РАЗДЕЛ IV. ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Булатов В.Н., Тимонов Е.С., Худорожков О.В.

Методика аппроксимации оконного сигнала с неравномерными по времени выборками

Оренбургский государственный университет
(Россия, Оренбург)

doi: 10.18411/sr-10-08-2019-04

idsp: sciencerussia-10-08-2019-04

Аннотация

В работе приведена актуальность цифровой обработки сигналов с неравномерной дискретизацией в частотной области. Представлена методика составления алгоритма вычисления полинома по неравномерным по времени выборкам значений оконного сигнала. Полученный полином оконного сигнала на основе последующей равномерной дискретизации позволяет производить цифровой спектральный анализ посредством быстрого преобразования Фурье, обеспечивая при этом приемлемую точность.

Ключевые слова: неравномерная дискретизация, дискретное преобразование Фурье, полиномиальная интерполяция.

Annotation

The paper presents the relevance of digital signal processing with uneven sampling in the frequency domain. The method of preparation of the algorithm for computing the polynomial at uneven time sampling values of a windowed signal. The resulting polynomial of the window signal on the basis of the subsequent uniform sampling makes it possible to perform digital spectral analysis by means of discrete Fourier transform, while providing acceptable accuracy.

Key words: non-uniform sampling, discrete Fourier transform, polynomial interpolation.

В современных информационно-измерительных и управляющих системах (ИИУС) источниками измерительной информации являются в основном источники аналоговых сигналов $x(t)$, которые затем подвергаются аналогово-цифровому преобразованию (АЦП) с равномерной дискретизацией $T_{АЦП}$, в результате чего образуется массив выборок в виде чисел. Для цифровой обработки в частотной области подобных сигналов эффективно используются методы и их программная реализация в виде дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и, как частный случай, быстрого преобразования Фурье (БПФ). При этом массив выборок (цифровых отсчетов, связанных с моментом времени) разбивается на так называемые временные окна с числом $n+1$ отсчетов в виде $N(i \cdot T_{АЦП})$, $i=0,1,\dots, n$, где каждое окно подвергается спектральному разложению.

Однако при решении ряда задач, например, навигационными ИИУС по обнаружению зашумленных доплеровских сигналов, содержащих информацию о движении объекта, возникает необходимость нелинейно изменять масштаб времени зарегистрированного оконного сигнала для устранения частотной модуляции. Подобное изменение масштаба времени позволяет концентрировать максимум энергии оконного сигнала в искомой области частот, что позволяет существенно увеличить разрешающую способность ИИУС [1]. Но подобное изменение масштаба времени нарушает равномерность по времени расположения цифровых отсчетов $N_i = N(t_i) =$

$N(i \cdot T_{\text{АЦП}})$, где $t_i \neq i \cdot T_{\text{АЦП}}$, в результате чего $t_1 - t_0 \neq \dots \neq t_{i+1} - t_i \neq \dots \neq t_n - t_{n-1}$. Теперь для частотного анализа – чтобы использовать ДПФ или БПФ – приходится предварительно аппроксимировать сигнал по выборкам $N(t_i)$ степенным полиномом в виде

$$N(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k, \quad (1)$$

где a_k – коэффициенты многочлена, а затем функцию $N(t)$ подвергать равномерной дискретизации с интервалом Td :

$$Td = \frac{t_n - t_0}{L - 1}, \quad (2)$$

где L – число выборок, – чтобы получить новый массив выборок для применения к нему ДПФ (или БПФ) [1] при обработке сигнала в навигационной ИИУС.

Для решения указанной задачи аппроксимации могут быть использованы формулы Лагранжа, Ньютона, а также сплайн-функция. В данном случае была выбрана формула Ньютона для неравноотстоящих аргументов [3, с. 676], которая применительно к данному случаю примет следующий вид:

$$N(t) = N_0 + \sum_{k=1}^n \left(\Delta_{k1} \prod_{i=0}^{k-1} (t - t_i) \right), \quad (3)$$

где Δ_{k1} , $k = 1, 2, 3, \dots, n$ – разделенные разности k -го порядка, которые определяются по известным формулам [3, с. 676]. Индекс «1» в разделенной разности Δ_{k1} означает, что эти разделенные разности обязательно включают t_0 (в процессе вычисления Δ_{k1} формируются и другие разделенные разности $\Delta_{12}, \Delta_{13}, \dots, \Delta_{22}, \dots$, необходимые для промежуточных расчетов). Этот метод аппроксимации хорош тем, что, в отличие от формулы Лагранжа (и тем более, от сплайн-функции), позволяет в случае добавления, например, еще одного отсчета просто добавлять еще один шаг в вычисление (3).

На рисунке 1 приведен фрагмент программы вычисления разделенных разностей для среды Mathcad (авторы выбрали эту среду для лучшей визуализации существа данной работы, позволяющую сочетать алгоритм решения и его программную реализацию), аналогичной приведенной в [2].

Формальные разделенные разности
для нулевой строки двумерного массива:

$$i := 1..n + 1 \quad \Delta_{0,i} := N_{i-1}$$

Вычисление всех разделенных разностей:

$$\Delta := \begin{cases} \text{for } k \in 1..n \\ \text{for } m \in 1..n - k + 1 \\ \Delta_{k,m} \leftarrow \frac{\Delta_{k-1,m+1} - \Delta_{k-1,m}}{t_{m+k-1} - t_{m-1}} \end{cases} \Delta$$

Искомые разделенные разности $\Delta_{k,1} =$

Рисунок 1. Скриншот фрагмента программы вычисления $\Delta_{k,1}$ в среде Mathcad.

Из анализа рисунка 1 следует, что текст программы вычисления разделенных разностей $\Delta_{k,1}$ для любой среды вычисления не зависит от числа точек отсчета (от числа выборок, равных $n+1$), то есть, является универсальной.

произведений t_i , исходя из анализа (6), должна содержать число столбцов $n+1$ (от $l=0$ до $l=n$), а число строк – максимально возможное число сочетаний C_{max} (от $m=0$ до $m=C_{max}-1$). Преимущество построения приведенной на рисунке 2 матрицы заключается в том, что каждая последующая группа сочетаний при увеличении числа t_i на единицу поглощает полученные произведения $\Pi_{m,l}$ в предыдущей группе (группы очерчены кусочно-ломанными скобками краями вверх), что хорошо согласуется с оговоренными ранее свойствами формулы Ньютона. Число сочетаний для каждой группы вычисляется по формуле

$$C_p^q = \frac{p!}{q!(p-q)!}, \quad (10)$$

где p – число t_i в группе, q – число t_i , входящих в одно из сочетаний (рисунок 2).

Рисунок 2. Матрица целенаправленного формирования произведений моментов времени выборок как сочетаний

Например, для $n=6$ число строк $C_{max}=20$, число столбцов $n+1 = 7$. Текст программы вычисления указанных произведений в среде Mathcad для этого случая с комментариями приведен на рисунке 3. Из текста программы можно сделать вывод: если необходимо вычислить матрицу произведений с числом выборок меньше семи, то для этого достаточно в строках программы (2)-(6) подставить соответствующие верхние границы формируемых строк произведения. Например, при $n=5$ в строке (2) верхнюю границу для m нужно установить $C_5^2-1=9$, в строке (3) – $C_5^3-1=9$, в строке (4) – $C_5^4-1=4$, в строке (5) – $C_5^5-1=0$; в строке (6) – без изменения (вычислений не будет). Это свойство программы позволяет сделать ее «настраиваемой» под заданное число выборок, если это число не выходит за пределы верхней границы, предусмотренной в программе.

	Комментарии
<pre> Π := for m ∈ 0..19 for i ∈ 0..n Π_{m,i} ← 0 for m ∈ 0..n-1 Π_{m,1} ← t_m for m ∈ 0..14 Π_{m,2} ← t_{m-1}¹ if m = 0 t_{m-1}¹t₂ if 1 ≤ m < 3 t_{m-3}¹t₃ if 3 ≤ m < 6 t_{m-6}¹t₄ if 6 ≤ m < 10 t_{m-10}¹t₅ if 10 ≤ m < 15 for m ∈ 0..19 Π_{m,3} ← (Π_{m,2}¹t₂) if m = 0 (Π_{m-1,2}¹t₃) if 1 ≤ m < 4 (Π_{m-4,2}¹t₄) if 4 ≤ m < 10 (Π_{m-10,2}¹t₅) if 10 ≤ m < 20 for m ∈ 0..14 Π_{m,4} ← (Π_{m,3}¹t₃) if m = 0 (Π_{m-1,3}¹t₄) if 1 ≤ m < 5 (Π_{m-5,3}¹t₅) if 5 ≤ m < 15 for m ∈ 0..5 Π_{m,5} ← (Π_{m,4}¹t₄) if m = 0 (Π_{m-1,4}¹t₅) if 1 ≤ m < 6 for m ∈ 0 Π_{m,6} ← Π_{m,5}t₅ Π_{0,0} ← 1 Π </pre>	<pre> ;m = 0...C_{max}-1 (1) ;m = 0...C₂¹-1 (2) ;m = C₂¹-1 ;C₂² <= m < C₃² ;C₃² <= m < C₄² ;C₄² <= m < C₅² ;C₅² <= m < C₆² ;m = 0...C₅²-1 (3) ;m = C₅²-1 ;C₅³ <= m < C₆³ ;C₆³ <= m < C₇³ ;C₇³ <= m < C₈³ ;m = 0...C₆³-1 (4) ;m = C₆³-1 ;C₆⁴ <= m < C₇⁴ ;C₇⁴ <= m < C₈⁴ ;m = 0...C₇⁴-1 (5) ;m = C₇⁴-1 ;C₇⁵ <= m < C₈⁵ ;m = 0...C₈⁵-1 (6) ;m = C₈⁵-1 ,для C₈⁵ = 1 </pre>

Рисунок 3. Скриншот программы вычисления в среде Mathcad произведений $\Pi_{m,l}$ сочетаний из t_i с комментариями

Для вычисления коэффициентов $\beta_{i-k}^{[i]}$ оказалось удобным использовать генерацию матрицы с размером $(n+1) \times (n+1)$ сумм произведений $\Pi_{m,l}$ в соответствии с выражением (6), результат которой представлен на рисунке 4.

$$\beta = \begin{bmatrix}
 1 & -\Pi_{0,1} & \Pi_{0,2} & -\Pi_{0,3} & \Pi_{0,4} & -\Pi_{0,5} & \dots & (-1)^n \Pi_{0,n} \\
 1 - \sum_{i=0}^1 \Pi_{i,1} & \sum_{i=0}^2 \Pi_{i,2} & -\sum_{i=0}^3 \Pi_{i,3} & \sum_{i=0}^4 \Pi_{i,4} & -\sum_{i=0}^5 \Pi_{i,5} & \dots & 0 \\
 1 - \sum_{i=0}^2 \Pi_{i,1} & \sum_{i=0}^{C_2^1-1} \Pi_{i,2} & -\sum_{i=0}^{C_3^1-1} \Pi_{i,3} & \sum_{i=0}^{C_4^1-1} \Pi_{i,4} & \dots & 0 & 0 \\
 1 - \sum_{i=0}^3 \Pi_{i,1} & \sum_{i=0}^{C_2^1-1} \Pi_{i,2} & -\sum_{i=0}^{C_3^1-1} \Pi_{i,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 1 - \sum_{i=0}^4 \Pi_{i,1} & \sum_{i=0}^{C_2^1-1} \Pi_{i,2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \Pi_{i,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

Рисунок 4. Матрица сумм произведений моментов времени выборок как сочетаний для вычисления коэффициентов $\beta_{i-k}^{[i]}$

На рисунке 5 представлена подобная матрица для семи выборок ($n=6$). Естественно ее можно использовать без всякого редактирования для числа выборок менее семи.

Для оценки погрешности аппроксимации оконного сигнала с неравномерной дискретизацией по представленной выше методике в качестве объекта для исследования лучше всего брать один период гармонического сигнала. На рисунке 6 представлен листинг программы в среде Mathcad формирования шести выборок из косинусоиды с начальной фазой $\pi/4$ с неравномерными по времени выборками. Далее,

располагая в этом листинге последовательно фрагменты программ, приведенных на рисунках 3 и 5, а также фрагмент программы, приведенной на рисунке 7, вычисляются коэффициенты степенного многочлена и формируется выражение для аппроксимации в виде функции времени $N(t)$.

$$\beta_{i-k}^{[i]} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta_{0,1} & \beta_{0,2} & -\beta_{0,3} & \beta_{0,4} & -\beta_{0,5} & \beta_{0,6} \\ 1 - \sum_{i=0}^1 \beta_{i,1} & 1 - \sum_{i=0}^2 \beta_{i,2} & 1 - \sum_{i=0}^3 \beta_{i,3} & 1 - \sum_{i=0}^4 \beta_{i,4} & 1 - \sum_{i=0}^5 \beta_{i,5} & 0 & 0 \\ 1 - \sum_{i=0}^2 \beta_{i,1} & 1 - \sum_{i=0}^3 \beta_{i,2} & 1 - \sum_{i=0}^4 \beta_{i,3} & 1 - \sum_{i=0}^5 \beta_{i,4} & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \sum_{i=0}^3 \beta_{i,1} & 1 - \sum_{i=0}^4 \beta_{i,2} & 1 - \sum_{i=0}^5 \beta_{i,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \sum_{i=0}^4 \beta_{i,1} & 1 - \sum_{i=0}^5 \beta_{i,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \sum_{i=0}^5 \beta_{i,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рисунок 5. Скриншот программы вычисления коэффициентов $\beta_{i-k}^{[i]}$

$$n := 5 \quad k := 0..n \quad T := 1 \quad \phi := \frac{\pi}{4}$$

$$a_0 := 0.24$$

$$a_1 := 0.45$$

$$a_2 := 0.61$$

$$a_3 := 0.86$$

$$a_4 := 1$$

$$N_k := \cos\left(2\pi \cdot \frac{k}{T} + \phi\right)$$

Рисунок 6. Скриншот программы в среде Mathcad формирования выборок из косинусоиды с неравномерной дискретизацией

Для оценки погрешности аппроксимации используется БПФ, для чего выражение $N(t)$ подвергается равномерной дискретизации с числом выборок – достаточным, чтобы погрешность самого БПФ ощутимо не сказывалась на общей погрешности преобразования. В качестве оценки указанной погрешности используются отклонение амплитуды спектральной составляющей косинусоиды, ее начальное значение фазы, а также коэффициент гармоник (достаточно 5), которые появляются в результате аппроксимации и являются паразитными.

$$a_0 := \sum_{i=0}^n (\Delta_{i,1} \cdot \beta_{0,i}) \quad a_1 := \sum_{i=1}^n (\Delta_{i,1} \cdot \beta_{1,i-1}) \quad a_2 := \sum_{i=2}^n (\Delta_{i,1} \cdot \beta_{2,i-2})$$

$$a_3 := \sum_{i=3}^n (\Delta_{i,1} \cdot \beta_{3,i-3}) \quad a_4 := \sum_{i=4}^n (\Delta_{i,1} \cdot \beta_{4,i-4}) \quad a_5 := \sum_{i=5}^n (\Delta_{i,1} \cdot \beta_{5,i-5})$$

$$N(t) := a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

$$\text{Дискретизация: } L_0 := 256 \quad Td := \frac{T}{L_0 - 1} \quad i := 0..L_0 - 1 \quad N_{di} := N(iTd)$$

$$\text{Сигнал: } U_{in} := 2 \cdot \frac{\text{fft}(N)}{\sqrt{L}} \quad |U_{in}| := 1.007 \quad (\text{погрешность амплитуды } 0.7\%)$$

$$K_g := \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^5 |U_{in,i}|^2}}{|U_{in,1}|} = 0.036 \quad (\text{коэффициент гармоник } 3.6\%)$$

$$\phi_1 := \arg(U_{in,1}) \quad \Delta\phi_1 := 360 \cdot \frac{|\phi_1| - \frac{\pi}{4}}{\pi} = 0.914 \quad (\text{погрешность по фазе } 0.914 \text{ градуса})$$

Рисунок 7. Скриншот программы оценки погрешности аппроксимации

1. Булатов В.Н. Применение спектрально-временных методов в доплеровских системах: монография / В.Н.Булатов, Н.А. Косарев, О.В. Худорожков. – Оренбург: ООО ИПК «Университет», 2012. – 196 с.: ил.
2. Булатов В.Н. Спектральное преобразование сигналов с неравномерной дискретизацией / В.Н. Булатов, О.Худорожков // Вестник ТГТУ, 2017. – Т.23. – №1. – С.33-47.
3. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров): Пер. с англ. / Г. Корн, Т. Корн; под ред. И.Г. Арамановича. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 832 с.: ил.
4. Мамонтов Д.В. Алгоритм формирования комбинаций при расчете пе-рестановок, размещений и сочетаний/ Д.В.Мамонтов, С.Б.Волошин. – URL: <http://voloshin-sb.ru/Portals/16/doc/scientific%20articles/2combinator2.pdf> (дата обращения: 18.07.2019).