\pi], \text{ но } \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5}, \text{ а } \frac{\pi}{5} \in [0;\pi].$$

$$\text{Поэтому } \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}.$$

$$2. \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3,2\pi);$$

$$3,2\pi \notin \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ но } \operatorname{tg} 3,2\pi = \operatorname{tg}(3\pi + 0,2\pi) = \operatorname{tg} 0,2\pi.$$

$$0,2\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \text{ Поэтому } \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3,2\pi) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0,2\pi) = 0,2\pi.$$

$$3. \arcsin(\sin(-5));$$

$$-5 \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ но } \sin(-5) = \sin(2\pi - 5) \text{ и } 2\pi - 5 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{Поэтому } \arcsin(\sin(-5)) = \arcsin(\sin(2\pi - 5)) = 2\pi - 5.$$

Замечания. Если аргумент тригонометрической функции принимает «табличное» значение или сводится к нему, то вычисление можно производить непосредственно.

Леонова О.В.

Вероятностные характеристики продолжительности жизни

Байкальский государственный университет
(Россия, Иркутск)

doi: 10.18411/sr-10-08-2021-14

Аннотация

В статье рассматриваются вероятностные характеристики продолжительности жизни, которые являются основой построения таблиц смертности.

Ключевые слова: страховая математика, функция выживания, кривая смертей, интенсивность смертности, таблицы смертности.

Функция выживания

Пусть X означает продолжительность жизни, X_i — продолжительность жизни i — го индивидуума. В других видах страхования под X можно понимать, например:

- 1) Время до наступления заболевания;
- 2) Время безаварийной работы автомобиля;
- 3) Время до причинения ущерба и т.п.

Неопределенность или непредсказуемость момента смерти, заболевания аварии является основным источником случайности при страховании, что позволяет использовать случайные события, величины, процессы при математическом анализе различных аспектов страхования жизни, здоровья, имущества и т.п.