РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

Голышева Е.А.¹, Пушкина О.Н.², Ланкин С.В.²

Элементы теории вероятности при изучении молекулярной физики

¹Новосибирский государственный университет
(Россия, Новосибирск)

²Благовещенский государственный педагогический университет
(Россия, Благовещенск)

doi: 10.18411/sr-10-08-2019-02

idsp: sciencerussia-10-08-2019-02

Аннотация

В российских вузах курс «Молекулярная физика» изучается на младших курсах. Проблема преподавания заключается в том, что абитуриенты очень плохо знают элементы теории вероятности за школьный курс. В работе предлагается метод восполнения пробелов по вопросам теории вероятности и математической статистики, которые можно проводить на всех видах занятий по молекулярной физике (лекции, практические занятия). Приведены примеры задач. Новый подход позволил увеличить качество знаний и интерес к курсу общей физике в вузе.

Ключевые слова: теория вероятности, определение среднего, теорема сложения и умножения вероятностей, примеры физических задач

Анализ учебных планов многих Российских университетов показывает, что при построении учебных курсов по физике не всегда учитываются принципы преемственности содержательной компоненты образования, благодаря которым студенты могли бы постепенно и логично усваивать новые объемы информации и наращивать каркас знаний. Физика – дисциплина, насыщенная сложным математическим содержанием. Не является исключением и раздел «Молекулярная физика». Для его усвоения требуется владение обширным математическим аппаратом: умение дифференцировать и интегрировать, а также понимание статистической сущности изучаемых явлений. В большинстве вузов курс молекулярной физики изучается на первом курсе, когда еще не до конца изучены методы математического анализа, а о статистике студенты пока не имеют представления. Теория вероятностей и математическая статистика изучаются чаще всего на третьем курсе. Школьные знания из области теории вероятностей и математической статистики являются недостаточными для понимания сути физических явлений. В большинстве школьных учебников по математике отсутствуют понятия дисперсии, среднего квадратического отклонения, законов распределения вероятностей.

Таким образом, в процессе изучения молекулярной физики необходимо уделять внимание вопросам теории вероятностей и математической статистики: необходимо проводить короткие математические беседы на дополнительных консультациях или на аудиторных занятиях (либо в начале, либо в конце занятия), задавать на дом небольшие математические задания, выполнение которых поможет в решении физических задач [1-3].

При изучении распределений Максвелла и Больцмана, потоков необходимо повторить известные из школьного курса математики определения теории вероятностей, но уже в отношении физических явлений [2,4]:

1) определение вероятности реализации какого-либо состояния (L_i) произвольной системы, если состояния данной системы образуют дискретный ряд, через отношение числа измерений, которые дают это состояние к числу всех измерений:

$$w_{L_i} \approx \frac{N_i}{N} \quad (1)$$

2) или как отношение времени, в течение которого система находилась в этом состоянии ко всему времени измерений (здесь предполагается, что измерения проводятся через некоторый промежуток времени);

3) определение среднего;

4) теорему сложения вероятностей для несовместных событий и теорему умножения вероятностей для независимых событий.

Повторение основных понятий целесообразно осуществлять через элементарные примеры. Например, можно задать вопрос о том, как определить средний размер ноги у студентов группы; обсудить, что для решения было бы удобно сначала записать, у скольких студентов определенный размер ноги, что позволит перейти к следующему виду определения среднего:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i^N n_i x_i}{N} = \sum_i^N \frac{n_i}{N} x_i, \quad (2)$$

где n_i – число элементов, имеющих значение x_i , i пробегает группы элементов, рассортированных по значениям, а N – объекты системы. Далее можно опять вернуться к задаче со средним размером ноги, однако теперь необходимо найти способ рассчитать средний размер ноги студентов в городе. Таким образом, осуществляется переход от отношения $\frac{n_i}{N}$ к вероятности обнаружить определенный размер ноги, и затем к плотности вероятностей.

Уместно представить дискретные данные в виде таблицы (таблица 1) с целью обнаружить одно важное свойство вероятностей: сумма вероятностей во второй строке таблицы равна 1.

Таблица 1

Распределение значений признака по вероятностям

Значение признака	x_1	x_2	x_3		x_k
вероятность	p_1	p_2	p_3		p_k

Наконец, остается совершить переход от дискретного распределения к непрерывному распределению. Здесь можно упомянуть про длину стопы ноги, которая, в общем-то, не является дискретной величиной, тогда

$$\bar{x} = \int_{\Omega} x dW(x), \quad (3)$$

где $dW(x)$ – распределение величины x , Ω – вся область определения x . Аналогично дискретному распределению следует отметить одно важное свойство плотности распределения вероятностей (условие нормировки). Здесь можно предложить к решению задачи 1-3.

Задача 1. Оценить, сколько автобусов (в среднем) находится на линии в городе N , если в городе проживает около 200 тысяч человек. В качестве оценки принять, что каждый человек ежедневно проводит в автобусе в среднем 0,25 часа, а средняя вместимость автобуса примерно 36 человек.

Задача 2. Материальная точка колеблется по закону $x = \sin \omega t$. Найти вероятность того, что при случайном измерении ее положения она будет обнаружена в интервале $(x, x + dx)$.

Задача 3. Найти среднее значение величины x , ее среднее квадратичное значение, среднюю квадратичную флуктуацию и относительную флуктуацию, если $dW(x) = \text{const} \cdot \exp(-\alpha x) dx$, где $\alpha > 0$.

На практическом занятии «Распределение Максвелла по скоростям» полезно повторить вывод распределения. В данном выводе вводится функция $g(v)$ – функция распределения по абсолютной скорости. Так как все направления скорости равновероятны, то в соответствии с принципом умножения вероятностей имеем:

$$g(v) = f(v_x)f(v_y)f(v_z), \quad (4)$$

где $f(v_i)$ – функция распределения по координате скорости. Далее это соотношение логарифмируется, а затем дифференцируется по координате скорости. Здесь важно пояснить, что функция распределения $g(v)$ – сложная функция и дифференцируется, как сложная функция $g(v(v_x, v_y, v_z))$. В завершение занятия следует представить функции плотности распределения графически, обсудить их зависимость от температуры, изобразить графики функции при различных температурах.

Можно обсудить наиболее вероятную скорость как наиболее вероятное значение модуля скорости, среднюю проекцию скорости на ось, среднюю и среднеквадратичную скорости, вывод которых будет сделан на следующем занятии, здесь же можно кратко обсудить способ поиска значений вышеуказанных скоростей и обсудить их смысл.

В качестве домашнего задания можно дать задачу 4.

Задача 4. Зная, что вероятность обнаружить точку в промежутке $x \div x + dx$ пропорциональна $x^2 + 2x$, где $0 \leq x \leq 1$, а в промежутке $y \div y + dy$ пропорциональна $y^2 - 1$, где $0 \leq y \leq 1$, найти вероятность найти точку в прямоугольнике $x \div x + dx, y \div y + dy$.

Практика показывает, что у студентов часто возникают проблемы с пониманием отличия между средним от произведения и произведением средних. Особенно эта проблема заметна при определении давления. С целью показать разницу между произведением средних и средним произведения, достичь понимания, каким из этих двух выражений записывается давление газа, можно предложить студентам выполнить задачу 5.

Задача 5. Вычислить значения следующих выражений: $2m\langle v_x \rangle$, $v_x \geq 0$; $2m \int_0^\infty v_x dJ(v_x)$. Почему ответы различны? Какое из этих выражений имеет физический смысл? Какой?

После темы «Броуновское движение» можно предложить домашнюю лабораторную работу, позволяющую увидеть связь между биномиальным, нормальным распределениями и распределением для свободных блужданий, увидеть, как меняется распределение по отклонениям в случае дискретных шагов определенной длины от количества сделанных шагов.

Пример домашней лабораторной работы. Рассмотрим дискретные блуждания частицы с определенной длиной шага и одинаковой вероятностью выбора направления (вправо и влево). Пусть частицей сделано 7 шагов, сколько из них может быть сделано вправо? Примите за успех шаг вправо. Найдите вероятности того, что из 7 шагов вправо будет сделано 0, 1, 2...7 шагов. Заполните таблицу 2. Постройте график распределения вероятностей. Как положение частицы вдоль координатной оси связано с числом успехов? Где на этой оси находится начало координат. Найдите сумму вероятностей. Посмотрите, что изменится при увеличении количества шагов (рассмотрите случаи $n = 15, n = 30$). Что случится, если вероятность шага вправо станет равной 0,25? Какую физическую характеристику нужно внести в модель данной задачи, чтобы изменить вероятность шага вправо?

Таблица 2

Вероятность числа успехов

Число успехов k	0	1	2	3	4	5	6	7
Вероятность числа успехов $P_n(k)$								

Выполнение данной лабораторной работы не займет много времени, поскольку производится в приложении Excel. Необходимо только позаботиться о том, чтобы у студентов были необходимые инструкции для выполнения работы.

Практика показывает, что внедрение в процесс обучения молекулярной физике элементов стохастики (с опорой на школьный опыт студентов, на их интуицию) приводит к повышению качества изучаемого предмета. Включение элементов стохастики в процесс

изучения физики вовсе не делает ненужным для физиков изучение теории вероятностей и математической статистики на третьем курсе. Для того чтобы обучение теории вероятностей и статистике было качественным, следует решать со студентами не только математические задачи, но и задачи с физическим смыслом. Ниже приведены задачи 5-14, которые можно решать не только при изучении физики, но и на занятиях по теории вероятностей.

Задача 5. По нити, натянутой в трубке с высоким вакуумом, идет электрический ток. При этом происходит эмиссия электронов. Вероятность испускания электронов нитью в течение некоторого малого промежутка времени Δt равна p . Определите: средний заряд $\bar{Q}$, испущенный нитью за время t , дисперсию заряда $(\Delta Q)^2$ за это же время, отношение дисперсии тока $(\Delta I)^2$ к среднему току $\bar{I}$, стандартное отклонение тока.

Задача 6. В сосуде объемом V находятся $N = 20$ молекул. Какова вероятность того, что все эти молекулы будут находиться только в одной из половин сосуда?

Задача 7. Определите долю молекул водорода, модули скоростей которых при температуре $t = 27^\circ\text{C}$ лежат в интервале скоростей от 1898 м/с до 1903 м/с .

Задача 8. Газ находится в тепловом равновесии в поле силы тяжести. Определите процент молекул, у которых потенциальная энергия больше их средней кинетической энергии поступательного движения.

Задача 9. Сосуд объемом V_0 разделён перегородкой на две части с объемами $V_1 = \frac{2}{3}V_0$ и $V_2 = \frac{1}{3}V_0$. В большей части находится $0,1$ моль идеального газа, в меньшей же создан высокий вакуум. Определите изменение энтропии при удалении перегородки.

Задача 10. Макроскопическая система поглощает $\Delta E = 10^{-20}\text{ Дж}$ энергии. При этом число доступных состояний системы увеличивается на 10% . Какова была температура этой системы?

Задача 11. Вероятность того, что молекула, пройдя без столкновения путь x , испытывает соударение на отрезке $x + \Delta x$, равна $\omega(x) = Ae^{-x/\lambda}$, где A – постоянный коэффициент, λ – средняя длина свободного пробега. Определите относительное число молекул, длина свободного пробега которых меньше $0,5\lambda$.

Задача 12. Каковы вероятности заполнения электронами энергетических уровней, расположенных на $0,02\text{ эВ}$ выше и соответственно ниже уровня Ферми в натрии при $T = 300\text{ К}$, если для натрия $E_F = 3,12\text{ эВ}$?

Задача 13. Какая часть свободных электронов в металле при температуре $T = 0\text{ К}$ обладает энергией, большей $\frac{3}{4}T_F$?

Задача 14. Определите, во сколько раз увеличивается статистический вес моля воды при переходе ее из жидкого состояния в газообразное состояние при температуре 100°C .

Включение элементов теории вероятности в процесс изучения молекулярной физики в вузе (с опорой на школьные знания студентов и их интуицию), а затем решение физических задач при изучении теории вероятностей и статистики на старших курсах позволит обеспечить более качественную подготовку как будущих учителей физики, так и будущих специалистов в области физики.

1. Радченко, И.В. Молекулярная физика: Учеб. пособие / И.В. Радченко. – М.: Наука, 1965. – 479 с.
2. Савельев, И.В. Курс общей физики: в 4 т. Т. 4. Сборник вопросов и задач по общей физике: учеб. Пособие / И.В. Савельев. – М.: КНОРУС, 2009. – 384 с.
3. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная физика / Д.В. Сивухин. – 1990. – 552 с.
4. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2 т. Т. 1 / В. Феллер : Пер. с англ. – М. : Мир, 1984. – 528 с.