РАЗДЕЛ IV. МАТЕМАТИКА

Есикова И.В., Козлов В.А.

Уравнения и системы уравнений, содержащие обратные тригонометрические функции*Армавирский государственный педагогический университет
(Россия, Армавир)*

doi: 10.18411/sr-10-08-2021-12

Аннотация

В статье изучаются уравнения и системы уравнений, содержащие обратные тригонометрические функции. Подробно описаны методы решения таких уравнений и систем уравнений. Приведено множество примеров использования описанных методов и приемов решения уравнений и систем, содержащих обратные тригонометрические функции.

Ключевые слова: тригонометрические функции, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, тригонометрическое уравнение, система тригонометрических уравнений.

Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции.

1.1. Простейшие уравнения.

а) $\arcsin x = m$

По определению $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$ поэтому при $|m| > 1$ данное уравнение решений не имеет а при $|m| \leq 1$ $x = \sin m$

Примеры. Решить уравнение:

1. $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$ Так как $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\arcsin x = \frac{3\pi}{5}$ Так как $\frac{3\pi}{5} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $x = \emptyset$

б) $\arccos x = m$

По определению $0 \leq \arccos x \leq \pi$ поэтому при $m < 0$ или $m > \pi$ данное уравнение решений не имеет, а при $0 \leq m \leq \pi$ $x = \cos m$

Примеры. Решить уравнение:

1. $\arccos x = -1$ Так как $-1 \notin [0; \pi]$, то $x = \emptyset$

2. $\arccos x = 3$ Так как $3 \in [0; \pi]$, то $x = \cos 3$

в) $\arctg x = m$

По определению $|\arctg x| < \frac{\pi}{2}$ поэтому при $|m| \geq \frac{\pi}{2}$ данное решение не имеет, а при $|m| < \frac{\pi}{2}$ $x = \tg m$

Примеры. Решить уравнение:

1. $\arctg x = -0,8$ Так как $-0,8 \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, то $x = \tg(-0,8) = -\tg 0,8$

2. $\arctg x = 1,9$ Так как $1,9 \notin \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, то $x = \emptyset$

г) $\operatorname{arccctg} x = m$

По определению $0 \leq \operatorname{arccctg} x \leq \pi$ поэтому при $m \leq 0$ или $m \geq \pi$ данное уравнение решений не имеет, а при $0 < m < \pi$ $x = \operatorname{ctg} m$

Примеры решить уравнения:

1. $\operatorname{arccctg} x = -0,3\pi$ Так как $-0,3\pi \notin]0; \pi[$, то $x = \emptyset$

2. $\operatorname{arccctg} x = 0,6\pi$ Так как $0,6\pi \in]0; \pi[$, то $x = \operatorname{ctg} 0,6\pi$

1.2. Уравнение, содержащие аркфункции из сложного аргумента, или различные аркфункция.

Такие уравнения можно решать сведением их к равносильной им системе уравнений и неравенств (характеризующих область определения данного уравнения) или непосредственные вычисления значений какой-либо тригонометрической функции обеих его частей. В последнем случае проверка найденных значений переменной является составной частью решения, так как указанная преобразование может привести к уравнению с более широкой областью определения, чем той, которая была у исходного уравнения, и поэтому возможно появление посторонних корней.

Примеры.

- а) Решить уравнение сведение их к равносильной им системе уравнений и неравенств.

1. $\arccos(x^2 - 2) = \pi$

Данное уравнение равносильно такой системе:

$$\begin{cases} |x^2 - 2| \leq 1, \\ x^2 - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 2| \leq 1, \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ответ: $\{-1; 1\}$

2. $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x}$

Область определения данного уравнения удовлетворяют условию:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq 1-x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

На $[0; 1]$ $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}$. Поэтому данное уравнение можем свести к такой, равносильно ему системе:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ \arccos \sqrt{1-x^2} = \arccos \sqrt{1-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 1-x^2 = 1-x \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ x(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 1 \end{cases}$$

Ответ: $\{0; 1\}$.

3. $\arcsin x + \arcsin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$

Если уравнение содержит сумму (разность) двух аркфункций, то целесообразно одну из них уединить:

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{2}$$

Область определения данного уравнения удовлетворяют условию:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Из данного уравнения видим, что при $x < 0$ оно решение не имеет. Поэтому берём $0 \leq x \leq 1$

На $[0; 1]$ $\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{2} = \arcsin \frac{x}{2}$, а $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}$

Поэтому исходное уравнение можем заменить равносильно ему системой:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ \arccos \sqrt{1-x^2} = \arccos \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{1-x^2} = \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 1-x^2 = \frac{x^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ x = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

ответ: $\left\{\frac{2\sqrt{5}}{5}\right\}$.

4. $3(\arcsin x)^2 - 10 \arcsin x + 3 = 0$

С помощью подстановки $\arcsin x = t$ свведём данное уравнение равносильно ему системе:

$$\begin{cases} \arcsin x = t, \\ 3t^2 - 10t + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arcsin x = t, \\ t = \frac{1}{3} \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arcsin x = t, \\ \arcsin 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \sin \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\sin \frac{1}{3}\right\}$.

б) Решить уравнения непосредственным вычислением значения какой-либо тригонометрической функции обеих его частей.

1. $\operatorname{arccctg} x + \operatorname{arccctg} 2x = \frac{3\pi}{4}$

Вычислим, например, котангенс обеих частей уравнения. Получим уравнение – следствие данного уравнения:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x (\operatorname{arccctg} x + \operatorname{arccctg} 2x) &= \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = \frac{\operatorname{ctg} x (\operatorname{arccctg} x) \cdot \operatorname{ctg} x (\operatorname{arccctg} 2x) - 1}{\operatorname{ctg} x (\operatorname{arccctg} x) + \operatorname{ctg} x (\operatorname{arccctg} 2x)} = -1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x \cdot 2x - 1}{x + 2x} = -1 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 1}{3x} = -1 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 3x - 1}{3x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3x - 1 = 0 \\ 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Проверка. Так как при $x < 0$, $\operatorname{arccctg} x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ и $\operatorname{arccctg} 2x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, то $\operatorname{arccctg} \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} + \operatorname{arccctg} \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} > \pi$. Поэтому $\frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$ не корень данного уравнения.

Вычислим:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x \left(\operatorname{arccctg} \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} + \operatorname{arccctg} \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \right) &= \left(\frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \cdot \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} - 1 \right) : \left(\frac{-3 + \sqrt{17}}{4} + \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{18 - 6\sqrt{17}}{6\sqrt{17} - 18} = -1 \end{aligned}$$

Тогда $\operatorname{arccctg} \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} + \operatorname{arccctg} \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} = \operatorname{arccctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$

Поэтому $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$ корень данного уравнения.

Ответ: $\left\{\frac{-3 + \sqrt{17}}{4}\right\}$.

2. $\arcsin 2x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{2x} = \frac{\pi}{2}$

Уединим $\arcsin 2x$, а $\operatorname{arctg} \frac{1-x}{2x}$ заменим на $\operatorname{arccctg} \frac{1-x}{2x}$ и возьмём синусы от обеих частей уравнения. Получим уравнение – следствие данного уравнения:

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin 2x) &= \sin\left(\operatorname{arccctg} \frac{1-x}{2x}\right) \Leftrightarrow 2x = 1 : \sqrt{1 + \frac{(1-x)^2}{4x^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x(5x - 2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Проверка. При $x = \frac{2}{5}$ левая часть данного уравнения имеет вид: $\arcsin \frac{4}{5} + \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$ и заключена на промежутке $]0; \pi[$

Вычислим его косинус:

$$\begin{aligned}\cos\left(\arcsin\frac{4}{5} + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right) &= \cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right) \cdot \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right) - \sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right) \cdot \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right) \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} - \frac{4}{5} \cdot \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 5} = 0\end{aligned}$$

Тогда $\arcsin\frac{4}{5} + \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

Поэтому $x = \frac{2}{5}$ – корень данного уравнения.

Ответ: $\left\{\frac{2}{5}\right\}$

2. Системы уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции.

Примеры. Решить систему уравнений:

$$1. \begin{cases} \arcsin x \cdot \arccos y = \frac{\pi^2}{12}, \\ \arccos x \cdot \arcsin y = \frac{\pi^2}{24} \end{cases}$$

Решение.

Выведём постановку $\arcsin x = u, \arccos y = v$

Тогда $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - u, \arcsin y = \frac{\pi}{2} - \arccos y = \frac{\pi}{2} - v$

В результате приходим к такой, равносильной данной системе:

$$\begin{cases} \arcsin x = u, \\ \arccos y = v, \\ uv = \frac{\pi^2}{12}, \\ \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \frac{\pi^2}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arcsin x = u, \\ \arccos y = v, \\ uv = \frac{\pi^2}{12}, \\ u + v = \frac{7\pi^2}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arcsin x = u, \\ \arccos y = v, \\ \begin{cases} u = \frac{\pi}{3}, \\ v = \frac{\pi}{4}, \end{cases} \\ \begin{cases} u = \frac{\pi}{3}, \\ v = \frac{\pi}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arcsin x = \frac{\pi}{3}, \\ \arccos y = \frac{\pi}{4}, \\ \arcsin x = \frac{\pi}{3}, \\ \arccos y = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$.

$$2. \begin{cases} \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} y = \frac{\pi}{4}, \\ xy = 6 \end{cases}$$

Решение.

Возьмём котангенс от обеих частей первого уравнения. Получим систему – следствие данной системы уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} y) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}, \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{xy - 1}{x + y} = 1, \\ xy = 6 \end{cases}$$

Из второго уравнения системы видим, что x и y отличны от нуля и имеют одинаковые знаки. Поэтому $x + y \neq 0$ и, следовательно, полученная система равносильна такой:

$$\begin{cases} xy - 1 = x + y, \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ x = 3, \\ y = 2 \end{cases}$$

Проверка показывает, что обе пары $(2; 3)$ и $(3; 2)$ удовлетворяют данной системе уравнений.

Ответ: $\{(2; 3), (3; 2)\}$.

Есикова И.В., Козлов В.А.

Доказательство тождеств, содержащих обратные тригонометрические функции

*Армавирский государственный педагогический университет
(Россия, Армавир)*

doi: 10.18411/sr-10-08-2021-13

Аннотация

В статье изучаются тождества, содержащие обратные тригонометрические функции. Подробно описаны свойства таких функций и методы доказательства тождеств их содержащих. Приведено также большое количество примеров.

Ключевые слова: тригонометрические функции, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, тригонометрическое тождество.

1. Аркфункции, их свойства, графики.

1.1. Арксинус.

На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin$ непрерывна и возрастает, а поэтому имеет себе обратную функцию. Её называют арксинус и обозначают $\arcsin$.

Свойства функции, заданной формулой $y = \arcsin x$.

1. Область определения: $D(\arcsin) = [-1; 1]$
2. Множество значений: $E(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
3. Функция $\arcsin$ – непрерывна на $[-1; 1]$
4. Функция $\arcsin$ – нечетная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

1.2. Арккосинус.

На отрезке $[0; \pi]$ функция $\cos$ непрерывна и убывает, а поэтому имеет в себе обратное. Её называют арккосинус и обозначают $\arccos$.

Свойства функции, заданной формулой $y = \arccos x$

1. Область определения: $D(\arccos) = [-1; 1]$
2. Множество значений: $E(\arccos) = [0; \pi]$
3. Функция $\arccos$ непрерывна на $[-1; 1]$
4. Имеет место равенство: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

1.3. Арктангенс.

В интервале $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ функция $\tan$ непрерывна возрастает, а поэтому имеет себе обратную функцию. Её называют арктангенс и обозначают $\arctg$

Свойства функции, заданной формулой $y = \arctg x$

1. Область определения: $D(\arctg) =]-\infty; \infty[$
2. Множество значений: $E(\arctg) = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
3. Функция $\arctg$ непрерывна на $]-\infty; \infty[$
4. Функция $\arctg$ – нечетная: $\arctg(-x) = -\arctg x$