РАЗДЕЛ VII. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Архангельская Е.В.

Компьютерная реализация метода динамического программирования

Саратовская государственная юридическая академия
(Россия, Саратов)

doi: 10.18411/sr-10-08-2017-18

idsp: 000001:sr-10-08-2017-18

Аннотация

В статье рассматривается возможность использования компьютерной программы MicrosoftExcel для решения задачи об оптимальном распределении ресурсов методом динамического программирования. Разработанный программный код учитывает особенность метода динамического программирования, в котором расчеты на этапе условной оптимизации оформляются в виде таблицы.

Ключевые слова: динамическое программирование, оптимальное распределение ресурсов, условная оптимизация, безусловная оптимизация.

Метод динамического программирования используется для решения широкого спектра задач оптимизации таких, как оптимальное распределение ресурсов, управление запасами и т.п. Данный метод оптимизации предполагает разбиение процесса решения на отдельные этапы – шаги. На каждом шаге ищется такое управление системой, которое является лучшим для всего процесса в целом. Реализация методов пошаговой оптимизации получила большое развитие с появлением средств компьютерной техники. В статье описывается процесс решения задачи о распределении начальной суммы средств с целью получения максимальной прибыли. Для ее решения используется метод динамического программирования, и вычисления на каждом шаге осуществляются с помощью компьютерной программы. Данная разработка может использоваться для обучения методам оптимизации студентов различных экономических специальностей.

Задача о вложении средств формулируется следующим образом: необходимо распределить начальную сумму средств ξ_0 между предприятиями. Доход на каждом предприятии в зависимости от вложенных средств представлен в табличной форме. Общий доход равен сумме доходов, полученных на всех предприятиях. Нужно определить, какое количество средств выделить каждому предприятию, чтобы общий доход был максимальным. Число шагов при решении данной задачи методом динамического программирования равно числу предприятий. Расчеты на каждом шаге заносятся в таблицы. Во многих учебниках по динамическому программированию в расчетах участвуют две таблицы – основная, в которую заносятся результаты условной оптимизации на каждом шаге, и вспомогательная, в которой выполняются все действия по вычислению дохода на каждом этапе. В связи с этим у автора статьи возникла идея использовать для автоматизации процесса решения программу, обрабатывающую табличные данные. Для разработки был выбран широко распространенный программный продукт – табличный редактор MicrosoftExcel 2010.

Таблица 1

Доход от вложенных средств на каждом предприятии

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	0	0
100	15	8	10	12
200	16	17	12	15
300	18	20	17	16
400	24	25	22	23

Рассмотрим реализацию решения задачи о распределении средств на конкретном примере. Начальную сумму средств в размере 400 денежных единиц нужно распределить между четырьмя предприятиями. Средства выделяются в размерах, кратных 100. Доходы, получаемые от предприятий в зависимости от вложенной суммы, заданы таблично (табл. 1).

В данной задаче $\xi_0 = 400$, $n = 4$. Целевая функция, выражающая общий доход,

$$\sum_{i=1}^4 f_i(x_i)$$

имеет вид . Переменные x_1, x_2, x_3, x_4 , выражающие количество денежных средств, которые нужно вложить в каждое предприятие, должны быть неотрицательны и

$$\sum_{i=1}^4 x_i$$

удовлетворять условию $\sum_{i=1}^4 x_i = \xi_0$. Первым этапом процесса решения задачи является условная оптимизация. В данном конкретном примере условная оптимизация состоит из четырех шагов по числу предприятий. Начинается она с последнего четвертого шага. Вычисления на каждом шаге определяются параметром состояния системы ξ_{i-1} – остатком средств после распределения на предыдущих шагах. Условная оптимизация начинается с последнего, в данном случае, с четвертого шага. Так как на четвертом шаге процесс вложения средств завершается, то не нужно учитывать его влияние на последующие шаги, поэтому критерием эффективности для данного шага при определении оптимального управления является следующее выражение

$$Z_4^*(\xi_3) = \max_{0 \leq x_4 \leq \xi_3} \{f_4(x_4)\}$$

. Все расчеты в файле Excel удобнее производить в таблице, представленной ниже (рис. 1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	x / ξ	f_1	f_2	f_3	f_4	Z_4^*	x_4^*	Z_3^*	x_3^*	Z_2^*	x_2^*	Z_1^*	x_1^*
2	0	0	0	0	0	0	0						
3	100	15	8	10	12	12	100						
4	200	16	17	12	15	15	200						
5	300	18	20	17	16	16	300						
6	400	24	25	22	23	23	400						

Рис. 1. Таблица с данными 4-го шага условной оптимизации

Расчеты на последнем шаге осуществляются следующим образом, рассматриваются варианты в зависимости от ξ_3 :

$\xi_3 = 0$, тогда $x_4 = 0$, $Z_4^* = 0$, $x_4^* = 0$;

$\xi_3 = 100$, тогда $x_4 = 0, 100$, $Z_4^* = \max \{0, 12\} = 12$, $x_4^* = 100$;

$\xi_3 = 200$, тогда $x_4 = 0, 100, 200$, $Z_4^* = \max \{0, 12, 15\} = 15$, $x_4^* = 200$;

и т.п.

Таким образом, при решении задачи в Excel, исходя из логики исходных данных, что большему вложению средств соответствует большая прибыль, для получения значений Z_4^* нужно перенести данные из ячеек столбца Ев столбец F, и данные из ячеек столбца Ав столбец G (рис. 1).

На всех остальных шагах условной оптимизации критерий оптимизации имеет вид

$$Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{0 \leq x_k \leq \xi_{k-1}} \{f_k(x_k) + Z_{k+1}^*(\xi_k)\}$$

, в нашем случае $k = 1, 2, 3$. Также учитываются уравнения состояния системы $\xi_k = \xi_{k-1} - x_k$. Рассмотрим подробно реализацию третьего шага.

$$Z_3^*(\xi_2) = \max_{0 \leq x_3 \leq \xi_2} \{f_3(x_3) + Z_4^*(\xi_3)\}$$

Для третьего шага , $\xi_3 = \xi_2 - x_3$, и рассматриваются варианты вложения средств в зависимости от ξ_2 :

$\xi_2 = 0$, тогда $x_3 = 0$, $Z^*3 = \max\{f_3(0) + Z^*4(0)\} = \max\{0 + 0\} = 0$;
 $\xi_2 = 100$, тогда $x_3 = 0, 100$, $\xi_3 = 100, 0$, $Z^*3 = \max\{f_3(0) + Z^*4(100), f_3(100) + Z^*4(0)\} = \max\{0 + 12, 10 + 0\} = 12$, $x^*3 = 0$;
 $\xi_2 = 200$, тогда $x_3 = 0, 100, 200$, $\xi_3 = 200, 100, 0$, $Z^*3 = \max\{f_3(0) + Z^*4(200), f_3(100) + Z^*4(100), f_3(200) + Z^*4(0)\} = \max\{0 + 15, 10 + 12, 12 + 0\} = 22$, $x^*3 = 100$;
 аналогично
 $\xi_2 = 300$, тогда $x_3 = 0, 100, 200, 300$, $\xi_3 = 300, 200, 100, 0$, $Z^*3 = \max\{0 + 16, 10 + 15, 12 + 12, 17 + 0\} = 25$, $x^*3 = 100$;
 $\xi_2 = 400$, тогда $x_3 = 0, 100, 200, 300, 400$, $\xi_3 = 400, 300, 200, 100, 0$, $Z^*3 = \max\{0 + 23, 10 + 16, 12 + 15, 17 + 12, 22 + 0\} = 29$, $x^*3 = 300$.

Как видно из вычислений, при нахождении критерия оптимальности на третьем шаге используется следующий алгоритм. При первом порядковом значении $x_3 = 0$ ищется максимум из одного числа, которое в таблице Excel является суммой ячеек D2 и F2. При втором порядковом значении $x_3 = 100$ определяется максимум двух чисел, а именно сумм значений ячеек D2 + F3 и D3 + F2, т.е. для данного x_3 первая ячейка значений f_3 суммируется с последней ячейкой значений Z^*4 , вторая ячейка значений f_3 суммируется с предпоследней значений Z^*4 . При третьем порядковом значении $x_3 = 200$ нужно найти максимум трех чисел D2 + F4, D3 + F3 и D4 + F2, т.е. в соответствующих столбцах суммируются первая ячейка с последней, вторая с предпоследней, третья ячейка значений столбца D с третьей с конца ячейкой столбца F. Аналогичным образом для $x_3 = 300$ и $x_3 = 400$ определяется максимум четырех и пяти чисел соответственно. Такие же вычисления проводятся для определения критерия оптимальности на втором шаге условной оптимизации, только наибольшее значение ищется среди соответствующих сумм ячеек столбца C (значений f_2) и ячеек столбца H (значений Z^*3 , найденных на третьем шаге). На первом шаге в подобных вычислениях используются ячейки столбцов B и J.

Для автоматизации расчетов при решении задачи описанный алгоритм можно реализовать в среде программирования VBA Excel. Решение поставленной задачи выполняет следующая программа:

```

q = 0
For n = 1 To 3
    k = 0
    Form = 0 To 4
        k = k + 1
        Max = Cells(2, 4 - q / 2) + Cells(2 + k - 1, 6 + q)
        x = Cells(2, 1)
        For j = 1 To k - 1
            d = Cells(2 + j, 4 - q / 2) + Cells(2 + k - j - 1, 6 + q)
            If d > Max Then Max = d: x = Cells(2 + j, 1)
        Next j
        Cells(2 + k - 1, 8 + q) = Max
        Cells(2 + k - 1, 8 + 1 + q) = x
    Next m
    q = q + 2
Next n
    
```

В данном программном коде внешний цикл по переменной отвечает за число шагов условной оптимизации без последнего шага. Т.к. на последнем четвертом шаге для определения значений критерия оптимизации данные ячеек столбца E переносятся в ячейки столбца F, то расчеты нужно произвести для трех шагов – третьего, второго и первого. Внутренний цикл по переменной определяет значения возможных вариантов вложения средств, т.к. изначально известно, что средства вкладываются в размерах, кратных 100, то известно и количество вариантов, поэтому цикл организован от 0 до 4,

что позволяет использовать программу для решения однотипных задач, в которых можно менять начальную сумму средств и размеры вкладываемых средств, но при этом число возможных вариантов вложения должно быть равно 5, как в поставленной задаче. Далее определяется максимальное значение критерия оптимальности для каждого x согласно выше приведенному алгоритму, после чего найденные числа записываются в соответствующие ячейки. Переменная q_v в данном программном коде формирует номера столбцов для вывода значений, ее значения позволяют учитывать особенность приведенной выше таблицы, в которой исходные значения функций f_1, f_2, f_3, f_4 записаны в соседних столбцах, а значения критериев оптимальности $Z^*_4, Z^*_3, Z^*_2, Z^*_1$ в ходе работы программы записываются через один столбец. После выполнения приведенного выше программного кода условная оптимизация как первый этап решения поставленной задачи динамического программирования будет завершена, все полученные числовые данные будут внесены в таблицу (рис. 2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	x / ξ	f_1	f_2	f_3	f_4	Z^*_4	x^*_4	Z^*_3	x^*_3	Z^*_2	x^*_2	Z^*_1	x^*_1
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	100	15	8	10	12	12	100	12	0	12	0	15	100
4	200	16	17	12	15	15	200	22	100	22	0	27	100
5	300	18	20	17	16	16	300	25	100	30	100	37	100
6	400	24	25	22	23	23	400	29	300	39	200	45	100

Рис. 2. Таблица с данными этапа условной оптимизации после выполнения программного кода

Вторым этапом решения задач динамического программирования является безусловная оптимизация. В рассматриваемой задаче безусловная оптимизация осуществляется на основе уравнений состояния системы на каждом шаге, начиная с первого: $\xi_k = \xi_{k-1} - x_k, k = 1, 2, 3, 4$.

На первом (последнем по порядку выполнения) шаге безусловной оптимизации получаем: т.к. $\xi_0 = 400$ то из таблицы расчетов (рис. 2) видно, что максимальная прибыль от вложения средств в предприятия отображается в ячейке L6 и составляет 45 денежных единиц, т.е. $Z^*_1(400) = 45$. Значение ячейки M6 соответствует оптимальному управлению на первом шаге, т.е. первому предприятию нужно выделить 100 денежных единиц из начальной суммы средств, т.к. $x^*_1(400) = 100$.

Далее определяем оптимальные управления на каждом шаге из соответствующих уравнения состояния системы:

на втором шаге $\xi_1 = \xi_0 - x_1 = 400 - 100 = 300$, значит оптимальным управлением на данном шаге является $x^*_2(300) = 100$, его значение отображается в ячейке K5;

на третьем шаге $\xi_2 = \xi_1 - x_2 = 300 - 100 = 200$, поэтому оптимальным управлением на данном шаге является $x^*_3(200) = 100$, его значение отображается в ячейке I4;

на четвертом шаге $\xi_3 = \xi_2 - x_3 = 200 - 100 = 100$, оптимальным управлением на данном шаге является $x^*_4(100) = 100$, его значение отображается в ячейке G3.

Безусловную оптимизацию в задаче также, как и условную, целесообразно осуществлять с помощью программного кода, работа которого заключается в определении и визуальном выделении оптимальных значений на каждом шаге, например, путем увеличения размера шрифта в ячейках с максимальным доходом и оптимальными значениями вложенных средств в каждое предприятие. Результат работы программы представлен на рис. 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	x / ξ	f_1	f_2	f_3	f_4	Z^*_4	x^*_4	Z^*_3	x^*_3	Z^*_2	x^*_2	Z^*_1	x^*_1
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	100	15	8	10	12	12	100	12	0	12	0	15	100
4	200	16	17	12	15	15	200	22	100	22	0	27	100
5	300	18	20	17	16	16	300	25	100	30	100	37	100
6	400	24	25	22	23	23	400	29	300	39	200	45	100

Рис. 3. Результат этапа безусловной оптимизации после выполнения программного кода

Таким образом, при решении поставленной задачи получаем следующие результаты: максимальный доход, получаемый от вложения средств, составляет 45 денежных единиц ($Z^*_{\max} = 45$), для получения которого каждому предприятию нужно выделить средства в размере 100 денежных единиц ($x^*_1 = 100$, $x^*_2 = 100$, $x^*_3 = 100$, $x^*_4 = 100$).

В данной компьютерной разработке программные коды, реализующие этапы условной и безусловной оптимизации, выполняются при щелчке кнопки, таким образом, для решения поставленной задачи об оптимальном распределении ресурсов необходимо в первую очередь вести исходные данные на лист файла Excel в диапазон ячеек A2:E6, затем скопировать данные диапазона ячеек E2:E6 в диапазон F2:F6, данные диапазона ячеек A2:A6 в G2:G6, и запустить программный код щелчком кнопки. Программная разработка может быть использована для решения однотипных задач: во всех задачах средства вкладываются в четыре предприятия и количество вариантов вложения средств должно равняться пяти, т.е. таблица с исходными данными должна иметь размер 5x4. Например, задача может быть сформулирована следующим образом: начальную сумму средств в размере 200 денежных единиц нужно распределить между четырьмя предприятиями, средства выделяются в размерах, кратных 50. Числа, определяющие доходы предприятий, можно задавать произвольно. В связи с выше сказанным, описываемая компьютерная разработка может использоваться для формирования различных вариантов заданий по рассматриваемой теме и быстрой проверки выполняемых работ. Также может быть использована в качестве методического пособия по применению метода динамического программирования для решения задачи о распределении ресурсов.

1. Архангельская Е. В. Методы обработки статистических данных в правовых исследованиях. Вестник Саратовской государственной юридической академии. 2013. № 1 (90). С. 198-204.
2. Платежные матрицы в экономических задачах. Архангельская Е.В. В сборнике: Современное образование: плюсы, минусы и перспективы Материалы международной научно-практической конференции. 2014. С. 3-6.